УДК 517.9

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯХ ЛОКАЛЬНОГО СПЕКТРА И СПЕКТРА КАРЛЕМАНА ВЕКТОРОВ*

В. Е. Струков

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 23.12.2014 г.

Аннотация. Для векторов из банаховых $L^1(\mathbb{R})$-модулей изучены два определения спектра векторов, доказаны некоторые избранные свойства рассмотренных спектров. Основным результатом статьи является доказательство эквивалентности исследованных спектров векторов из банаховых $L^1(\mathbb{R})$-модулей. В работе вводится определение свойства однозначного распространения для замкнутого оператора. Для генератора сильно непрерывного изометрического представления обосновывается обладание свойством однозначного распространения и дается понятие локального спектра векторов. Исследуемое определение спектра Карлемана вектора введено на основе спектра Карлемана орбиты вектора из банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля.

Ключевые слова: локальный спектр векторов, спектр Карлемана векторов, банахов $L^1(\mathbb{R})$-модуль.

ABOUT CONCEPTS OF LOCAL AND CARLEMAN SPECTRA OF VECTORS

V. E. Strukov

Abstract. Two definitions of spectrum of vectors from Banach $L^1(\mathbb{R})$-modules are studied and several chosen properties are proved for spectra under consideration. The proof of equivalence of investigated spectra of vectors from Banach $L^1(\mathbb{R})$-modules appears to be main result of the article. A single-value analytic extension property is introduced for a closed operator. A generator of a strongly continuous isometric representation is shown to possess the single-value analytic extension property and is used for giving a notion of vectors' local spectrum. Carleman spectrum definition under investigation is given according to the Carleman spectrum of the orbit map of a vector from a Banach $L^1(\mathbb{R})$-module.

Keywords: Local spectrum of vectors, Carleman spectrum of vectors, Banach $L^1(\mathbb{R})$-module.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть X — комплексное банахово пространство, $EndX$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве X. Пусть $\mathbb{G}$ — локально компактная абелева группа, $L^1(\mathbb{G}, X)$ — банахово пространство измеримых суммируемых на $\mathbb{G}$ относительно меры Хаара (классов) функций со значениями в X, а $L^\infty(\mathbb{G}, X)$ — банахово пространство измеримых существенно ограниченных на $\mathbb{G}$ (классов) функций со значениями в X. Пусть $L^1(\mathbb{G}) = L^1(\mathbb{G}, \mathbb{C})$ – банахова алгебра измеримых суммируемых на $\mathbb{G}$ (классов) комплекснозначных функций со сверткой в качестве умножения, а $W_1^1(\mathbb{R})$ — банахово пространство Соболева, т.е. пространство функций из $L^1(\mathbb{R})$, имеющих обобщенную производную

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 13-01-00378, 14-01-31196) и РНФ (проект № 14-21-00066).

первого порядка из $L^1(\mathbb{R})$. Пусть $C_{bu}(\mathbb{G}, X)$ — пространство равномерно непрерывных ограниченных функций, определенных на $\mathbb{G}$, со значениями в X.

Зададим на банаховом пространстве X структуру банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля с помощью сильно непрерывного изометрического представления $T : \mathbb{R} \to EndX$, порождаемого генератором iA, по формуле

$$T(f)x = fx = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)T(-t)xdt.$$

Банахов $L^1(\mathbb{R})$-модуль X со структурой, порождаемой представлением T, будем обозначать (X, T). Оператор A будем также называть генератором $L^1(\mathbb{R})$-модуля (X, T). Потребуем также, чтобы банахов модуль (X, T) был невырожденным, т.е. для всех $f \in L^1(\mathbb{R})$ из равенства $fx = 0$ следовало, что $x = 0$.

В данной работе будут рассмотрены определения и некоторые свойства локального спектра и спектра Карлемана векторов из банахова $L^1(\mathbb{R})$ -модуля, а также будет доказана эквивалентность указанных спектров. Результаты аналогичны приведенным в [2, глава 1.5] и могут иметь применение во многих направлениях исследований по теории операторов, операторным полугруппам и абстрактному гармоническому анализу, в таких, как, например, гармонический анализ периодических и медленно меняющихся на бесконечности функций, развиваемый в статьях [10], [11], [12], [15], [16], [17]. Понятия и перспективные результаты применения спектральной теории банаховых модулей можно также найти в [2], [9], [13], [14].

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ЛОКАЛЬНОГО СПЕКТРА ВЕКТОРА

Определение 1. Будем говорить, что замкнутый оператор $A : D(A) \subset X \to X$ *обладает свойством однозначного распространения,* если для любой голоморфной функции $f : U \subset \mathbb{C} \to D(A)$ из равенства $(A - \lambda I)f(\lambda) = 0$, $\lambda \in U$, следует, что $f \equiv 0$.

Для ограниченных операторов свойство однозначного распространения определено и подробно рассмотрено в [6, гл. XV.2], на основе понятия спектральности оператора выделено достаточное условие для того, чтобы ограниченный оператор обладал свойством однозначного распространения, [6, гл. XV.3, п.2]. Также приведен критерий спектральности для ограниченного оператора в [6, гл. XVI.4, п.4] и пример Какутани неспектрального оператора, не обладающего свойством однозначного распространения, см. [6, гл. XV.2, п.6].

Определение 2. Пусть оператор $A : D(A) \subset X \to X$ обладает свойством однозначного распространения, $x \in X$. Множество точек $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, для которых существует открытая окрестность $U_0 = U(\lambda_0)$ точки λ_0 и голоморфная функция $f : U_0 \to D(A)$ такая, что $f(\lambda) \in D(A)$, и выполнено равенство $(A - \lambda I)f(\lambda) = x$, для всех $\lambda \in U_0$, называется *локальным резольвентным множеством* вектора $x \in X$ и обозначается $\rho_A(x)$.

Определение 3. *Локальный спектр* вектора $x \in X$ относительно оператора A — это множество $\sigma_A(x) = \mathbb{C} \backslash \rho_A(x)$.

Лемма 1. *Справедливы следующие свойства локального спектра $\sigma_A(x)$ вектора $x \in X$:*

1. *$\sigma_A(x)$ — замкнутое подмножество из $\sigma(A)$;*

2. *если $A \in EndX$, то $\sigma_A(x) = \varnothing$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;*

3. *$\sigma_A(\alpha x + \beta y) \subset \sigma_A(x) \cup \sigma_A(y)$ для любых векторов $x, y \in X$ и для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$;*

4. *$\sigma_A(Bx) \subset \sigma_A(x)$ для любого вектора $x \in X$ и любого оператора $B \in EndX$, перестановочного с A (т.е. $BD(A) \subset D(A)$ и $ABx = BAx$ для любого $x \in D(A)$).*

Доказательство. Докажем 1). Множество $\sigma_A(x)$ замкнуто по определению.

Пусть $\lambda_0 \notin \sigma(A)$, тогда для всех $x \in X$ и для всех окрестностей $U(\lambda_0) \subset \rho(A)$ точки λ_0 найдется голоморфная функция $f : U \to \mathbb{C}$, $f(\lambda) = R(\lambda, A)x$. Для такой функции f будет справедливо равенство $(A - \lambda I)f(\lambda) = x$, то есть $\lambda_0 \notin \sigma_A(x)$. Следовательно, $\sigma_A(x) \subset \sigma(A)$.

Докажем 2). Пусть $A \in EndX$. Если $x = 0$, то, согласно свойству однозначного распространения, для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ найдется голоморфная функция $f \equiv 0$, для которой будет выполнено равенство $(A - \lambda I)f(\lambda) = 0 = x$, т.е. $\lambda \in \rho_A(x)$ и $\sigma_A(x) = \varnothing$.

Теперь, если $\sigma_A(x) = \varnothing$, то $\rho_A(x) = \mathbb{C}$. Для каждой $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ в этом случае возможно найти такие окрестность $U(\lambda_0)$ точки λ_0 и такую функцию $f : U(\lambda_0) \to D(A)$, что $(A-\lambda I)f(\lambda) = x$. Найденная функция единственна и голоморфна на $\mathbb{C}$, поскольку на каждом пересечении окрестностей различных точек найденные голоморфные функции будут совпадать в силу свойства однозначного распространения. Поскольку $A \in EndX$, то для всех $|\lambda| > \|A\|$ и для всех $x \in X$ справедливо равенство $(A - \lambda I)(A - \lambda I)^{-1}x = x$. В силу свойства однозначного распространения получаем, что $f(\lambda) = R(\lambda, A)x$ для всех $|\lambda| > \|A\|$, поэтому имеет место равенство $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \|f(\lambda)\| = 0$. По теореме Лиувилля [4, глава III.14] для голоморфной на $\mathbb{C}$ функции f получаем, что $f \equiv 0$. Из этого следует, что $x = 0$.

Докажем 3). Пусть $\lambda_0 \in \mathbb{C}\backslash(\sigma_A(x) \cup \sigma_A(y))$, тогда существует такая окрестность $U(\lambda_0)$ точки λ_0 и найдутся такие функции $f : U(\lambda_0) \to D(A)$ и $g : U(\lambda_0) \to D(A)$, что $(A-\lambda I)f(\lambda) = x$, $(A - \lambda I)g(\lambda) = y$ для всех $\lambda \in U(\lambda_0)$. Тогда для всех $\lambda \in U(\lambda_0)$ справедливо равенство $(A - \lambda I)(\alpha f(\lambda) + \beta g(\lambda)) = \alpha x + \beta y$, то есть $\lambda_0 \in \mathbb{C}\backslash\sigma_A(\alpha x + \beta y)$.

Докажем 4). Пусть $\lambda_0 \in \mathbb{C}\backslash\sigma_A(x)$, тогда найдется некоторая окрестность $U(\lambda_0)$ точки λ_0 и голоморфная функция $f : U(\lambda_0) \to D(A)$ такая, что $(A - \lambda I)f(\lambda) = x$. Применим к обеим частям равенства оператор $B \in EndX$, перестановочный с оператором A в указанном выше смысле. $B(A - \lambda I)f(\lambda) = Bx$. В силу перестановочности оператора B с оператором A для всех $\lambda \in U(\lambda_0)$ получаем $(A - \lambda I)Bf(\lambda) = Bx$. Заметим, что функция $Bf(\lambda)$ голоморфна в окрестности $U(\lambda_0)$, поэтому $\lambda_0 \in \mathbb{C}\backslash\sigma_A(Bx)$. Таким образом доказано, что $\sigma_A(Bx) \subset \sigma_A(x)$.

3. СПЕКТР КАРЛЕМАНА И ЕГО ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

Определим спектр Карлемана функции согласно [1, гл. 4.6, стр. 295] для функции из $C_{bu}(\mathbb{R}, X)$ следующим образом

Определение 4. Пусть $f \in C_{bu}(\mathbb{R}, X)$, функцию $\varphi_f : \mathbb{C}\backslash i\mathbb{R} \to X$ определим формулой

$$\varphi_f(\lambda) = \begin{cases} \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} f(t)dt, & \operatorname{Re}\lambda > 0; \\ -\int\limits_0^\infty e^{\lambda t} f(-t)dt, & \operatorname{Re}\lambda < 0. \end{cases}$$

Функция φ_f голоморфна на $\mathbb{C}\backslash i\mathbb{R}$ и называется *преобразованием Карлемана* функции f. *Спектром Карлемана* функции f называется множество таких вещественных чисел $\lambda \in \mathbb{R}$, для которых не существует голоморфного продолжения функции φ_f в некоторой окрестности точки $i\lambda$.

Определение 5. Спектр Карлемана функции $\tau_x = T(\cdot)x : \mathbb{R} \to X$, будем называть *спектром Карлемана вектора* $x \in (X, T)$ и обозначать символом $\sigma_C(x)$.

В [5, гл. XI.4] свойства спектра Карлемана комплекснозначной функции даны на основе спектрального множества этой функции. Для основного результата данной статьи потребуются некоторые из этих свойств.

Для доказательства свойств будет применена следующая

Теорема 1 ([7], теорема 1.10). *Пусть $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ — сильно непрерывная полугруппа операторов на банаховом пространстве X такая, что для некоторых $\omega \in \mathbb{R}$, $M \geqslant 1$, справедливо равенство $\|T(t)\| \leqslant Me^{\omega t}$, $t \geqslant 0$. Тогда для генератора iA полугруппы $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$, имеющего область определения $D(A)$, выполнены свойства*

1. *если для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$ для всех $x \in X$ существует интеграл*
$$R(\lambda)x = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)xds,$$
тогда $\lambda \in \rho(A)$ и $R(\lambda, iA) = R(\lambda)$;

2. *если $Re\lambda > \omega$, то $\lambda \in \rho(A)$ и справедливо представление резольвенты согласно предыдущему свойству;*

3. *Для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ таких, что $Re\lambda > \omega$, справедливо неравенство*
$$\|R(\lambda, A)\| \leqslant \frac{M}{Re\lambda - \omega}.$$

С учетом интегрального представления резольвенты генератора полугруппы справедлива следующая лемма

Лемма 2. *Преобразование Карлемана функции $T(\cdot)x$ для всех $x \in (X, T)$ из банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля совпадает с резольвентой $R(\lambda, iA)$ генератора iA группы $T : \mathbb{R} \to EndX$, задающей структуру банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля (X, T) при $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$, т.е.*
$$\varphi_{T(\cdot)x}(\lambda) = R(\lambda, iA)x, \quad \operatorname{Re}\lambda \neq 0,\ x \in (X, T).$$

Доказательство. В случае изометрического представления $T : \mathbb{R} \to EndX$, порождающего структуру банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля, для всех таких λ, что $Re\lambda > 0$, будет справедлива формула
$$R(\lambda, iA)x = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)xds$$
для всех $x \in X$. Поскольку изометрическое представление T является сильно непрерывной группой, то, применяя теорему 1 для группы $T_1 : \mathbb{R} \to EndX$, $T_1(s) = T(-s)$ с генератором $-iA$ и некоторого $x \in X$, получим равенство
$$R(\lambda, -iA)x = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}T_1(s)xds = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}T(-s)xds$$
Для резольвенты оператора справедливо равенство
$$R(\lambda, -iA) = (\lambda I + iA)^{-1} = -(-\lambda I - iA)^{-1} = -R(-\lambda, iA).$$
Таким образом, для $\lambda \in \mathbb{C}$, $Re\lambda < 0$, получаем равенство
$$R(\lambda, iA)x = -R(-\lambda, -iA)x = -\int\limits_0^\infty e^{\lambda s}T(-s)xds.$$

Применяя полученные выше формулы интегрального представления резольвенты, получаем равенство
$$\varphi_{T(\cdot)x}(\lambda) = \lambda > 0; \lambda < 0; R(\lambda, iA)x,$$
где $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть A — генератор банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля (X,T) со структурой, порожденной изометрическим представлением T, тогда A обладает свойством однозначного распространения.*

Доказательство. Заметим, что поскольку оператор iA — генератор изометрического представления T, то спектр $\sigma(A)$ лежит на вещественной прямой. Доказательство леммы следует из наблюдения о том, что если $\overline{\rho(A)} = \mathbb{C}$, то оператор A обладает свойством однозначного распространения. Лемма доказана.

Из леммы 3 следует, что лемма 2, с учетом свойства однозначного распространения для генератора A банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля (X,T), может быть усилена следующим образом.

Лемма 4. *При всех $\lambda \in \mathbb{C}\backslash i\sigma_C(x)$ и $x \in (X,T)$ справедливо равенство $\varphi_{T(\cdot)x}(\lambda) = R(\lambda, iA)x$.*

Лемма 5. *Для спектра Карлемана вектора $x \in (X,T)$ из банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля (X,T) с генератором A справедливы следующие свойства*

1. *$\sigma_C(x)$ — замкнутое подмножество из спектра $\sigma(iA)$ генератора A банахова $L^1(\mathbb{R})$ — модуля (X,T);*
2. *если $A \in EndX$, то $\sigma_C(x) = \varnothing$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;*
3. *$\sigma_C(\alpha x + \beta y) \subset \sigma_C(x) \cup \sigma_C(y)$ для любых векторов $x, y \in (X,T)$ и для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$;*
4. *$\sigma_C(Bx) \subset \sigma_C(x)$ для любого вектора $x \in X$ и любого оператора $B \in EndX$, перестановочного с оператором A (т.е. $BD(A) \subset D(A)$ и $ABx = BAx$ для любого $x \in D(A)$).*

Доказательство. Докажем свойство 1). Заметим, что дополнением к спектру Карлемана будут все такие $\lambda \in \mathbb{R}$, что функция $\varphi_{T(\cdot)x}$ имеет аналитическое продолжение в окрестности точки $i\lambda$. Таким образом, каждая точка из дополнения $\mathbb{R}\backslash\sigma_C(x)$ к спектру Карлемана входит в это дополнение вместе с некоторой окрестностью, соответственно, множество $\mathbb{R}\backslash\sigma_C(x)$ открыто, а множество $\sigma_C(x)$ — замкнуто. Вложенность спектра Карлемана вектора $x \in (X,T)$ в спектр генератора iA группы T следует из леммы 2 в силу голоморфности резольвенты $R(\lambda, iA)$ на резольвентном множестве $\rho(iA)$.

Докажем свойство 2). Пусть $x = 0 \in (X,T)$, тогда преобразование Карлемана функции $T(\cdot)x$ тождественно равно нулю и функция $\varphi_{T(\cdot)x}$ всюду для $\operatorname{Re}\lambda = 0$ имеет голоморфное продолжение. Это означает, что спектр Карлемана $\sigma_C(x)$ пуст.

Обратно, если спектр Карлемана пуст, то преобразование Карлемана функции $T(\cdot)x$ имеет голоморфное продолжение при всех $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\lambda = 0$. Согласно лемме 2, резольвента $R(\lambda, iA)x$ оператора iA на векторе x совпадает с преобразованием Карлемана функции $T(\cdot)x$ при $\operatorname{Re}\lambda = 0$. Из ограниченности оператора $A \in EndX$ вытекает, что при $|\lambda| > \|A\|$ для всех $x \in X$ справедливо равенство $(iA - \lambda I)\,R(\lambda, iA)x = x$, а поскольку из леммы 3 следует, что генератор iA представления T обладает свойством однозначного распространения, то для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > A$ и $\operatorname{Re}\lambda = 0$, получаем, что $\varphi_{T(\cdot)x}(\lambda) = R(\lambda, iA)x$. По теореме Лиувилля [4, глава III.14] для голоморфной на $\mathbb{C}$ функции $\varphi_{T(\cdot)x}$ получаем, что $\varphi_{T(\cdot)x} \equiv 0$. Из этого следует, что $R(\lambda, iA)x \equiv 0$, а поскольку при $\lambda \in \rho(iA)$ оператор $R(\lambda, iA)$ непрерывно обратим, то $x = 0$.

Докажем свойство 3). Заметим, что преобразование Карлемана линейно, поэтому справедливо равенство

$$\varphi_{T(\cdot)(\alpha x+\beta y)} = \alpha\varphi_{T(\cdot)(x)} + \beta\varphi_{T(\cdot)(y)}$$

Согласно свойству линейности голоморфных функций, в окрестности любой точки из множества $i\mathbb{R}\backslash(\sigma_C(x) \cup \sigma_C(y))$ функция $\varphi_{T(\cdot)(\alpha x+\beta y)}$ будет иметь голоморфное продолжение, таким образом, $\sigma_C(\alpha x + \beta y) \subset \sigma_C(x) \cup \sigma_C(y)$.

Докажем свойство 4). Покажем, что группа T перестановочна с указанным оператором B. Для этого покажем, что резольвента генератора iA перестановочна с оператором B.

Для всякого $x \in D(A)$ и $\lambda \in \rho(iA)$ будет справедливо равенство $(\lambda I - iA)R(\lambda, iA)x = x$. Применим к обеим частям равенства оператор $R(\lambda, iA)B$. Поскольку $Bx \in D(A)$, равенство $R(\lambda, iA)B(\lambda I - iA)R(\lambda, iA)x = R(\lambda, iA)Bx$ корректно. Поскольку оператор B перестановочен с генератором A, то для всех $x \in D(A)$ и $\lambda \in \rho(iA)$ имеет место равенство $BR(\lambda, iA)x = R(\lambda, iA)Bx$.

Данное равенство, в силу леммы 4, означает, что $\varphi_{T(\cdot)Bx} = B\varphi_{T(\cdot)x}$ на $\mathbb{C}\backslash i\sigma_C(x)$, $x \in D(A)$. Поскольку $B \in EndX$ — ограниченный оператор, то функция $\varphi_{T(\cdot)Bx}$ голоморфна как минимум в тех же точках оси $i\mathbb{R}$, что и функция $\varphi_{T(\cdot)x}$. Таким образом, $\sigma_C(Bx) \subset \sigma_C(x)$.

4. О СОВПАДЕНИИ ЛОКАЛЬНОГО СПЕКТРА И СПЕКТРА КАРЛЕМАНА

Теорема 2. *Для вектора x из банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля (X, T) локальный спектр и спектр Карлемана совпадают*

$$\sigma_{iA}(x) = \sigma_C(x).$$

Доказательство. Согласно лемме 2, если $\lambda_0 \in \mathbb{C}\backslash\sigma_C(x)$, то существует окрестность $U(\lambda_0)$ точки λ_0 такая, что функция $\varphi_{T(\cdot)x}$ голоморфна в этой окрестноти $U(\lambda_0)$ и совпадает с функцией $R : U(\lambda_0) \subset \mathbb{C} \to EndX$, $R(\lambda) = R(\lambda, iA)x$, $\lambda \in U(\lambda_0)$. Следовательно, $\lambda_0 \notin \sigma_{iA}(x)$ для любого вектора $x \in X$ и $\sigma_{iA}(x) \subset \sigma_C(x)$.

Обратно, если $\lambda_0 \in \rho_{iA}(x) = \mathbb{C}\backslash\sigma_{iA}(x)$, то при $\operatorname{Re}\lambda = 0$ по определению $\lambda_0 \notin \sigma_C(x)$. В случае $\operatorname{Re}\lambda = 0$ для точки локального резольвентного множества λ_0 найдется такая окрестность $U(\lambda_0)$ и такая голоморфная функция $f : U(\lambda_0) \to X$, что $(A - \lambda I)f(\lambda) = x$. В указанной окрестности при $\operatorname{Re}\lambda = 0$ справедливо равенство двух голоморфных функций $\varphi_{T(\cdot)x}(-i\lambda) = -f(\lambda)$, $\lambda \in U(\lambda_0)\backslash i\mathbb{R}$. Полагая $\varphi_{T(\cdot)x}(-i\lambda) = -f(\lambda)$ при $\operatorname{Re}\lambda = 0$, получим голоморфное продолжение функции $\varphi_{T(\cdot)x}$ в окрестности точки $U(\lambda_0)$, вследствие чего точка λ_0 не принадлежит спектру Карлемана вектора x. Таким образом, доказано включение $\sigma_C(x) \subset \sigma_{iA}(x)$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems / W. Arendt, C.J.K. Batty, M. Hieber, F. Neubrander. — Berlin: Springer Basel AG, 2011. — 539 с.

2. Баскаков А.Г. Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов / А.Г. Баскаков // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2004. — Т. 9. — С. 3–151.

3. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации / Н.И. Ахиезер. — М.: Наука, 1965. — 408 с.

4. Данфорд Н. Линейные операторы. Общая теория. Т. 1 / Н. Данфорд, Дж. Шварц. — М., 1962. — 896 с.

5. Данфорд Н. Линейные операторы. Спектральная теория. Т. 2 / Н. Данфорд, Дж. Шварц. — М.: Мир, 1966. — 1064 с.

6. Данфорд Н. Линейные операторы. Спектральные операторы. Т. 3 / Н. Данфорд, Дж. Шварц. — М.: Мир, 1974. — 663 с.

7. Engel K.-J. One-parameter semigroups for linear evolution equations / K.-J. Engel, R. Nagel. — New York: Springer-Verlag Inc., 2000. — 586 с.

8. Хилле Э. Функциональный анализ и полугрпуппы / Э. Хилле, Р.С. Филлипс. — М.: Мир, 1962. — 830 с.

9. Баскаков А.Г. Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства / А.Г. Баскаков, И.А. Криштал // Изв. РАН. Серия матем. — 2005. — Т. 69, № 3. — С. 3–54.

10. Калужина Н.С. Медленно меняющие на бесконечности функции, периодические на бесконечности функции и их свойства / Н.С. Калужина // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. — 2010. — № 2. — С. 97–102.

11. Дуплищева А.Ю. О периодических на бесконечности решениях разностных уравнений / А.Ю. Дуплищева // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. — 2012. — № 1. — С. 110–117.

12. Струкова И.И. Теорема Винера для периодических на бесконечности функций / И.И. Струкова // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2012. — Т. 12. — № 4. — С. 34–41.

13. Баскаков А.Г. Теорема Берлинга для функций с существенным спектром из однородных пространств и стабилизация решений параболических уравнений / А.Г. Баскаков, Н.С. Калужина // Матем. заметки. — 2012. — Т. 92. — № 5. — С. 643–661.

14. Баскаков А.Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений / А.Г. Баскаков // УМН. — 2013. — Т. 68. — № 1. — С. 77–128.

15. Струкова И.И. Теорема Винера для периодических на бесконечности функций с рядами Фурье, суммируемыми с весом / И.И. Струкова // Уфимск. матем. журн. — 2013. — Т. 5, № 3. — С. 144–152.

16. Струкова И.И. О гармоническом анализе периодических на бесконечности функций / И.И. Струкова // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2014. — Т. 14. — № 1. — С. 28–38.

17. Струкова И.И. Гармонический анализ периодических векторов и периодических на бесконечности функций / И.И. Струкова // Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ. — 2014. — Т. 14, № 1. — С. 98–111.

REFERENCES

1. Arendt W., Batty C.J.K., Hieber M., Neubrander F. Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems. Berlin: Springer Basel AG., 2011, 539 p.

2. Baskakov A.G. Representation theory for Banach algebras, Abelian groups, and semigroups in the spectral analysis of linear operators. [Baskakov A.G. Teoriya predstavlenij banaxovyx algebr, abelevyx grupp i polugrupp v spektral'nom analize linejnyx operatorov]. *Sovremennaya matematika. Fundamental'nye napravleniya — Modern mathematics. Fundamental directions*, 2004, vol. 9, pp. 3–151.

3. Achiezer N. I. Theory of approximation. [Axiezer N.I. Lekcii po teorii approksimacii]. Moscow: Nauka, 1965, 408 p.

4. Dunford N., Schwartz J.T. Linear Operators, Part I General Theory. [Danford N., Shvarc Dzh. Linejnye operatory. Obshhaya teoriya. T. 1]. Moscow, 1962, 896 p.

5. Dunford N., Schwartz J.T. Linear Operators, Part II Spectral Theory, Self Adjoint Operators in Hilbert Space. [Danford N., Shvarc Dzh. Linejnye operatory. Spektral'naya teoriya. T. 2]. Moscow: Mir, 1966, 1064 p.

6. Dunford N., Schwartz J.T. Linear Operators, Part III Spectral Operators. [Danford N., Shvarc Dzh. Linejnye operatory. Spektral'nye operatory. T. 3]. Moscow: Mir, 1974, 663 p.

7. Engel K.-J., Nagel R. One-parameter semigroups for linear evolution equations. New York: Springer-Verlag Inc., 2000, XXIV, 586 p.

8. Hille E., Phillips R.S. Functional analysis and semigroups. [Xille E'., Fillips R.S. Funkcional'nyj analiz i polugrpuppy]. Moscow: Mir, 1962, 830 p.

9. Baskakov A.G., Krishtal I.A. Harmonic analysis of causal operators and their spectral properties. [Baskakov A.G., Krishtal I.A. Garmonicheskij analiz kauzal'nyx operatorov i ix spektral'nye svojstva]. *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Seriya matematicheskaya — Izvestiya: Mathematics*, 2005, vol. 69, no. 3, pp. 439–486.

10. Kaluzhina N.S. Slowly varying at infinity functions, periodic at infinity functions and their properties. [Kaluzhina N.S. Medlenno menyayushhie na beskonechnosti funkcii, periodicheskie na beskonechnosti funkcii i ix svojstva]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2010, no. 2, pp. 97–102.

11. Duplishcheva A.Yu. About periodic at infinity solutions of difference equations. [Duplishheva A.Yu. O periodicheskix na beskonechnosti resheniyax raznostnyx uravnenij]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 1, pp. 110–117.

12. Strukova I. I. Wiener's theorem for periodic at infinity functions. [Strukova I.I. Teorema Vinera dlya periodicheskix na beskonechnosti funkcij]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika — Proceedings of the University of Saratov. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2012. vol. 12, no. 4, pp. 34–41

13. Baskakov A.G., Kaluzhina N.S. Beurlings theorem for functions with essential spectrum from homogeneous spaces and stabilization of solutions of parabolic equations. [Baskakov A.G., Kaluzhina N.S. Teorema Berlinga dlya funkcij s sushhestvennym spektrom iz odnorodnyx prostranstv i stabilizaciya reshenij parabolicheskix uravnenij]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2012, vol. 92, no. 5, pp. 643–661.

14. Baskakov A.G. Analysis of linear differential equations by methods of the spectral theory of difference operators and linear relations. [Baskakov A.G. Issledovanie linejnyx differencial'nyx uravnenij metodami spektral'noj teorii raznostnyx operatorov i linejnyx otnoshenij]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 2013, vol. 68, no. 1, pp. 77–128.

15. Strukova I. I. Wiener's theorem for periodic at infinity functions with summable weighted Fourier series. [Strukova I.I. Teorema Vinera dlya periodicheskix na beskonechnosti funkcij s ryadami Fur'e, summiruemymi s vesom]. *Ufimskij matematicheskij zhurnal — Ufa Mathematical Journal*, 2013, vol. 5, no. 3, pp. 144–152.

16. Strukova I. I. About harmonic analysis of periodic at infinity functions. [Strukova I.I. O garmonicheskom analize periodicheskix na beskonechnosti funkcij]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika — Proceedings of the University of Saratov. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2014, vol. 14, no. 1, pp. 28–38.

17. Strukova I. I. Harmonic analysis of periodic vectors and periodic at infinity functions. [Strukova I.I. Garmonicheskij analiz periodicheskix vektorov i periodicheskix na beskonechnosti funkcij]. *Vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika, mexanika, informatika — Bulletin of the Novosibirsk State University. Series: Mathematics, Mechanics and Computer Science*, 2014, vol. 14, no. 1, pp. 98–111.

Струков Виктор Евгеньевич, аспирант Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: sv.post.of.chaos@gmail.com
Тел.: 8–980–53–46–485

Strukov Victor E., PhD student, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: sv.post.of.chaos@gmail.com
Tel.: 8–980–53–46–485