УДК 517.972

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А. Ю. Сухарев

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 11.09.2014 г.

Аннотация. Рассматривается неоднородная краевая задача, где коэффициент в уравнении представляет собой случайную величину, а правая часть уравнения – случайный процесс. В результате преобразований из исходной стохастической задачи получена детерминированная краевая задача с частными и вариационными производными. Методом разделения переменных Фурье найдено решение детерминированной задачи. Получена формула математического ожидания решения исходной задачи. Найдено математическое ожидание решения в случае, когда случайная величина и случайный процесс, входящие в уравнение, независимы. Рассмотрен частный случай распределения случайного коэффициента.

Ключевые слова: краевая задача, вариационная производная, математическое ожидание, случайный процесс.

MATHEMATICAL EXPECTATION OF SOLUTION OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH RANDOM COEFFICIENTS

A. Y. Sukharev

Abstract. We consider an inhomogeneous boundary value problem, where the coefficient in equation is a random variable, and the right-hand side of equation is a random process. As a result of transformations, a determinate boundary value problem with partial and variational derivatives was obtained from the original stochastic problem. Using the Fourier method of separation of variables we got the solution of the determinate problem. The formula for the mathematical expectation of solution of the initial problem was derived. The mathematical expectation of solution was obtained in the case where random variable and random process, included in the equation, are independent. A particular case of distribution of the random coefficient was considered.

Keywords: boundary value problem, variational derivative, mathematical expectation, random process.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть Ω — пространство элементарных событий. Случайным процессом будем называть семейство случайных величин $f(t) = f(t,\omega), t \in R, \omega \in \Omega$, причём каждая из случайных величин есть функция от элементарного исхода ω. В дальнейшем случайный процесс будем обозначать как $f(t)$.

Рассмотрим задачу:

$$\ddot{x} + \varepsilon^2 x = f(t); \tag{1}$$

$$x(0) = 0; \tag{2}$$

$$x(l) = 0, \tag{3}$$

где ε — случайная величина, $f(t)$ — случайный процесс, $t \in T = [0, l]$.

Будем искать математическое ожидание решения задачи (1)–(3). Совместное распределение ε и $f(t)$ задано характеристическим функционалом [1, с. 192]:

$$\psi(u, v) = M(e^{i\varepsilon u + i\int\limits_T f(s)v(s)ds}), \tag{4}$$

где $u, v \in L_1(T)$, M — знак математического ожидания по функции распределения случайной величины ε и случайного процесса $f(t)$.

Умножим уравнение (1) и краевые условия (2), (3) на величину $e^{i\varepsilon u + i\int\limits_T f(s)v(s)ds}$ и возьмем математическое ожидание от обеих частей полученных равенств.

$$M(\ddot{x}(t)e^{i\varepsilon u + i\int\limits_T f(s)v(s)ds}) + M(\varepsilon^2 x(t)e^{i\varepsilon u + i\int\limits_T f(s)v(s)ds}) = M(f(t)e^{i\varepsilon u + i\int\limits_T f(s)v(s)ds}) \tag{5}$$

$$M(x(0)e^{i\varepsilon u + i\int\limits_T f(s)v(s)ds}) = 0 \tag{6}$$

$$M(x(l)e^{i\varepsilon u + i\int\limits_T f(s)v(s)ds}) = 0 \tag{7}$$

Введем в рассмотрение функционал $y(t, u, v) = M(x(t)e^{i\varepsilon u + i\int\limits_T f(s)v(s)ds})$. Заметим, что $y(t, 0, 0) = M(x(t))$ — искомое математическое ожидание.

Нетрудно видеть, что

$$M(\ddot{x}(t)e^{i\varepsilon u + i\int\limits_T f(s)v(s)ds}) = \frac{\partial^2 y(t, u, v)}{\partial t^2},$$

$$M(\varepsilon^2 x(t)e^{i\varepsilon u + i\int\limits_T f(s)v(s)ds}) = -\frac{\partial^2 y(t, u, v)}{\partial u^2},$$

$$M(f(t)e^{i\varepsilon u + i\int\limits_T f(s)v(s)ds}) = -i\frac{\delta\psi(u, v)}{\delta v(t)},$$

$$M(x(0)e^{i\varepsilon u + i\int\limits_T f(s)v(s)ds}) = y(0, u, v),$$

$$M(x(l)e^{i\varepsilon u + i\int\limits_T f(s)v(s)ds}) = y(0, u, v),$$

где $\frac{\delta\psi(u,v)}{\delta v(t)}$ — вариационная производная [1, с. 13] функционала ψ по $v(t)$.

Таким образом, от стохастической задачи (1)–(3) можно перейти к следующей детерминированной задаче относительно $y(t, u, v)$:

$$\frac{\partial^2 y(t, u, v)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y(t, u, v)}{\partial u^2} = -i\frac{\delta\varphi(u, v)}{\delta v(t)}; \tag{8}$$

$$y(0, u, v) = 0; \tag{9}$$

$$y(l, u, v) = 0. \tag{10}$$

РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Для начала рассмотрим однородную краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 y(t,u)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y(t,u)}{\partial u^2} = 0; \tag{11}$$

$$y(0,u) = 0; \tag{12}$$

$$y(l,u) = 0; \tag{13}$$

Решим её методом разделения переменных [2, с. 82]. Будем искать нетривиальное решение задачи (11)–(13) в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от t, а другая — только от u:

$$y(t,u) = T(t)U(u). \tag{14}$$

Тогда уравнение (11) приобретает вид:

$$U(u)T''(t) - T(t)U''(u) = 0. \tag{15}$$

Разделим обе части уравнения (15) на $T(t)U(u)$:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{U''(u)}{U(u)} = \lambda \tag{16}$$

Соотношение (16) приводит к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$T''(t) - \lambda T(t) = 0; \tag{17}$$

$$U''(u) - \lambda U(u) = 0. \tag{18}$$

Подставляя представление для $y(t,u)$в начальные условия (12), (13), получаем:

$$\begin{cases} T(0)U(u) = 0; \\ T(l)U(u) = 0, \end{cases}$$

Если $U(u) \equiv 0$, то $y(t,u,v) \equiv 0$, в то время как мы ищем нетривиальное решение. Значит, $T(0) = T(l) = 0$.

Рассмотрим последовательно три случая решения уравнения (17), когда константа разделения переменных λ больше, равна или меньше нуля.

1) $\lambda > 0$. Общее решение уравнения имеет вид:

$$T(t) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}t} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}t}.$$

Для удовлетворения краевых условий необходимо выполнение следующих равенств:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{\sqrt{\lambda}l} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}l} = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Для существования решения системы (19) необходимо равенство нулю определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\lambda}l} & e^{-\sqrt{\lambda}l} \end{vmatrix} = 0.$$

Это возможно только при $\lambda = 0$, что противоречит исходному предположению $\lambda > 0$.

2) $\lambda = 0$. Общее решение имеет вид $T(t) = C_1 t + C_2$. Подставим его в краевые условия:

$$\begin{cases} C_2 = 0, \\ C_1 l + C_2 = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение $C_1 = C_2 = 0$, значит, $T(t) \equiv 0$, но задача состоит в нахождении нетривиального решения уравнения (17).

3) $\lambda < 0$. Для дальнейшего удобства обозначим $\lambda = -p^2$, $p > 0$. Общее решение имеет вид:

$$T(t) = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt.$$

Для удовлетворения краевых условий необходимо выполнение следующих равенств:

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_1 \cos pl + C_2 \sin pl = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы следует, что существует счётное множество значений $p_k = \frac{\pi k}{l}, k = 1, 2, \ldots$, при которых уравнение (17) имеет нетривиальное решение

$$T_k(t) = C_2 \sin \frac{\pi k}{l} t. \tag{20}$$

Найдём теперь решения уравнения (18), соответствующие собственным значениям $\lambda_k = -p_k^2$.

$$U_k(u) = C_3 \cos \frac{\pi k}{l} u + C_4 \sin \frac{\pi k}{l} u, k = 1, 2, \ldots \tag{21}$$

Для каждого значения kподставим (20) и (21) в равенство (14). Получим решение уравнения (12), удовлетворяющее краевым условиям (13), (14):

$$y_k(t, u) = \sin \frac{\pi k}{l} t \left(A_k \cos \frac{\pi k}{l} u + B_k \sin \frac{\pi k}{l} u \right).$$

Для каждого kмы можем выбрать свои постоянные C_3 и C_4, поэтому пишем A_kи B_k (постоянная C_2 включена в A_kи B_k).

Сумма решений линейного однородного уравнения также является решением, поэтому функция

$$y(t, u) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{\pi k}{l} t \left(A_k \cos \frac{\pi k}{l} u + B_k \sin \frac{\pi k}{l} u \right) \tag{22}$$

тоже будет решением уравнения (12) и будет удовлетворять краевым условиям (13), (14).

НАХОЖДЕНИЕ ЧАСТНОГО РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим теперь неоднородную краевую задачу

$$\frac{\partial^2 y(t, u)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y(t, u)}{\partial u^2} = g(t, u); \tag{23}$$

$$y(0, u) = 0; \tag{24}$$

$$y(l, u) = 0. \tag{25}$$

Пусть существует разложение функции $g(t,u)$ в ряд Фурье [3, с. 151] по собственным функциям задачи (11)-(13):

$$g(t,u)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_{kn}\sin\left(\frac{\pi k}{l}t\right)\cos(nu)+D_{kn}\sin\left(\frac{\pi k}{l}t\right)\sin(nu)\right) \tag{26}$$

где коэффициенты Фурье вычисляются по формулам

$$C_{kn}=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}g(t,u)\sin\left(\frac{\pi k}{l}t\right)\cos(nu)dtdu,$$

$$D_{kn}=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}g(t,u)\sin\left(\frac{\pi k}{l}t\right)\sin(nu)dtdu.$$

Найдём частное решение уравнения (23), удовлетворяющее краевым условиям (24) и (25). Для этого оставим в правой части поочерёдно каждое из слагаемых ряда (26). Сумма решений полученных уравнений будет решением уравнения (26).

Рассмотрим первое такое уравнение:

$$\frac{\partial^2 y(t,u)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 y(t,u)}{\partial u^2}=C_{kn}\sin\left(\frac{\pi k}{l}t\right)\cos(nu)\,. \tag{27}$$

Будем искать частное решение в виде $y(t,u)=C^*_{kn}\sin\left(\frac{\pi k}{l}t\right)\cos(nu)$, где C^*_{kn} — неизвестные константы. Подставим это представление в уравнение (27).

$$-\frac{\pi^2k^2}{l^2}C^*_{kn}\sin\left(\frac{\pi k}{l}t\right)\cos(nu)+n^2C^*_{kn}\sin\left(\frac{\pi k}{l}t\right)\cos(nu)=C_{kn}\sin\left(\frac{\pi k}{l}t\right)\cos(nu)\,;$$

$$(n^2-\frac{\pi^2k^2}{l^2})C^*_{kn}=C^;_{kn}\quad C^*_{kn}=\frac{C_{kn}}{(n^2-\frac{\pi^2k^2}{l^2})}.$$

Итого имеем решение уравнения (27):

$$y(t,u)=\frac{C_{kn}}{(n^2-\frac{\pi^2k^2}{l^2})}\sin\left(\frac{\pi k}{l}t\right)\cos(nu)$$

$$\frac{\partial^2 y(t,u)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 y(t,u)}{\partial u^2}=D_{kn}\sin\left(\frac{\pi k}{l}t\right)\sin(nu)\,. \tag{28}$$

Ищем решение в виде $y(t,u)=D^*_{kn}\sin\left(\frac{\pi k}{l}t\right)\sin(nu)$. Подставим его в уравнение (28).

$$-\frac{\pi^2k^2}{l^2}D^*_{kn}\sin\left(\frac{\pi k}{l}t\right)\sin(nu)+n^2D^*_{kn}\sin\left(\frac{\pi k}{l}t\right)\sin(nu)=D_{kn}\sin\left(\frac{\pi k}{l}t\right)\sin(nu)\,;$$

$$(n^2-\frac{\pi^2k^2}{l^2})D^*_{kn}=D^;_{kn}\quad D^*_{kn}=\frac{D_{kn}}{(n^2-\frac{\pi^2k^2}{l^2})},n\neq k.$$

Итого мы нашли решение уравнения (28):

$$y(t,u)=\frac{D_{kn}}{(n^2-\frac{\pi^2k^2}{l^2})}\sin\left(\frac{\pi k}{l}t\right)\sin(nu)\,.$$

Теперь мы можем составить частное решение уравнения (23) как сумму решений уравнений (27)-(30). Выпишем сразу общее решение уравнения (23):

$$y(t,u) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos\left(\frac{\pi k}{l} u\right) + B_k \sin\left(\frac{\pi k}{l} u\right)\right) \sin\left(\frac{\pi k}{l} t\right) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{l^2}{n^2 l^2 - \pi^2 k^2} \left(C_{kn} \cos(nu) + D_{kn} \sin(nu)\right) \sin\left(\frac{\pi k}{l} t\right). \quad (29)$$

НАХОЖДЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ РЕШЕНИЯ

Возвратимся к задаче (8)–(10). Она является частным случаем задачи (23)–(25), если положить, что $g(t,u) = g(t,u,v) = -i\frac{\delta\psi(u,v)}{\delta v(t)}$. Переменная v не присутствует в производных внутри уравнения (23) и является параметром.

Таким образом, (31) является также решением задачи (8)-(10), если

$$C_{kn} = \frac{-i}{4\pi^2} \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\delta\psi(t,u,v)}{\delta v(t)} \sin\left(\frac{\pi k}{l} t\right) \cos(nu) dt du,$$

$$D_{kn} = \frac{-i}{4\pi^2} \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\delta\psi(t,u,v)}{\delta v(t)} \sin\left(\frac{\pi k}{l} t\right) \sin(nu) dt du.$$

Отсюда можем найти математическое ожидание решения задачи (1)–(3):

$$M(x(t)) = y(t,0,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{\pi k}{l} t - \\ - \frac{i}{4\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{l^2}{n^2 l^2 - \pi^2 k^2} \left(\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\delta\psi(t,u,v)}{\delta v(t)} \sin\left(\frac{\pi k}{l} t\right) \cos(nu) dt du \right)_{v=0} \sin\left(\frac{\pi k}{l} t\right). \quad (30)$$

СЛУЧАЙ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Пусть случайная величина ε и случайный процесс $f(t)$ независимы, т.е. при $t_0^{\in} T$ независимы случайные величины ε и $f(t_0)$.

Тогда их характеристический функционал будет иметь вид:

$$\psi(u,v) = \varphi_\varepsilon(u)\varphi_f(v),$$

где $\varphi_\varepsilon(u) = M(e^{i\varepsilon u})$, $\varphi_f(v) = M(e^{i\int_T f(s)v(s)ds})$.

В таком случае математическое ожидание решения задачи (1)-(3) примет вид:

$$M(x(t)) = y(t,0,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{\pi k}{l} t + \\ + \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{l^2}{n^2 l^2 - \pi^2 k^2} \left(\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \varphi_\varepsilon(u) M(f(t)) \sin\left(\frac{\pi k}{l} t\right) \cos(nu) dt du \right) \sin\left(\frac{\pi k}{l} t\right). \quad (31)$$

ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ ε

Пусть случайная величина ε и случайный процесс $f(t)$ независимы, распределение ε задано характеристической функцией:

$$\varphi_\varepsilon(u) = \frac{\sin au}{au}\left(e^{iM(\varepsilon)u}\right).$$

Математическое ожидание решения примет вид:

$$\begin{aligned}
M(x(t)) = y(t,0,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{\pi k}{l}t + \frac{1}{4\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{l^2}{n^2l^2-\pi^2k^2}\times \\
\times\left(\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin au}{au}\left(e^{iM(\varepsilon)u}\right)M(f(t))\sin\left(\frac{\pi k}{l}t\right)\cos(nu)dtdu\right)\sin\left(\frac{\pi k}{l}t\right) = \\
= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{\pi k}{l}t + \frac{1}{4\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{l^2}{n^2l^2-\pi^2k^2}\int_0^{2\pi}\frac{\sin au}{au}\left(e^{iM(\varepsilon)u}\right)\cos(nu)\,du\times \\
\times\int_0^{2\pi}M(f(t))\sin\left(\frac{\pi k}{l}t\right)dt. \quad (32)
\end{aligned}$$

Найдём значение интеграла $\int_0^{2\pi}\frac{\sin au}{au}\left(e^{iM(\varepsilon)u}\right)\cos(nu)\,du$. Согласно известной формуле, $\sin au\cos nu = \frac{1}{2}\left(\sin(a+n)u + \sin(a-n)u\right)$. Получим:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\frac{\sin au}{au}\left(e^{iM(\varepsilon)u}\right)\cos(nu)\,du = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{(\sin(a+n)u+\sin(a-n)u)}{au}\left(e^{iM(\varepsilon)u}\right)du = \\
= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{(\sin(a+n)u+\sin(a-n)u)}{au}\left(\cos M(\varepsilon)u + i\sin M(\varepsilon)u\right)du = \\
= \frac{1}{2}\left(\int_0^{2\pi}\frac{\cos M(\varepsilon)u\sin(a+n)u}{au}du + \int_0^{2\pi}\frac{\cos M(\varepsilon)u\sin(a-n)u}{au}du + \right. \\
\left. + i\int_0^{2\pi}\frac{\sin M(\varepsilon)u\sin(a+n)u}{au}du + i\int_0^{2\pi}\frac{\sin M(\varepsilon)u\sin(a-n)u}{au}du\right). \quad (33)
\end{aligned}$$

Вычислим отдельно каждое из четырёх слагаемых в выражении (35).

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos M(\varepsilon)u\sin(a+n)u}{au}du = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\sin(M(\varepsilon)+a+n)u - \sin(M(\varepsilon)-a-n)u}{au}.$$

Разложим синусы в ряд Тейлора. Получим:

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin(M(\varepsilon)+a+n)u-\sin(M(\varepsilon)-a-n)u}{au} =$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}((M(\varepsilon)+a+n)u)^{2m+1}-\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}((M(\varepsilon)-a-n)u)^{2m+1}}{au}du =$$
$$= \frac{1}{2a}\int\limits_0^{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}\left((M(\varepsilon)+a+n)^{2m+1}-(M(\varepsilon)-a-n)^{2m+1}\right)u^{2m}du =$$
$$= \frac{1}{2a}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left((M(\varepsilon)+a+n)^{2m+1}-(M(\varepsilon)-a-n)^{2m+1}\right)u^{2m+1}}{(2m+1)(2m+1)!}\Bigg|_0^{2\pi} =$$
$$= \frac{1}{2a}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left((M(\varepsilon)+a+n)^{2m+1}-(M(\varepsilon)-a-n)^{2m+1}\right)(2\pi)^{2m+1}}{(2m+1)(2m+1)!}.$$

Аналогично находим второе слагаемое формулы (35).

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos M(\varepsilon)u\sin(a-n)u}{au}du =$$
$$= \frac{1}{2a}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left((M(\varepsilon)+a-n)^{2m+1}-(M(\varepsilon)-a+n)^{2m+1}\right)(2\pi)^{2m+1}}{(2m+1)(2m+1)!}.$$

Вычисляем третье слагаемое:

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin M(\varepsilon)u\sin(a+n)u}{au}du = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos(M(\varepsilon)+a+n)u-\cos(M(\varepsilon)-a-n)u}{au}.$$

Разложим косинусы в ряд Тейлора. Получим:

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos(M(\varepsilon)+a+n)u-\cos(M(\varepsilon)-a-n)u}{au} =$$
$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}((M(\varepsilon)+a+n)u)^{2m}-\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}((M(\varepsilon)-a-n)u)^{2m}}{au}du =$$

$$= -\frac{1}{2a}\int\limits_0^{2\pi}\Bigg[\frac{(-1)^0}{0!}\left((M(\varepsilon)+a+n)^0-(M(\varepsilon)-a-n)^0\right)u^{-1}+$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}\left((M(\varepsilon)+a+n)^{2m}-(M(\varepsilon)-a-n)^{2m}\right)u^{2m-1}\Bigg]du =$$

$$= \frac{1}{2a}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}\left((M(\varepsilon)+a+n)^{2m}-(M(\varepsilon)-a-n)^{2m}\right)u^{2m}}{2m(2m)!}\Bigg|_0^{2\pi} =$$
$$= \frac{1}{2a}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}\left((M(\varepsilon)+a+n)^{2m}-(M(\varepsilon)-a-n)^{2m}\right)(2\pi)^{2m}}{2m(2m)!}.$$

Аналогично:

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin M(\varepsilon)u\sin(a-n)u}{au}du = \frac{1}{2a}\ _{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}\left((M(\varepsilon)+a-n)^{2m}-(M(\varepsilon)-a+n)^{2m}\right)(2\pi)^{2m}}{2m(2m)!}.$$

Итого, мы вычислили значение искомого интеграла:

$$\int\limits_0^{2\pi} \tfrac{\sin au}{au}\left(e^{iM(\varepsilon)u}\right)\cos(nu)\,du = \tfrac{1}{4a}\sum_{m=0}^{\infty}\tfrac{(-1)^m(2\pi)^{2m+1}}{(2m+1)(2m+1)!}\Big[(M(\varepsilon)+a+n)^{2m+1} -$$
$$-(M(\varepsilon)-a-n)^{2m+1} + (M(\varepsilon)+a-n)^{2m+1} - (M(\varepsilon)-a+n)^{2m+1}\Big] +$$
$$+\tfrac{i}{4a}\sum_{m=1}^{\infty}\tfrac{(-1)^{m+1}(2\pi)^{2m}}{2m(2m)!}\Big[(M(\varepsilon)+a+n)^{2m} - (M(\varepsilon)-a-n)^{2m} +$$
$$+(M(\varepsilon)+a-n)^{2m} - (M(\varepsilon)-a+n)^{2m}\Big].$$

Теперь подставим его в формулу (34) и найдём значение математического ожидания:

$$M(x(t)) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{\pi k}{l}t + \frac{1}{4\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{l^2}{n^2l^2-\pi^2k^2}\times$$
$$\times\left(\frac{1}{4a}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(2\pi)^{2m+1}}{(2m+1)(2m+1)!}\Big[(M(\varepsilon)+a+n)^{2m+1} -\right.$$
$$-(M(\varepsilon)-a-n)^{2m+1} + (M(\varepsilon)+a-n)^{2m+1} - (M(\varepsilon)-a+n)^{2m+1}\Big] +$$
$$+\frac{i}{4a}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}(2\pi)^{2m}}{2m(2m)!}\Big[(M(\varepsilon)+a+n)^{2m} - (M(\varepsilon)-a-n)^{2m} +$$
$$\left.+(M(\varepsilon)+a-n)^{2m} - (M(\varepsilon)-a+n)^{2m}\Big]\right)\times\int\limits_0^{2\pi} M(f(t))\sin\left(\frac{\pi k}{l}t\right)dt.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Нами рассмотрена краевая задача со случайными коэффициентами. Выполнен переход к детерминированной краевой задаче и найдено её решение. Получена формула математического ожидания решения исходной задачи. Рассмотрен случай, когда случайная величина ε и случайный процесс $f(t)$ независимы друг от друга. Также найдено математическое ожидание решения в частном случае распределения случайной величины ε.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Задорожний В.Г. Методы вариационного анализа / В.Г. Задорожний. — М.-Ижевск: РХД, 2006. — 316 с.

2. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики: учебное пособие для студентов физико-математ. спец. университетов / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. — М.: Изд-во МГУ, 1999. — 789 с.

3. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 2 / А. Зигмунд; пер. с англ. О.С. Ивашева-Мусатова, ред. Н.К. Бари. — М.:Мир, 1965. — 538 с.

REFERENCES

1. Zadorozhniy V.G. Methods of variational analysis. [Zadorozhnij V.G. Metody variacionnogo analiza]. Moskow–Izhevsk: RChD, 2006, 316 p.

2. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. Equations of mathematical physics. [Tixonov A.N., Samarskij A.A. Uravneniya matematicheskoj fiziki: uchebnoe posobie dlya studentov fiziko-matemat. spec. universitetov]. Moskow: MSU Publishing, 1999, 789 p.

3. Zygmund A. Trigonometric series. Vol. 2. [Zigmund A. Trigonometricheskie ryady. T. 2]. Moskow: Mir, 1965, 538 p.

Сухарев Александр Юрьевич, аспирант кафедры Нелинейных колебаний факультета Прикладной математики, информатики и механики Воронежсского государственного университета, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: iplinir@gmail.com

Sukharev Alexander Yurievich, graduate student of nonlinear oscillations, faculty of Applied mathematics, informatics and mechanics of Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: iplinir@gmail.com