УДК 517.9

ВЫРОЖДЕННЫЕ C_0-НЕПРЕРЫВНЫЕ ПОЛУГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ В КВАЗИБАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ*

Г. А. Свиридюк, М. А. Сагадеева, А. С. Рашид

Южно–Уральский государственный университет

Поступила в редакцию 20.07.2014 г.

Аннотация. Уравнения соболевского типа, т.е. неразрешенные относительно старшей производной, впервые появились, по-видимому, в конце позапрошлого века. В силу того, что интерес к уравнениям соболевского типа за последнее время существенно вырос, то возникла необходимость их рассмотрения в квазибанаховых пространствах. А именно, данное исследование нацелено на осмысление неклассических моделей математической физики в квазибанаховых пространствах.

В работе производится перенос результатов теории вырожденных сильно непрерывных полугрупп операторов, полученных ранее в банаховых пространствах, в квазибанаховы пространства. Доказывается аналог прямого утверждения теоремы Хилле–Иосиды–Феллера–Миядеры–Филлипса. В качестве приложения абстрактных результатов рассматривается задача Шоуолтера–Сидорова для линейного уравнения Дзекцера в квазисоболевых пространствах.

Ключевые слова: вырожденные сильно непрерывные полугруппы, квазибанаховы пространства, теорема Хилле–Иосиды–Феллера–Миядеры–Филлипса, уравнение Дзекцера, квазисоболевы пространства.

DEGENERATE C_0-CONTINUOUS SEMIGROUPS OF OPERATORS IN QUASI-BANACH SPACES

G. A. Sviridyuk, M. A. Sagadeeva, A. S. Rashid

Abstract. Probably, Sobolev type equations, i.e. unsolved with respect to the highest derivative, first appeared in the late nineteenth century. Due to the fact that the interest to the Sobolev type equations recently significantly increased, the need arose for their consideration in quasi-Banach spaces. Specifically, this study aimed at understanding non-classical models of mathematical physics in quasi-Banach spaces.

In this paper results of the degenerate strongly continuous semigroups theory, obtained earlier in Banach spaces, are transferred in quasi-Banach spaces. We prove the analogue of direct assertion of the theorem Hille-Yosida–Feller–Miadera–Phillips. As an application of the abstract results, we consider the Showalter–Sidorov problem for linear Dzektser equations in quasi-Sobolev spaces.

Keywords: degenerate strong continuous semigroups, quasi-Banach spaces, Hille–Iosida–Feller–Miadera–Phillips theorem, Dzektser equation, quasi-Sobolev spaces.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathcal{V}$ — банахово пространство, $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ — пространство линейных ограниченных операторов. Отображение $V^\bullet \in C(\mathbb{R};\mathcal{L}(\mathcal{V}))$ называется полугруппой операторов, если при всех $s,t \in \mathbb{R}_+$

$$V^s V^t = V^{s+t}. \tag{1}$$

* Семидесятипятилетнему юбилею В.А. Костина посвящается

Обычно полугруппа операторов отождествляется с ее графиком $\{V^t: \ t \in \mathbb{R}_+\}$. Говорят, что полугруппа $\{V^t: \ t \in \mathbb{R}_+\}$ принадлежит классу C_0 (является *C_0-полугруппой*), если она сильно непрерывна при $t > 0$ и существует $\lim\limits_{t\to 0+} V^t v = v$ при любом $v \in \mathcal{V}$. Такие конструкции возникают как разрешающие полугруппы уравнения

$$\dot{v} = Av \tag{2}$$

на банаховом пространстве $\mathcal{V}$ с линейным замкнутым плотно определенным оператором $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{V})$.

Классическим результатом о разрешимости уравнения (2) является теорема Хилле–Иосиды–Феллера–Миядеры–Филлипса (теорема ХИФМФ) [1], устанавливающая биекцию между множеством разрешающих полугрупп операторов и множеством операторов, называемых генераторами этих полугрупп. Условием того, что оператор A является генератором разрешающей полугруппы (1) являются некоторые требования к резольвентному множеству $\rho(A)$ и резольвенте $R_\mu(A)$ оператора A. Эти требования в [2] было предложено называть *радиальностью* оператора A. Позже теория C_0-полугрупп была распространена на пространства Фреше [3], гл. 9.

Особо хочется отметить распространение теории C_0-полугрупп на пространства Степанова [4,5], которые позволяют рассматривать более широкое множество операторов в уравнениях вида (2). В настоящее время в г. Воронеже усилиями В.А. Костина создана математическая школа, представители которой изучают пространства Степанова и C_0-полугруппы с особенностями в различных аспектах. Пользуясь случаем, авторы поздравляют В.А. Костина с семидесятипятилетием и желают многих лет здоровой жизни и плодотворной научной деятельности этому талантливому математику, блестящему организатору и замечательному человеку!

Полугруппа $\{V^t: \ t \in \mathbb{R}\}$ называется *вырожденной*, если ее единица $P = \text{s-}\lim\limits_{t\to 0+} V^t$ является проектором в $\mathcal{V}$. Впервые вырожденные C_0-полугруппы операторов появились в [6] как разрешающие полугруппы линейных эволюционных уравнений соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu, \tag{3}$$

где оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (т.е. линеен и ограничен), а оператор $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (т.е. линеен, замкнут и плотно определен), $\mathfrak{U},\mathfrak{F}$ — банаховы пространства. В [7], гл. 2 изложена полная теория таких полугрупп, в [8] эта теория распространена на пространства Фреше.

Уравнения вида (3) впервые появились в работах А. Пуанкаре в конце позапрошлого века, однако систематическое их изучение началось во второй половине прошлого века с работ С.Л. Соболева (см. в [9] прекрасный исторический обзор). Поскольку интерес к уравнениям соболевского типа за последнее время существенно вырос (см. например, монографии [10–13]), то возникла необходимость их рассмотрения в квазибанаховых пространствах. Причем необходимость диктуется не столько желанием пополнить теорию, сколько стремлением осмыслить неклассические модели математической физики [14] в квазибанаховых пространствах [15]. Заметим еще, что уравнения соболевского типа (2) называются *динамическими*, если их решения продолжимы на всю ось $\mathbb{R}$, и *эволюционными*, если их решения существуют только на полуоси $\mathbb{R}_+$ [16].

Статья кроме введения и списка литературы содержит три параграфа. В первом, имеющем вспомогательное значение, рассматриваются квазибанаховы пространства и определенные на них линейные ограниченные и замкнутые операторы. Также вводятся в рассмотрение квазисоболевы пространства, в которых строятся степени квазиоператора Лапласа. Во втором параграфе показано, при каких условиях на операторы L и M возникают сильно непрерывные вырожденные полугруппы операторов в квазибанаховых пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$. Другими словами, доказывается прямое утверждение обобщения теоремы ХИФМФ на квазибанаховы пространства. В последнем параграфе рассматриваются эволюционные уравнения соболевского типа с относительно радиальным оператором в квазибанаховых пространствах и в качестве примера приводится «квазибанахов» аналог однородной задачи Дирихле в ограниченной области с гладкой границей для линейного уравнения Дзекцера (см. например, [6],[7],[13])

$$(\lambda - \Delta)u_t = \beta\Delta u - \alpha\Delta^2 u + f$$

с начальным условием Шоуолтера–Сидорова [17]. Список литературы не претендует на полноту, а отражает лишь вкусы и пристрастия авторов.

ЛИНЕЙНЫЕ ЗАМКНУТЫЕ ОПЕРАТОРЫ В КВАЗИБАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Квазибанаховы пространства — это метризуемые полные квазинормированные пространства. Хорошо известным примером квазибанаховых пространств служат пространства последовательностей ℓ_q, $q \in (0,1)$ (при $q \in [1,+\infty)$ пространства ℓ_q — банаховы). Пусть здесь и далее $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$ — монотонная последовательность такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$.

Квазисоболевым называется квазибанахово пространство

$$\ell_q^m = \left\{ u = \{u_k\} : \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^{\frac{m}{2}} |u_k| \right)^q < +\infty \right\}$$

с квазинормой ${}_q^m\|u\| = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^{\frac{m}{2}} |u_k| \right)^q \right)^{1/q}$, $m \in \mathbb{R}$. Очевидно, что при $q \in [1,+\infty)$ пространства ℓ_q^m — банаховы; $\ell_q^0 = \ell_q$, а также имеют место плотные и непрерывные вложения $\ell_q^n \hookrightarrow \ell_q^m$ при $n \geqslant m$ и $q \in \mathbb{R}_+$.

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — квазибанаховы пространства, линейный оператор $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ называется *непрерывным*, если $\lim\limits_{k\to\infty} Lu_k = L\left(\lim\limits_{k\to\infty} u_k\right)$ для любой последовательности $\{u_k\} \subset \mathfrak{U}$, сходящейся в $\mathfrak{U}$. Нетрудно показать, что линейный оператор $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ непрерывен точно тогда, когда он ограничен (т.е. отображает ограниченные множества в ограниченные). Линеал $\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ линейных ограниченных операторов — квазибанахово пространство с квазинормой ${}_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})}\|L\| = \sup\limits_{{}_{\mathfrak{U}}\|u\|=1} {}_{\mathfrak{F}}\|Lu\|$, где ${}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\|$ (${}_{\mathfrak{F}}\|\cdot\|$) — квазинорма в $\mathfrak{U}$ ($\mathfrak{F}$). Последовательность $\{L_k\} \subset \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ называется *сильно сходящейся* к оператору $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, если для любого $u \in \mathfrak{U}$ выполнено ${}_{\mathfrak{F}}\|L_k u - Lu\| \to 0$, $k \to \infty$; и *равномерно сходящейся*, если ${}_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})}\|L_k - L\| \to 0$, $k \to \infty$.

Теорема 1 (аналог теоремы Банаха–Штейнгауза). *Последовательность* $\{L_k\} \subset \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ *равномерно сходится к оператору* $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ *на некотором линеале* $\overset{\circ}{\mathfrak{U}}$ *плотном в* $\mathfrak{U}$ *точно тогда, когда*

(i) *последовательность* $\{L_k\}$ *ограничена;*

(ii) *последовательность* $\{L_k\}$ *сильно сходится к* L *на* $\overset{\circ}{\mathfrak{U}}$.

Линейный оператор $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ называется *замкнутым*, если его график $graph\, L = \{(u,f) \in \mathfrak{U} \times \mathfrak{F} : f = Lu\}$ замкнут по квазинорме ${}_{graph L}\|u\| = {}_{\mathfrak{U}}\|u\| + {}_{\mathfrak{F}}\|Lu\|$.

Теорема 2. *Если оператор* $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, *то* L *— замкнутый оператор.*

Теорема 3. *Пусть линейный оператор* $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ *замкнут и область определения* $\mathrm{dom} L = \mathfrak{U}$. *Тогда* $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$.

Теорема 4. *Пусть оператор* $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ *замкнут, и существует оператор* $L^{-1} : \mathfrak{F} \to \mathfrak{U}$. *Тогда* L^{-1} *— замкнутый оператор.*

Линейный оператор $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ называется *плотно определенным*, если замыкание линеала $\overline{\mathrm{dom}L} = \mathfrak{U}$. Линеал замкнутых плотно определенных операторов обозначим символом $\mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$.

Пример 1. Пусть $\mathfrak{U} = \ell_q^{m+2}$, $\mathfrak{F} = \ell_q^m$; рассмотрим оператор $\Lambda^n u = \{\lambda_k^n u_k\}$, $n \in \mathbb{N}$, где $\{u_k\} \subset \mathfrak{U}$, а монотонная последовательность $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$ такова, что $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$. Как нетрудно видеть, оператор $\Lambda^n \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, $\mathrm{dom}\Lambda^n = \ell_q^{m+2n}$, причем $\Lambda^n : \ell_q^{m+2n} \to \ell_q^m$ — топлинейный изоморфизм.

Теорема 5. *Пусть оператор $\widetilde{L} : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ плотно определен, и его квазинорма*

$$\|\widetilde{L}\| = \sup_{u\in\mathrm{dom}M\setminus\{0\}} \frac{{}_{\mathfrak{F}}\|\widetilde{L}u\|}{{}_{\mathfrak{U}}\|u\|} < +\infty.$$

Тогда он единственным образом продолжим до оператора $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, причем ${}_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})}\|L\| = \|\widetilde{L}\|$.

Доказательства теорем 1 – 5 аналогичны доказательствам соответствующих теорем в «банаховом» случае, и поэтому они опускаются.

ВЫРОЖДЕННЫЕ C_0-ПОЛУГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — квазибанаховы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ и $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, следуя [2], [6], [7], введем в рассмотрение *L-резольвентное множество* $\rho^L(M) = \{\mu\in\mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})\}$ и *L-спектр* $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ оператора M. Как нетрудно видеть, множество $\rho^L(M)$ всегда открыто, поэтому L-спектр оператора M всегда замкнут.

Пример 2. Пусть $\mathfrak{U} = \ell_q^{m+2}$, $\mathfrak{F} = \ell_q^m$, $m \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}_+$. Построим операторы $L = \lambda - \Lambda$, $M = \alpha\Lambda^2 + \beta\Lambda$, где операторы Λ и Λ^2 построены в примере 1. Нетрудно показать, что L-спектр $\sigma^L(M)$ оператора M состоит из точек $\mu_k = (\alpha\lambda_k^2 + \beta\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)^{-1}$, $k \in \mathbb{N}$ с учетом их кратности.

Определение 1. Оператор M называется *p-радиальным относительно* оператора L (или, коротко, *(L,p)-радиальным*), если

(i) $\exists a\in\mathbb{R}\ \forall\mu > a\ \mu\in\rho^L(M)$;

(ii) $\exists K > 0\ \forall\mu_k > a,\ k = \overline{0,p},\ \forall n\in\mathbb{N}$

$$\max\{\|(R^L_{(\mu,p)}(M))^n\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}, \|(L^L_{(\mu,p)}(M))^n\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\} \leqslant \frac{K}{\prod\limits_{k=0}^{p}(\mu_k - a)^n}.$$

Здесь $R^L_{(\mu,p)}(M) = \prod\limits_{k=0}^{p} R^L_{\mu_k}(M)$ — правая и $L^L_{(\mu,p)}(M) = \prod\limits_{k=0}^{p} L^L_{\mu_k}(M)$ — левая (L,p)-резольвенты оператора M, а в свою очередь, $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L$ и $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ — правая и левая L-резольвенты оператора M.

Пример 3. Пусть пространства $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{F}$ и операторы L, M такие, как в примере 2. Покажем, что при любых $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ и $\alpha \in \mathbb{R}_+$ оператор M $(L,0)$-радиален. Действительно, при всех $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_k \neq \lambda$ точки $\sigma^L(M)$ лежат во множестве $\mathbb{R}$, причем $\lim\limits_{k\to\infty} \mu_k = -\infty$, что гарантирует выполнение условия (i) из определения 1. Далее

$$R^L_\mu(M) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty}(\mu - \mu_k)^{-1}e_k, & \text{если } \lambda_k \neq \lambda \text{ при всех } k \in \mathbb{N}; \\ \sum\limits_{k\in\mathbb{N}:k\neq\ell}(\mu - \mu_k)^{-1}e_k, & \text{если существуют } \ell \in \mathbb{N} : \lambda_\ell = \lambda. \end{cases}$$

Здесь $e_k = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$, единица на k-том месте. Если взять $a > \max\{\mu_k\}$, то выполнение (ii) определения 1 очевидно. Для левой L-резольвенты $L^L_\mu(M)$ оператора M это условие проверяется аналогично.

Пусть $\mathcal{V}$ — квазибанахово пространство, $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ — пространство линейных ограниченных операторов. Отображение $V^\bullet \in C^\infty(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathcal{V}))$ называется *полугруппой операторов*, если

$$V^s V^t = V^{s+t} \text{ при всех } s, t \in \mathbb{R}_+.$$

Как и выше отождествим полугруппу с ее графиком $\{V^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ и назовем *сильно непрерывной* (или C_0*-полугруппой*), она сильно непрерывна при $t > 0$ и существует $\lim\limits_{t \to 0+} V^t v = v$ при любом $v \in \mathcal{V}$.

Обозначим через $\mathfrak{U}^0$ ($\mathfrak{F}^0$) ядро $\ker R^L_{(\mu,p)}(M)$ ($\ker L^L_{(\mu,p)}(M)$), которое, понятно, является линейным подпространством. Через $\mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}^1)$ обозначим замыкание линеала $\mathrm{im} R^L_{(\mu,p)}(M)$ ($\mathrm{im} L^L_{(\mu,p)}(M)$), через $\widetilde{\mathfrak{U}}$ ($\widetilde{\mathfrak{F}}$) – замыкание линеала $\mathfrak{U}^0 \dot{+} \mathrm{im} R^L_{(\mu,p)}(M)$ ($\mathfrak{F}^0 \dot{+} \mathrm{im} L^L_{(\mu,p)}(M)$) в норме пространства $\mathfrak{U}$ ($\mathfrak{F}$).

Теорема 6. *Пусть оператор M (L,p)-радиален, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда пара операторов L и M порождают полугруппу операторов класса C_0, определенную на подпространстве $\widetilde{\mathfrak{U}}$ ($\widetilde{\mathfrak{F}}$).*

Замечание 1. Вид операторов полугруппы может быть получен с помощью аппроксимации Хилле–Уиддера–Поста [18]

$$\begin{aligned} U^t &= s\text{-}\lim_{k \to \infty} \left(L - \frac{t}{k} M\right)^{-1} L^{\;\;k} = s\text{-}\lim_{k \to \infty} \left(\frac{k}{t} R^L_{\frac{k}{t}}(M)\right)^k, \\ F^t &= s\text{-}\lim_{k \to \infty} L \left(L - \frac{t}{k} M\right)^{-1 \;\; k} = s\text{-}\lim_{k \to \infty} \left(\frac{k}{t} L^L_{\frac{k}{t}}(M)\right)^k. \end{aligned} \tag{4}$$

Доказательство данной теоремы весьма громоздко и проводится аналогично «банахову» случаю (см. напр., [6], [7, гл. 3], [18]) и поэтому не приводится.

Пример 4. Пусть пространства $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{F}$ и операторы L, M такие, как в примере 2. Тогда из примера 3 в силу теоремы 6 имеет место

$$U^t = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{\mu_k t} e_k, & \text{если } \lambda_k = \lambda \text{ при всех } k \in \mathbb{N}; \\ \sum\limits_{k \in \mathbb{N}: k = \ell} e^{\mu_k t} e_k, & \text{если существуют } \ell \in \mathbb{N} : \lambda_\ell = \lambda. \end{cases}$$

Сильно непрерывная полугруппа $\{F^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ строится аналогично.

Далее, сильно непрерывную полугруппу $\{V^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ назовем *вырожденной*, если ее единица $V^0 = \text{s-}\lim\limits_{t \to 0+} V^t$ является проектором в пространстве $\mathcal{V}$.

Определение 2. Оператор M называется *сильно (L,p)-радиальным справа* (*слева*), если он (L,p)-радиален и

$$\|R^L_{(\mu,p)}(M)(\lambda L - M)^{-1} M u\|_{\mathfrak{U}} \quad \frac{\mathrm{const}(u)}{(\lambda - a) \prod\limits_{k=0}^{p} (\mu_k - a)} \qquad \forall u \in \mathrm{dom} M$$

(существует плотный в $\mathfrak{F}$ линеал $\overset{\circ}{\mathfrak{F}}$ такой, что

$$\|M(\lambda L - M)^{-1} L^L_{(\mu,p)}(M) f\|_{\mathfrak{F}} \quad \frac{\mathrm{const}(f)}{(\lambda - a) \prod\limits_{k=0}^{p} (\mu_k - a)} \qquad \forall f \in \overset{\circ}{\mathfrak{F}}\Bigg)$$

при любых $\lambda, \mu_0, \mu_1, ..., \mu_p > a$.

Теорема 7. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален справа (слева), $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда сильно непрерывная полугруппа $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ ($\{F^t : t \in \mathbb{R}_+\}$) вырождена.*

Доказательство аналогично «банахову» случаю и очень трудоемко (см. напр., [7, гл. 2]). Поэтому приведем только его схему. Сначала основываясь на (L,p)-радиальности оператора M показывается, что ядро $\ker R^L_{(\mu,p)}(M) = \mathfrak{U}^0$ и замыкание образа $\overline{\mathrm{im} R^L_{(\mu,p)}(M)} = \mathfrak{U}^1$ не зависят от $\mu = (\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_p)$, $\mu_k \in \rho^L(M)$. Затем доказывается, что $\mathfrak{U}^0 = \ker U^t$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $u = \lim\limits_{t \to 0+} U^t u$ при всех $u \in \mathfrak{U}^1$. Таким образом, при условии сильной (L,p)-радиальности оператора M справа получено существование проектора $P = \text{s-}\lim\limits_{t \to 0+} U^t$. Отметим еще, что здесь и на предыдущем этапе главную роль играет теорема 1. (Существование проектора $Q = \text{s-}\lim\limits_{t \to 0+} F^t$ доказывается аналогично).

Главным следствием сильной (L,p)-радиальности оператора M справа (слева) является расщепление пространства

$$\mathfrak{U} = \widetilde{\mathfrak{U}} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1 \quad (\mathfrak{F} = \widetilde{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1), \tag{5}$$

где $\mathfrak{U}^0(\mathfrak{F}^0)$ — ядро проектора $P = \text{s-}\lim\limits_{t \to 0+} U^t$ ($Q = \text{s-}\lim\limits_{t \to 0+} F^t$), а $\mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}^1)$ — его образ. Обозначим через L_k (M_k) сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^k$ ($\mathrm{dom} M \cap \mathfrak{U}^k$), $k = 0, 1$.

Следствие 1. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален справа и слева, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда операторы $L_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k; \mathfrak{F}^k)$, $M_k \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{U}^k; \mathfrak{F}^k)$, $k = 0, 1$, причем существует оператор $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0; \mathfrak{U}^0)$.*

Положим $H = M_0^{-1} L_0$ ($G = L_0 M_0^{-1}$), очевидно, $H \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$ ($G \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0)$).

Следствие 2. *В условиях следствия 1 оператор H (G) нильпотентен степени не выше p.*

Определение 3. Оператор M называется *сильно (L,p)-радиальным*, если он сильно (L,p)-радиален слева и

$$\|R^L_{(\mu,p)}(M)(\lambda L - M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})} \qquad \frac{K}{(\lambda - a)\prod\limits_{k=0}^{p}(\mu_k - a)}$$

при любых $\lambda, \mu_0, \ldots, \mu_p > a$.

Заметим, что сильно (L,p)-радиальный оператор M, очевидно, сильно (L,p)-радиален справа.

Теорема 8. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда существует оператор $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1)$.*

Доказательство аналогично «банахову» случаю (см. напр., [7], гл. 2) и потому опускается.

Построим операторы $S = L_1^{-1} M_1 : \mathrm{dom} M \cap \mathfrak{U}^1 \to \mathfrak{U}^1$ и $T = M_1 L_1^{-1} : M[\mathrm{dom} M] \cap \mathfrak{F}^1 \to \mathfrak{F}^1$. Нетрудно показать, что $S \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{U}^1)$, а $T \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{F}^1)$.

Следствие 3. *В условиях теоремы 8 операторы S и T — радиальны.*

Замечание 2. Подчеркнем, что из сильной (L,p)-радиальности оператора M следует

– существование вырожденных C_0-полугрупп $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ и $\{F^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ из (4);

– существование их единиц — проекторов $P \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ и $Q \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$, благодаря которым квазибанаховы пространства $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ расщепляются в прямые суммы (5);

– расщепление действий операторов $L_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k; \mathfrak{F}^k)$, $M_k \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{U}^k; \mathfrak{F}^k)$, $k = 0, 1$, и существование операторов $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0; \mathfrak{U}^0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1)$;

– нильпотентность операторов H, G и радиальность операторов S, T.

Именно эти утверждения мы называем *обобщением прямой теоремы ХИФМФ* на квазибанаховы пространства.

ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА В КВАЗИБАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — квазибанаховы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ и $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Рассмотрим линейное эволюционное уравнение соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu. \tag{6}$$

Вектор-функцию $u \in C^{\infty}(\mathbb{R}_+;\mathfrak{U})$, удовлетворяющую (6) поточечно, назовем (*классическим*) *решением* этого уравнения. Решение $u = u(t)$ уравнения (6) назовем *решением ослабленной задачи Коши* (по С.Г. Крейну), если вдобавок для некоторого $u_0 \in \mathfrak{U}$ выполнено

$$\lim_{t\to 0+} u(t) = u_0. \tag{7}$$

Определение 4. Множество $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{U}$ называется *фазовым пространством* уравнения (6), если

(i) любое решение $u = u(t)$ уравнения (6) лежит в $\mathfrak{P}$ поточечно, т.е. $u(t) \in \mathfrak{P}$ при любом $t \in \mathbb{R}_+$;

(ii) при любом $u_0 \in \mathfrak{P}$ существует единственное решение задачи (6), (7).

Теорема 9. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда фазовым пространством уравнения* (6) *служит подпространство* $\mathfrak{U}^1$.

Доказательство. Во-первых, уравнение (6) ввиду замечания 1 редуцируется к эквивалентной системе

$$H\dot{u}^0 = u^0,\ \dot{u}^1 = Su^1, \quad u^1 = Pu,\ u^0 = u - u^1. \tag{8}$$

Дифференцируя первое уравнение по t и умножая последовательно на H слева, получаем

$$0 = H^{p+1}(u^0)^{(p+1)} = H^p(u^0)^{(p)} = \ldots = H\dot{u}^0 = u^0.$$

Во-вторых, для второго уравнения (8) при любом $u_0^1 \in \mathfrak{U}^1$ существует единственное решение $u^1(t) = V^t u_0^1$ задачи $\lim\limits_{t\to 0+} u^1(t) = u_0^1$, где V^t — полугруппа вида

$$V^t = s\text{-}\lim_{k\to\infty} \left(\left(\mathbb{I} - \frac{t}{k}S\right)^{-1}\right)^k = s\text{-}\lim_{k\to\infty} \left(\frac{k}{t}R_{\frac{k}{t}}(S)\right)^k, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Пример 5. Пусть пространства $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{F}$ и операторы L, M такие, как в примере 2. Тогда при любых $m, \lambda, \beta \in \mathbb{R}$ и $q, \alpha \in \mathbb{R}_+$ фазовым пространством уравнения (6) будет подпространство

$$\mathfrak{U}^1 = \begin{cases} \mathfrak{U}, \text{ если } \lambda_k = \lambda \text{ при всех } k \in \mathbb{N}; \\ \{u \in \mathfrak{U} : u_k = 0, \lambda_k = \lambda\}. \end{cases}$$

Пусть как и выше $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — квазибанаховы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ и $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, причем оператор M сильно (L,p)-радиален, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Рассмотрим *ослабленную* (в смысле С.Г. Крейна) *задачу Шоуолтера–Сидорова*

$$\lim_{t\to 0+} P(u(t) - u_0) = 0 \tag{9}$$

для линейного неоднородного эволюционного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + f, \tag{10}$$

где вектор-функция $f:[0,\tau]\to\mathfrak{U}$, $f=f^0+f^1$, $f^1=Qf$, $f^0=f-f^1$, будет определена ниже, $\tau\in\mathbb{R}_+$.

Теорема 10. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, $p\in\{0\}\cup\mathbb{N}$. Тогда для любой вектор-функции $f=f(t)$ такой, что $f^0\in C^{p+1}((0,\tau);\mathfrak{F}^0)$ и $f^1\in C((0,\tau);\mathfrak{F}^1)$, и любого вектора $u_0\in\mathfrak{U}$ существует единственное решение $u\in C^1((0,\tau);\mathfrak{U})$ задачи* (9) *для уравнения* (10)*, которое к тому же имеет вид*

$$u(t)=-\sum_{k=0}^{p}H^kM_0^{-1}f^{0(k)}(t)+U^tu_0+\int\limits_0^{\tau}U^{t-s}L_1^{-1}f^1(s)\,ds.$$

Действительно факт, что $u=u(t)$ удовлетворяет уравнению (10) и условию (9), устанавливается непосредственной проверкой. Единственность вытекает из теоремы 9.

Пример 6. В качестве иллюстрации рассмотрим уравнение Дзекцера [7],[13]

$$(\lambda-\Lambda)u_t=(\alpha\Lambda^2+\beta\Lambda)u+f,\quad \lambda,\beta\in\mathbb{R},\ \alpha\in\mathbb{R}_+,\tag{11}$$

в квазисоболевых пространствах $\mathfrak{U}=\ell_q^{m+2}$ и $\mathfrak{F}=\ell_q^m$, $m\in\mathbb{R}$, $q\in\mathbb{R}_+$. Зададим область определения $\mathrm{dom}(\alpha\Lambda^2+\beta\Lambda)=\ell_q^{m+4}$. Взяв операторы L и M как в примере 2, получим редукцию уравнения (11) к виду (10). В примере 3 показано, что оператор M $(L,0)$-радиален. Выполнение оценок определения 2 очевидно.

Для того, чтобы поставить задачу Шоуолтера–Сидорова построим проектор P, для этого рассмотрим вырожденную C_0-полугруппу, построенную в примере 4. Получим

$$P=\text{s-}\lim_{t\to0+}U^t=\begin{cases}\mathbb{I}, & \text{если } \lambda_k=\lambda \text{ при всех } k\in\mathbb{N};\\ \mathbb{I}-\sum\limits_{k\in\mathbb{N}:k=\ell}e_k, & \text{если существуют } \ell\in\mathbb{N}:\lambda_\ell=\lambda.\end{cases}$$

Проектор $Q=\text{s-}\lim\limits_{t\to0+}F^t$ получается аналогично.

Нетрудно также построить оператор

$$L_1^{-1}=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\lambda-\lambda_k)^{-1}e_k, & \text{если } \lambda_k=\lambda \text{ при всех } k\in\mathbb{N};\\ \sum\limits_{k\in\mathbb{N}:k=\ell}(\lambda-\lambda_k)^{-1}e_k, & \text{если существуют } \ell\in\mathbb{N}:\lambda_\ell=\lambda.\end{cases}$$

В силу теоремы 10 для задачи Шоуолтера–Сидорова (9),(11) имеет место

Следствие 4. *При любых $m,\lambda,\beta\in\mathbb{R}$, $\tau,q,\alpha\in\mathbb{R}_+$, $u_0\in\mathfrak{U}$, $f^0\in C^1((0,\tau);\mathfrak{F}^0)$ и $f^1\in C((0,\tau);\mathfrak{F}^1)$ существует единственное решение $u\in C^1((0,\tau);\mathfrak{U})$ задачи* (9), (11), *которое к тому же имеет вид*

$$u(t)=-M_0^{-1}f^0(t)+U^tu_0+\int\limits_0^{\tau}U^{t-s}L_1^{-1}f^1(s)\,ds.$$

Здесь

$$\mathfrak{F}^0=\begin{cases}\{0\}, \text{ если } \lambda_k=\lambda \text{ при всех } k\in\mathbb{N};\\ \{f\in\mathfrak{F}:f_k=0,\ k\in\mathbb{N}\setminus\{\ell:\lambda_\ell=\lambda\}\};\end{cases}$$

$$\mathfrak{F}^1=\begin{cases}\mathfrak{F}, \text{ если } \lambda_k=\lambda \text{ при всех } k\in\mathbb{N};\\ \{f\in\mathfrak{F}:f_k=0,\lambda_k=\lambda\};\end{cases}$$

$$M_0^{-1} = \begin{cases} \mathbb{O}, \text{ если } \lambda_k = \lambda \text{ при всех } k \in \mathbb{N}; \\ \sum\limits_{k \in \mathbb{N}: \lambda_k = \lambda} (\alpha\lambda_k^2 + \beta\lambda_k)^{-1} e_k. \end{cases}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хилле Э. Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле, Р. Филлипс. — М.: ИЛ, 1962. — 830 с.

2. Свиридюк Г.А. Полугруппы операторов с ядрами / Г.А. Свиридюк, В.Е. Федоров // Вестник Челябинского государственного университета. — 2002. — Т. 3, № 1. — С. 42–70.

3. Иосида К. Функциональный анализ / К. Иосида. — М.: Мир, 1967. — 624 с.

4. Костин В.А. Эволюционные уравнения с особенностями в обобщенных пространствах Степанова / В.А. Костин, С.В. Писарева // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2007. — № 6. — С. 35–44.

5. Костин А.В. К теории функциональных пространств Степанова / А.В. Костин, В.А. Костин. — Воронеж: Изд.-полигр. центр ВГУ, 2007. — 259 с.

6. Свиридюк Г.А. Линейные уравнения типа Соболева и сильно непрерывные полугруппы разрешающих операторов с ядрами / Г.А. Свиридюк // Доклады Академии наук. — 1994. — Т. 337, № 5. — С. 581–584.

7. Sviridyuk G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. — Utrecht, Boston: VSP, 2003. — 216 p.

8. Федоров В.Е. Сильно непрерывные полугруппы уравнений соболевского типа в локально выпуклых пространствах / В.Е. Федоров // Неклассические уравнения математической физики. — 2000. — С. 32–40.

9. Demidenko G.V. Partial Differential Equations and Systems not Solvable with Respect to the Highest–order Derivative / G.V. Demidenko, S.V. Uspenskii. — New York – Basel – Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 2003. — 239 p.

10. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 736 с.

11. Замышляева А.А. Линейные уравнения соболевского типа высокого порядка / А.А. Замышляева. — Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2012. — 116 с.

12. Манакова Н.А. Задачи оптимального управления для полулинейных уравнений соболевского типа / Н.А. Манакова. — Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2012. — 84 с.

13. Сагадеева М.А. Дихотомии решений линейных уравнений соболевского типа / М.А. Сагадеева. — Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2012. — 139 с.

14. Свиридюк Г.А. Неклассические модели математической физики / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. — 2012. — № 40 (299). — С. 7–18.

15. Аль-Делфи Дж.К. Квазисоболевы пространства ℓ_p^m / Дж.К. Аль-Делфи // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика, механика, физика. — 2013. — Т. 5, № 1. — С. 107–109.

16. Свиридюк Г.А. Многообразия решений одного класса эволюционных и динамических уравнений / Г.А. Свиридюк // Доклады Академии наук. — 1989. — Т. 304, № 2. — С. 301–304.

17. Свиридюк Г.А. Задача Шоуолтера – Сидорова как феномен уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. — 2010. — Т. 3, № 1. — С. 104–125.

18. Сагадеева М.А. Аппроксимации C_0-полугрупп / М.А. Сагадеева, А.Н. Шулепов // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. — 2013. — Т. 6, № 2. — С. 133–137.

REFERENCES

1. Hille E., Phillips R.S. Functional analysis and Semi-Groups. [Xille E., Fillips R. Funkcional'nyj analiz i polugruppy]. Moscow, 1962, 830 p.

2. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Semigroups of Operators with Kernels. [Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Polugruppy operatorov s yadrami]. *Vestnik Chelyabinskogo gosudarstvennogo universiteta — Bulletin of Chelyabinsk State University*, 2002, vol. 3, no. 1, pp. 42–70.

3. Yosida K. Functional analysis. [Iosida K. Funkcional'nyj analiz]. Moscow: Mir, 1967, 624 p.

4. Kostin V.A., Pisareva S.V. Evolutional Equations with Singularities in Generalized Stepanov Spaces. [Kostin V.A., Pisareva S.V. E'volyucionnye uravneniya s osobennostyami v obobshhennyx prostranstvax Stepanova]. *Izvestiya vysshix uchebnyx zavedenij. Matematika — Russian Mathematics*, 2007, no. 6, pp. 35–44.

5. Kostin A.V., Kostin V.A. On Theory of Stepanov Functional Spaces. [Kostin A.V., Kostin V.A. K teorii funkcional'nyx prostranstv Stepanova]. Voronezh: Publish-poligraphic center of VGU, 2007, 259 p.

6. Sviridyuk G.A. Linear Equations of Sobolev type and Strong Continiously Semigroup of Resolving Operator with Kernel. [Sviridyuk G.A. Linejnye uravneniya tipa Soboleva i sil'no nepreryvnye polugruppy razreshayushhix operatorov s yadrami]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 1994, vol. 337, no. 5, pp. 581–584.

7. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators Utrecht, Boston: VSP, 2003. 216 p.

8. Fedorov V.E. Strong Continuous Semigroups of Sobolev Type Equations in Locally Convex Spaces. [Fedorov V.E. Sil'no nepreryvnye polugruppy uravnenij sobolevskogo tipa v lokal'no vypuklyx prostranstvax]. *Neklassicheskie uravneniya matematicheskoj fiziki — Nonclassical Equation of Mathematical Physics*, 2000, pp. 32–40.

9. Demidenko G.V., Uspenskii S.V. Partial Differential Equations and Systems not Solvable with Respect to the Highest–order Derivative. New York–Basel–Hong Kong, Marcel Dekker Inc., 2003. 239 p.

10. Sveshnikov A.G., Al'shin A.B., Korpusov M.O., Pletner Yu.D. Linear and Nonlinear Equation of Sobolev Type. [Sveshnikov A.G., Al'shin A.B., Korpusov M.O., Pletner Yu.D. Linejnye i nelinejnye uravneniya sobolevskogo tipa]. Moscow, FizMatLit, 2007, 736 p.

11. Zamyshlyaeva A.A. Linear Sobolev Type Equations of Hihg Order. [Zamyshlyaeva A.A. Linejnye uravneniya sobolevskogo tipa vysokogo poryadka]. Chelyabinsk: Publishing center of SUSU, 2012, 116 p.

12. Manakova N.A. Optimal Control Problem for Semilinear Sobolev Type Equations. [Manakova N.A. Zadachi optimal'nogo upravleniya dlya polulinejnyx uravnenij sobolevskogo tipa]. Chelyabinsk: Publishing center of SUSU, 2012, 84 p.

13. Sagadeeva M.A. Dichotomies of the Solutions for the Linear Sobolev Type Equations. [Sagadeeva M.A. Dixotomii reshenij linejnyx uravnenij sobolevskogo tipa]. Chelyabinsk: Publishing center of SUSU, 2012, 139 p.

14. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A. Nonclassical Models of Mathematical Physics. [Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A. Neklassicheskie modeli matematicheskoj fiziki]. *Vestnik YuUrGU. Seriya: Matematicheskoe modelirovanie i programmirovanie — Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"*, 2012, no. 40 (299), pp. 7–18.

15. Al-Delfi J.K. Quasi-Sobolev Spaces ℓ_p^m. [Al'-Delfi Dzh.K. Kvazisobolevy prostranstva ℓ_p^m]. *Vestnik YuUrGU. Seriya: Matematika, mexanika, fizika — Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematics, Mechanics, Physics"*, 2013, vol. 5, no. 1, pp. 107–109.

16. Sviridyuk G.A. Manifolds of Solutions of a Class of Evolution and Dynamic Equations.

[Sviridyuk G.A. Mnogoobraziya reshenij odnogo klassa e'volyucionnyx i dinamicheskix uravnenij]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 1989, vol. 304, no. 2, pp. 301–304.

17. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A. The Showalter–Sidorov problem as a Phenomena of the Sobolev type Equations. [Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A. Zadacha Shouoltera – Sidorova kak fenomen uravnenij sobolevskogo tipa]. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika — Bulletin of Irkutsk State University. Series: "Mathematics"*, 2010, vol. 3, no. 1, pp. 104–125.

18. Sagadeeva M.A., Shulepov A.N. The Approximations for Degenerate C_0-semigroup. [Sagadeeva M.A., Shulepov A.N. Approksimacii C_0-polugrupp]. *Vestnik YuUrGU. Seriya: Matematicheskoe modelirovanie i programmirovanie — Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"*, 2013, vol. 6, no. 2, pp. 133–137.

Свиридюк Георгий Анатольевич, доктор физико-математических наук, профессор, Южно - Уральский государственный университет, кафедра «Уравнения математической физики», заведующий кафедрой, Челябинск, Россия
E-mail: sviridyuk@74.ru

Sviridyuk Georgy A., Full Prof., DSc (Math), South Ural State University, Equation of mathematical physics department, Chelyabinsk, Russia
E-mail: sviridyuk@74.ru

Сагадеева Минзиля Алмасовна, кандидат физико-математических наук, доцент, Южно - Уральский государственный университет, кафедра «Дифференциальных и стохастических уравнений», Челябинск, Россия
E-mail: sam79@74.ru

Sagadeeva Minzilia A., Associate professor, South Ural State University, Information-Measuring Technique department, Chelyabinsk, Russia
E-mail: sam79@74.ru

Рашид Амар Саид Р., магистрант, Южно - Уральский государственный университет, кафедра «Уравнения математической физики», Челябинск, Россия
E-mail: amargivara@gmail.com

Rashid Amar S.R., Graduate Student, South Ural State University, Equation of mathematical physics department, Chelyabinsk, Russia
E-mail: amargivara@gmail.com