УДК 517.9

СПЕКТРЫ АЛГЕБР МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИХСЯ И ПЕРИОДИЧЕСКИХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИЙ И БАНАХОВЫ ПРЕДЕЛЫ*

И. И. Струкова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 18.07.2014 г.

Аннотация. В работе изучаются медленно меняющиеся и периодические на бесконечности функции. Такие функции естественным образом возникают как ограниченные решения некоторых классов разностных и дифференциальных уравнений. Основные результаты статьи связаны с гармоническим анализом периодических на бесконечности функций. Вводится понятие обобщенного ряда Фурье, коэффициенты которого являются медленно меняющимися на бесконечности функциями (не обязательно постоянными). С использованием банаховых пределов описан спектр (пространство максимальных идеалов) банаховых алгебр медленно меняющихся и периодических на бесконечности функций.

Основные результаты статьи получены с привлечением спектральной теории изометрических представлений (банаховых модулей над групповыми алгебрами).

Ключевые слова: банахово пространство, банахова алгебра, медленно меняющиеся на бесконечности функции, периодические на бесконечности функции, ряд Фурье, банахов предел, спектр алгебры.

SPECTRA OF ALGEBRAS OF SLOWLY VARYING AND PERIODIC AT INFINITY FUNCTIONS AND BANACH LIMITS

I. I. Strukova

Abstract. In the paper slowly varying and periodic at infinity functions are studied. Such functions naturally arise as bounded solutions of some classes of difference and differential equations. The main results are connected with harmonic analysis of periodic at infinity functions. The concept of generalized Fourier series which coefficients are slowly varying at infifity functions (not obligatory constants) is introduced. With the use of Banach limits the spectra (the space of maximal ideals) of Banach algebras of slowly varying and periodic at infinity functions are described.

The main results of the paper are derived with the use of isometric representations spectral theory (Banach modules over group algebras).

Keywords: Banach space, Banach algebra, slowly varying at infinity function, periodic at infinity function, Fourier series, Banach limit, algebra spectrum.

Пусть X – комплексное банахово пространство, $End\ X$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов (эндоморфизмов), действующих в X. Пусть $\mathbb{J}$ – один из промежутков $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Символом $C_b = C_b(\mathbb{J}, X)$ обозначим банахово пространство непрерывных и ограниченных на $\mathbb{J}$ функций с нормой $\|x\|_\infty = \sup\limits_{t\in\mathbb{J}} \|x(t)\|_X$, $C_{b,u} = C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 13-01-00378, 14-01-31196) и РНФ (проект № 14-21-00066).

– замкнутое подпространство равномерно непрерывных функций из C_b, $C_0 = C_0(\mathbb{J}, X)$ – замкнутое подпространство стремящихся к 0 на бесконечности функций.

В банаховом пространстве $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ рассмотрим полугруппу $S : \mathbb{J} \to End\ C_{b,u}$ операторов, действующих по правилу

$$(S(t)x)(\tau) = x(t + \tau), \quad t, \tau \in \mathbb{J}. \tag{1}$$

Отметим, что S – группа операторов, если $\mathbb{J} = \mathbb{R}$.

Определение 1. Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ называется *медленно меняющейся на бесконечности*, если $(S(t)x - x) \in C_0(\mathbb{J}, X)$ для любого $t \in \mathbb{J}$.

Медленно меняющиеся на бесконечности функции из пространства $C_{b,u}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ и их свойства рассматриваются в [1]. В [2] аналогичное определение дается для равномерно непрерывных ограниченных функций, определенных на произвольной локально компактной абелевой группе.

Определение 2. Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ называется *периодической на бесконечности периода* $\omega > 0$ *($\omega-$периодической на бесконечности)*, если $(S(\omega)x - x) \in C_0(\mathbb{J}, X)$ или, что эквивалентно, $\lim\limits_{|t|\to\infty} \|x(t + \omega) - x(t)\|_X = 0$.

Периодические на бесконечности функции, определенные на $\mathbb{R}^n$, рассматривались в [3], [4]. В статье [5] было дано определение почти периодической на бесконечности функции.

Множество медленно меняющихся на бесконечности функций обозначим символом $C_{sl,\infty} = C_{sl,\infty}(\mathbb{J}, X)$, а множество ω-периодических на бесконечности функций – символом $C_{\omega,\infty} = C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$. Оба множества образуют линейные замкнутые подпространства из банахова пространства $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$, инвариантные относительно операторов $S(t),\ t \in \mathbb{J}$. Если $X = \mathbb{C}$, то в обозначениях рассматриваемых функциональных пространств опускается символ X, например, $C_{\omega,\infty}(\mathbb{J})$ обозначает пространство $C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, \mathbb{C})$.

Если X – банахова алгебра, то все введенные в рассмотрение функциональные пространства являются банаховыми алгебрами (с операцией поточечного умножения $(xy)(t) = x(t)y(t),\ t \in \mathbb{J}$, для функций x, y из рассматриваемого пространства). Каждая из таких алгебр коммутативна, если коммутативна алгебра X, и является C^*-алгеброй, если X – C^*-алгебра. В частности, коммутативными C^*-алгебрами являются алгебры $C_{sl,\infty}(\mathbb{J})$ и $C_{\omega,\infty}(\mathbb{J})$.

Определение 3. *Каноническим рядом Фурье* функции $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$ будем называть ряд вида

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n(t) e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t},\ t \in \mathbb{J},$$

где функции $x_n : \mathbb{J} \to X,\ n \in \mathbb{Z}$, определяются формулами

$$x_n(t) = \frac{1}{\omega} \int\limits_0^\omega x(t + \tau) e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}(t+\tau)} d\tau,\ t \in \mathbb{J},\ n \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

и называются *каноническими коэффициентами Фурье* функции x.

Ясно, что если $x \in C_\omega(\mathbb{R}, X)$, то $x_k(t) \equiv x_k = \frac{1}{\omega} \int\limits_0^\omega x(\tau) e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}\tau} d\tau$, $\tau \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$, – обычные коэффициенты Фурье функции x.

Определение 4. *Обобщенным рядом Фурье* функции $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$ называется любой ряд вида $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} y_n(t) e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t},\ t \in \mathbb{J}$, где $y_n,\ n \in \mathbb{Z}$, – такие функции из $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$, для которых $y_n - x_n \in C_0(\mathbb{J}, X),\ n \in \mathbb{Z}$, а функции $x_n,\ n \in \mathbb{Z}$, определяются формулой (2).

Отметим, что канонические коэффициенты Фурье $x_n,\ n \in \mathbb{Z}$, (определенные формулой (2)) являются медленно меняющимися на бесконечности функциями, т.е. $x_n \in C_{sl,\infty}(\mathbb{J}, X),\ n \in \mathbb{Z}$ (см. [6]).

Из этого факта и определения 4 следует, что коэффициенты любого обобщенного ряда Фурье обладают свойством: $y_n \in C_{sl,\infty}(\mathbb{J}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Далее введем определение банахова предела на абстрактной коммутативной C^*-алгебре с единицей. Пусть $\mathcal{U}$ – коммутативная C^*-алгебра.

Определение 5. *Характер* ξ *алгебры* $\mathcal{U}$ *– это такой ненулевой линейный функционал* $\xi \in \mathcal{U}^*$, *что* $\xi(ab) = \xi(a)\xi(b)$ *при всех* $a, b \in \mathcal{U}$. *Спектром алгебры* $\mathcal{U}$ *называется множество* $Spec\,\mathcal{U}$ *всех ее характеров.*

Рассмотрим коммутативную C^*-алгебру $\mathcal{U}$ с единицей e, на которой задано изометрическое представление $T : \mathbb{R}_+ \to End\,\mathcal{U}$, обладающее свойствами:

1) $\|T(t)\| = 1$;

2) $T(t)(xy) = (T(t)x)\,(T(t)y)$ для всех $x, y \in \mathcal{U}$,

т.е. представление T образует полугруппу гомоморфизмов алгебры $\mathcal{U}$.

Определение 6. Линейный функционал B на инвариантной относительно полугруппы T алгебре $\mathcal{U}$ с единицей e называется *банаховым пределом* на $\mathcal{U}$, если выполнены следующие условия:

1) $B(e) = 1$,

2) $\|B\| = 1$,

3) $B(T(t)x) = B(x)$, $t \geqslant 0$, $x \in \mathcal{U}$.

Множество банаховых пределов алгебры $\mathcal{U}$ будем обозначать $\mathcal{BL}(\mathcal{U})$.

Отметим работы [7], [8], где банаховы пределы рассматривались на пространстве последовательностей l_∞.

Далее символом $\mathbb{K}$ обозначим одно из полей $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. В качестве коммутативной C^*-алгебры $\mathcal{U}$ возьмем алгебру $C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$. Роль единицы в ней играет функция $e \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$, $e(t) \equiv 1$, $t \geqslant 0$. В качестве представления T на алгебре $C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$ возьмем стандартную полугруппу сдвигов, задаваемую формулой (1).

Лемма 1. *Каждый банахов предел на алгебре* $C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$ *является характером этой алгебры.*

Для каждого $\tau \geqslant 0$ рассмотрим функционал $\xi_\tau \in C_{b,u}(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})^*$, действующий по правилу

$$\xi_\tau(x) = x(\tau), \ \tau \geqslant 0. \tag{3}$$

Далее для каждого $\tau \geqslant 0$ введем множества $A_\tau = \{\xi_t; t \in [\tau; +\infty)\}$.

Введем обозначение $\mathcal{B}_0 = \bigcap\limits_{\tau \geqslant 0} \overline{A_\tau}$.

Лемма 2. *Справедливо равенство* $\mathcal{B}_0 = \mathcal{BL}(C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{K}))$.

В итоге получен следующий результат о спектре алгебры медленно меняющихся на бесконечности функций:

Теорема 1. *Спектр алгебры* $C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$ *представим в виде* $\mathcal{B}_0 \bigcup \{\xi_\tau; \tau \geqslant 0\}$, *где функционалы* ξ_τ, $\tau \geqslant 0$, *определяются формулой (3).*

Далее перейдем к исследованию спектра алгебры $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$.

Символом $A_\omega(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$ обозначена подалгебра функций из $C_\omega(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$ с абсолютно сходящимся рядом Фурье, а символом $A_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$ обозначена подалгебра функций из $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$ с абсолютно сходящимся рядом Фурье.

Пусть $\xi_0 \in \mathcal{BL}(C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}))$. По нему построим отображение $T_{\xi_0} : A_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}) \to A_\omega(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$, положив для каждого $x \in A_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$

$$(T_{\xi_0}(x))(\gamma) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_0(x_k)\gamma^k, \ x \in A_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}), \ \gamma \in \mathbb{T},$$

где x_k, $k \in \mathbb{Z}$, - канонические коэффициенты Фурье функции x, определяемые по формуле (2).

Лемма 3. *Отображение* T_{ξ_0}, $\xi_0 \in \mathcal{BL}(C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+,\mathbb{C}))$, *является гомоморфизмом алгебры* $A_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+,\mathbb{C})$ *в алгебру* $A_\omega(\mathbb{R}_+,\mathbb{C})$ *и обладает следующими свойствами:*

1. $T_{\xi_0}(e) = e$;

2. *для любой вещественной функции* $x \in A_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ *для всех* $\gamma \in \mathbb{T}$ *выполнено условие* $(T_{\xi_0}(x))(\gamma) \in \mathbb{R}$;

3. $|(T_{\xi_0}(x))(\gamma)| \leqslant \|x\|_\infty$, $\gamma \in \mathbb{T}$, *для любой функции* $x \in A_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+,\mathbb{C})$.

Зафиксируем $\gamma_0 \in \mathbb{T}$ и рассмотрим характер $T_{\xi_0,\gamma_0} : A_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, действующий по правилу

$$T_{\xi_0,\gamma_0}(x) = (T_{\xi_0}(x))(\gamma_0),\ x \in A_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+,\mathbb{C}). \tag{4}$$

Отметим, что подалгебра $A_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+,\mathbb{C})$ плотна в $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+,\mathbb{C})$, а $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+,\mathbb{C})$ - есть C^*-алгебра и для гомоморфизма T_{ξ_0} выполняется свойство (3) леммы 3 (а значит, для характера T_{ξ_0,γ_0} выполняется свойство $|T_{\xi_0,\gamma_0}(x)| \leqslant \|x\|_\infty$, $\gamma_0 \in \mathbb{T}$). Поэтому характеры T_{ξ_0,γ_0} допускают расширение на все пространство $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+,\mathbb{C})$. Это расширение мы также будем обозначать через $T_{\xi_0,\gamma_0} : C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$.

Теорема 2. *Спектр алгебры* $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+,\mathbb{C})$ *совпадает с множеством* $M = \{T_{\xi_0,\gamma_0}; \gamma_0 \in \mathbb{T}, \xi_0 \in \mathcal{BL}(C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+,\mathbb{C}))\} \bigcup \{\xi_\tau; \tau \geqslant 0\}$, *где функционалы* ξ_τ, $\tau \geqslant 0$, *определяются формулой (3), а функционалы* T_{ξ_0,γ_0} *– формулой (4).*

Поскольку $T_{\xi_0,\gamma_0}(x) \in \mathbb{R}$ для любой функции $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, то его сужение $P_{\xi_0,\gamma_0}(x)$ на алгебру $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ также является банаховым пределом и характером этой алгебры. Аналогично, поскольку $\xi_\tau(x) \in \mathbb{R}$, $\tau \geqslant 0$, для любой функции $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, то его сужение $\xi_{\tau,0}$, $\tau \geqslant 0$, на алгебру $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ также является характером этой алгебры. Отсюда получаем описание спектра соответствующей алгебры:

Теорема 3. *Спектр алгебры* $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ *совпадает с множеством функционалов* $\{P_{\xi_0,\gamma_0}; \gamma_0 \in \mathbb{T},\ \xi_0 \in \mathcal{BL}(C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}))\} \bigcup \{\xi_{\tau,0}; \tau \geqslant 0\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Калужина Н. С. Медленно меняющиеся на бесконечности функции, периодические на бесконечности функции и их свойства / Н. С. Калужина // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2010. — № 2. — С. 97–102.

2. Баскаков А. Г. Теорема Берлинга для функций с существенным спектром из однородных пространств и стабилизация решений параболических уравнений / А. Г. Баскаков, Н. С. Калужина // Матем. заметки. — 2012. — Т. 92, № 5. — С. 643–661.

3. Струкова И. И. О гармоническом анализе периодических на бесконечности функций / И. И. Струкова // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2014. — Т. 14, № 1. — С. 28–38.

4. Струкова И. И. Гармонический анализ периодических векторов и периодических на бесконечности функций / И. И. Струкова // Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ. — 2014. — Т. 14, № 1. — С. 98–111.

5. Баскаков А. Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений / А. Г. Баскаков // УМН. — 2013. — Т. 68., № 1(409). — С. 77–128.

6. Струкова И. И. Теорема Винера для периодических на бесконечности функций / И. И. Струкова // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2012. — Т 12, № 4. — С. 34–41.

7. Семёнов Е. М. Геометрические свойства множества банаховых пределов. / Е. М. Семёнов, Ф. А. Сукочев, А. С. Усачев // Изв. РАН. Сер. матем. — 2014. — Т. 78, № 3. — С. 177–204.

8. Усачев А. С. Преобразования в пространстве почти сходящихся последовательностей / А. С. Усачев // Сиб. матем. журн. — 2008. — Т. 49, № 6. — С. 1427–1429.

REFERENCES

1. Kaluzhina N. S. Slowly varying at infinity functions, periodic at infinity functions and their properties. [Kaluzhina N. S. Medlenno menyayushhiesya na beskonechnosti funkcii, periodicheskie na beskonechnosti funkcii i ix svojstva]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2010, no. 2, pp. 97–102.

2. Baskakov A. G., Kaluzhina N. S. Beurlings theorem for functions with essential spectrum from homogeneous spaces and stabilization of solutions of parabolic equations. [Baskakov A. G., Kaluzhina N. S. Teorema Berlinga dlya funkcij s sushhestvennym spektrom iz odnorodnyx prostranstv i stabilizaciya reshenij parabolicheskix uravnenij]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2012, vol. 92, iss. 5, pp 643–661.

3. Strukova I. I. About harmonic analysis of periodic at infinity functions. [Strukova I. I. O garmonicheskom analize periodicheskix na beskonechnosti funkcij]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika — Proceedings of the University of Saratov. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2014, vol. 14, no. 1, pp. 28–38.

4. Strukova I. I. Harmonic analysis of periodic vectors and periodic at infinity functions. [Strukova I. I. Garmonicheskij analiz periodicheskix vektorov i periodicheskix na beskonechnosti funkcij]. *Vestn. NGU. Ser. matem., mex., inform. — Journal of Mathematical Sciences*, 2014, vol. 14, no. 1, pp. 98–111.

5. Baskakov A. G. Analysis of linear differential equations by methods of the spectral theory of difference operators and linear relations. [Baskakov A. G. Issledovanie linejnyx differencial'nyx uravnenij metodami spektral'noj teorii raznostnyx operatorov i linejnyx otnoshenij]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 2013, vol. 68, iss. 1, pp. 69–116.

6. Strukova I. I. Wiener's theorem for periodic at infinity functions. [Strukova I. I. Teorema Vinera dlya periodicheskix na beskonechnosti funkcij]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika — Proceedings of the University of Saratov. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2012, vol. 12, no. 4, pp. 34–41.

7. Semenov E. M., Sukochev F. A., Usachev A. S. Geometric properties of the set of Banach limits. [Semyonov E. M., Sukochev F. A., Usachev A. S. Geometricheskie svojstva mnozhestva banaxovyx predelov]. *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Seriya matematicheskaya — Izvestiya: Mathematics*, 2014, vol. 78, no. 3, pp. 596–620.

8. Usachev A. S. Transformations in the space of almost convergent sequences. [Usachev A. S. Preobrazovaniya v prostranstve pochti sxodyashhixsya posledovatel'nostej]. *Sibirskij matematicheskij zhurnal — Siberian Mathematical Journal*, 2008, vol. 49, no. 6, pp. 1427–1429.

Струкова Ирина Игоревна, аспирант Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: irina.k.post@yandex.ru
Тел.: 8–904–212–77–49

Strukova Irina Igorevna, PhD student, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: irina.k.post@yandex.ru
Tel.: 8–904–212–77–49