УДК 517.984

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ САМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА В ДЕЙСТВИТЕЛЬНОМ ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

М. Н. Орешина

Липецкий государственный технический университет

Поступила в редакцию 11.04.2014 г.

Аннотация. Рассматриваются неограниченные самосопряженные операторы, действующие в действительном гильбертовом пространстве. Для стандартного применения методов спектральной теории такие операторы следует комплексифицировать. При этом если исходная задача была поставлена в действительном пространстве, окончательные результаты обычно необходимо декомплексифицировать, т.е. перенести на действительный случай. Однако такой переход не всегда является очевидным, хотя и желателен с точки зрения приложений.

В статье приводится действительный вариант теорем о спектральном разложении и функциональном исчислении для неограниченных самосопряженных операторов, действующих в действительном гильбертовом пространстве.

Ключевые слова: спектральная теорема, неограниченный самосопряженный оператор, действительное гильбертово пространство, комплексификация, функциональное исчисление.

SPECTRAL THEOREM FOR SELF-ADJOINT OPERATORS IN A REAL HILBERT SPACE

M. N. Oreshina

Abstract. Unbounded self-adjoint operators in a real Hilbert space are considered. For a standard application of methods of spectral theory such operators must be complexified. However, if the original problem was set out in a real space, it is usually necessary to decomplexify the final results, i.e. to carry over them to the real case. However, such a transformation is not always evident, although desirable from the point of view of applications.

In the article we present real variants of the spectral decomposition and functional calculus theorems for unbounded self-adjoint operators in a real Hilbert space.

Keywords: spectral theorem, ubounded self-adjoint operator, real Hilbert space, complexification, functional calculus.

1. ВВЕДЕНИЕ

Спектральной теории самосопряженных операторов посвящена обширная литература (см., например, [1], [2], [3], [4]). Обычно предполагается, что пространство, в котором рассматриваются операторы, является комплексным. При этом подразумевается, что в действительном случае следует переходить к комплексификации и рассуждать в терминах комплексного пространства. Однако, например, в численных методах, возможность проводить вычисления без использования комплексных чисел [5], [6] позволяет существенно уменьшить время счета. Хотя задачи комплексификации и декомплексификации на первый взгляд кажутся простыми, некоторые связанные с ними вопросы не являются тривиальными [7], [8], [9], [10], но явно в литературе не обсуждаются.

Целью настоящей статьи является перенесение классических результатов спектральной теории на случай неограниченных самосопряженных операторов, действующих в действительном гильбертовом пространстве. В § 2 напоминается конструкция комплексификации действительного гильбертова пространства и соответствующего оператора. В § 3 описывается действительное разложение единицы и формулируется спектральная теорема для неограниченного оператора, а в § 4 строится функциональное исчисление. Основным результатом статьи является теорема 10. В § 5 в качестве приложения приводится теорема о представлении решения уравнения

$$\dot{x}(t) = B_{\mathbb{R}}x(t)$$

с неограниченным самосопряженным коэффициентом $B_{\mathbb{R}}$, действующим в действительном гильбертовом пространстве, с помощью операторной экспоненты. Комплексный вариант этой теоремы хорошо известен и широко используется в теории дифференциальных уравнений [11].

2. КОМПЛЕКСИФИКАЦИЯ НЕОГРАНИЧЕННОГО ОПЕРАТОРА

Пусть $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ — действительное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}}$.

Пусть $T_{\mathbb{R}}\colon D(T_{\mathbb{R}}) \subset \mathbf{H}_{\mathbb{R}} \to \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ — линейный неограниченный оператор. Будем предполагать, что область определения $D(T_{\mathbb{R}})$ оператора $T_{\mathbb{R}}$ является всюду плотной в $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}$. Обозначим через $D(T_{\mathbb{R}}{}^*)$ множество всех $\psi \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$, для которых линейный функционал $\varphi \mapsto \langle T_{\mathbb{R}}\,\varphi, \psi\rangle_{\mathbb{R}}$ непрерывен на $D(T_{\mathbb{R}})$. Пусть $\psi \in D(T_{\mathbb{R}}{}^*)$. Поскольку $D(T_{\mathbb{R}})$ всюду плотна, а линейный функционал $\varphi \mapsto \langle T_{\mathbb{R}}\,\varphi, \psi\rangle_{\mathbb{R}}$ непрерывен на $D(T_{\mathbb{R}})$, он по непрерывности однозначно продолжается на все пространство $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}$. Таким образом, существует такой $\psi^* \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$, что

$$\langle T_{\mathbb{R}}\,\varphi, \psi\rangle_{\mathbb{R}} = \langle \varphi, \psi^*\rangle_{\mathbb{R}}, \qquad \varphi \in D(T_{\mathbb{R}}).$$

В этом случае можно определить *сопряженный* оператор $T_{\mathbb{R}}{}^*$ с областью определения $D(T_{\mathbb{R}}{}^*)$ по правилу $T_{\mathbb{R}}{}^*\,\psi = \psi^*$. Оператор $T_{\mathbb{R}}$ называют *самосопряженным*, если $T_{\mathbb{R}} = T_{\mathbb{R}}{}^*$. В частности, для самосопряженного оператора $D(T_{\mathbb{R}}{}^*) = D(T_{\mathbb{R}})$.

Оператор $T_{\mathbb{R}}$ называют *замкнутым*, если его *график* $\{(\varphi, T_{\mathbb{R}}\,\varphi)\colon \varphi \in D(T_{\mathbb{R}})\}$ является замкнутым подмножеством пространства $\mathbf{H}_{\mathbb{R}} \times \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$.

Теорема 1. *Сопряженный оператор $T_{\mathbb{R}}{}^*$ замкнут. В частности, самосопряженный оператор всегда замкнут.*

Доказательство. Доказательство аналогично изложенному в [3, теорема 13.9] для случая комплексного гильбертова пространства. □

Оператор $S_{\mathbb{R}}$ называют *расширением* оператора $T_{\mathbb{R}}$ и сокращенно пишут

$$T_{\mathbb{R}} \subset S_{\mathbb{R}},$$

если

$$D(T_{\mathbb{R}}) \subset D(S_{\mathbb{R}}), \tag{1}$$

$$T_{\mathbb{R}}\,\varphi = S_{\mathbb{R}}\varphi, \quad \varphi \in D(T_{\mathbb{R}}). \tag{2}$$

Сумму и *произведение* неограниченных операторов $S_{\mathbb{R}}$ и $T_{\mathbb{R}}$ определяют соотношениями

$$(T_{\mathbb{R}} + S_{\mathbb{R}})\varphi = T_{\mathbb{R}}\,\varphi + S_{\mathbb{R}}\varphi, \qquad \varphi \in D(T_{\mathbb{R}} + S_{\mathbb{R}}) = D(T_{\mathbb{R}}) \cap D(S_{\mathbb{R}});$$

$$(T_{\mathbb{R}}\,S_{\mathbb{R}})\varphi = T_{\mathbb{R}}(S_{\mathbb{R}}\varphi), \qquad \varphi \in D(T_{\mathbb{R}}\,S_{\mathbb{R}}) = \{\psi \in D(S_{\mathbb{R}})\colon S_{\mathbb{R}}\psi \in D(T_{\mathbb{R}})\}.$$

Обратным к неограниченному оператору $T_{\mathbb{R}}\colon D(T_{\mathbb{R}}) \subset \mathbf{H}_{\mathbb{R}} \to \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ называют оператор $T_{\mathbb{R}}{}^{-1}\colon \mathbf{H}_{\mathbb{R}} \to D(T_{\mathbb{R}})$, удовлетворяющий равенствам

$$\begin{aligned} T_{\mathbb{R}}\, T_{\mathbb{R}}{}^{-1}\, \varphi = \varphi, \qquad & \varphi \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}, \\ T_{\mathbb{R}}{}^{-1}\, T_{\mathbb{R}}\, \psi = \psi, \qquad & \psi \in D(T_{\mathbb{R}}). \end{aligned}$$

Легко проверить, что обратный оператор единственен при условии, что он существует.

Прямой суммой будем называть пространство $\mathbf{H}_{\mathbb{R}} \oplus i\,\mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ всех формальных выражений вида $\varphi + i\psi$, где $\varphi, \psi \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$, с естественными линейными операциями. Прямую сумму $\mathbf{H}_{\mathbb{C}} = \mathbf{H}_{\mathbb{R}} \oplus i\,\mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ с законом внешнего умножения на комплексные числа $(\alpha + i\beta)(\varphi + i\psi) = (\alpha\varphi - \beta\psi) + i(\alpha\psi + \beta\varphi)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\varphi, \psi \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$, называют [7], [9] *комплексификацией* действительного гильбертова пространства $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}$. Будем отождествлять $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ с подпространством $\mathbf{H}_{\mathbb{R}} \oplus i\{0\}$ пространства $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}$.

Очевидно, $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ является комплексным гильбертовым пространством относительно скалярного произведения

$$\langle \varphi_1 + i\psi_1, \varphi_2 + i\psi_2 \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_{\mathbb{R}} + \langle \psi_1, \psi_2 \rangle_{\mathbb{R}} + i\langle \psi_1, \varphi_2 \rangle_{\mathbb{R}} - i\langle \varphi_1, \psi_2 \rangle_{\mathbb{R}}.$$

Комплексификацией оператора $T_{\mathbb{R}}\colon D(T_{\mathbb{R}}) \subset \mathbf{H}_{\mathbb{R}} \to \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ называют оператор $T_{\mathbb{C}}\colon D(T_{\mathbb{C}}) \subset \mathbf{H}_{\mathbb{C}} \to \mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ с областью определения $D(T_{\mathbb{C}}) = D(T_{\mathbb{R}}) \oplus\, iD(T_{\mathbb{R}})$, заданный по правилу

$$T_{\mathbb{C}}(\varphi + i\psi) = T_{\mathbb{R}}\,\varphi + i\,T_{\mathbb{R}}\,\psi, \qquad \varphi, \psi \in D(T_{\mathbb{R}}).$$

Расширение, сумма, произведение, обратный и самосопряженный операторы в случае комплексного гильбертова пространства определяются [3] аналогично действительному случаю.

Предложение 2. *Пусть оператор $T_{\mathbb{C}}$ является комплексификацией оператора $T_{\mathbb{R}}\colon D(T_{\mathbb{R}}) \subset \mathbf{H}_{\mathbb{R}} \to \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$, а оператор $S_{\mathbb{C}}$ является комплексификацией оператора $S_{\mathbb{R}}$. Тогда*

(a) *Комплексификацией оператора $\alpha\,T_{\mathbb{R}}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, является оператор $\alpha\,T_{\mathbb{C}}$.*

(b) *Комплексификацией оператора $T_{\mathbb{R}} + S_{\mathbb{R}}$ является оператор $T_{\mathbb{C}} + S_{\mathbb{C}}$.*

(c) *Комплексификацией оператора $T_{\mathbb{R}}\,S_{\mathbb{R}}$ является оператор $T_{\mathbb{C}}\,S_{\mathbb{C}}$.*

(d) *Если оператор $T_{\mathbb{R}}$ обратим, то оператор $T_{\mathbb{C}}$ также обратим, причем оператор $T_{\mathbb{C}}{}^{-1}$ является комплексификацией оператора $T_{\mathbb{R}}{}^{-1}$.*

Доказательство. (a) Для всех $\varphi, \psi \in D(T_{\mathbb{R}})$ имеем

$$(\alpha\,T_{\mathbb{R}})\varphi + i(\alpha\,T_{\mathbb{R}})\psi = \alpha(T_{\mathbb{R}}\,\varphi + i\,T_{\mathbb{R}}\,\psi) = \alpha\,T_{\mathbb{C}}(\varphi + i\psi).$$

(b) Покажем сначала, что $D(T_{\mathbb{C}} + S_{\mathbb{C}}) = D(T_{\mathbb{R}} + S_{\mathbb{R}}) \oplus\, iD(T_{\mathbb{R}} + S_{\mathbb{R}})$. Действительно.

$$\begin{aligned} D(T_{\mathbb{C}} + S_{\mathbb{C}}) &= D(T_{\mathbb{C}}) \cap D(S_{\mathbb{C}}) = \\ &= \big[D(T_{\mathbb{R}}) \oplus\, iD(T_{\mathbb{R}})\big] \cap \big[D(S_{\mathbb{R}}) \oplus\, iD(S_{\mathbb{R}})\big] = \\ &= \big[D(T_{\mathbb{R}}) \cap D(S_{\mathbb{R}})\big] \oplus\, i\big[D(T_{\mathbb{R}}) \cap D(S_{\mathbb{R}})\big] = \\ &= D(T_{\mathbb{R}} + S_{\mathbb{R}}) \oplus\, iD(T_{\mathbb{R}} + S_{\mathbb{R}}). \end{aligned}$$

Пусть $\varphi, \psi \in D(T_{\mathbb{R}} + S_{\mathbb{R}})$. Тогда справедливо равенство

$$(T_{\mathbb{R}} + S_{\mathbb{R}})\varphi + i(T_{\mathbb{R}} + S_{\mathbb{R}})\psi = T_{\mathbb{R}}\,\varphi + i\,T_{\mathbb{R}}\,\psi + S_{\mathbb{R}}\varphi + iS_{\mathbb{R}}\psi = (T_{\mathbb{C}} + S_{\mathbb{C}})(\varphi + i\psi).$$

(c) Несложно проверить, что $D(T_{\mathbb{C}}\, S_{\mathbb{C}}) = D(T_{\mathbb{R}}\, S_{\mathbb{R}}) \oplus\, iD(T_{\mathbb{R}}\, S_{\mathbb{R}})$. Кроме того, для любых $\varphi, \psi \in D(T_{\mathbb{R}}\, S_{\mathbb{R}})$ имеем

$$T_{\mathbb{R}}\, S_{\mathbb{R}}\varphi + i\, T_{\mathbb{R}}\, S_{\mathbb{R}}\psi = T_{\mathbb{R}}(S_{\mathbb{R}}\varphi) + i\, T_{\mathbb{R}}(S_{\mathbb{R}}\psi) = T_{\mathbb{C}}(S_{\mathbb{R}}\varphi + iS_{\mathbb{R}}\psi) = \\ = T_{\mathbb{C}}\, S_{\mathbb{C}}(\varphi + i\psi).$$

(d) Пусть $S_{\mathbb{C}}$ — комплексификация оператора ${T_{\mathbb{R}}}^{-1}$. Покажем, что $S_{\mathbb{C}}$ является обратным к оператору $T_{\mathbb{C}}$. Из ${T_{\mathbb{R}}}^{-1}\colon\ \mathbf{H}_{\mathbb{R}} \to D(T_{\mathbb{R}})$ следует, что

$$D(S_{\mathbb{C}}) = \mathbf{H}_{\mathbb{R}} \oplus i\, \mathbf{H}_{\mathbb{R}} = \mathbf{H}_{\mathbb{C}}, \tag{3}$$

$$S_{\mathbb{C}}(\varphi + i\psi) = {T_{\mathbb{R}}}^{-1}\,\varphi + i\,{T_{\mathbb{R}}}^{-1}\,\psi \in D(T_{\mathbb{C}}), \quad \varphi, \psi \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}\,. \tag{4}$$

Поэтому $S_{\mathbb{C}}\colon\ \mathbf{H}_{\mathbb{C}} \to D(T_{\mathbb{C}})$. Кроме того, для любых $\varphi, \psi \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ выполняется соотношение

$$T_{\mathbb{C}}\, S_{\mathbb{C}}(\varphi + i\psi) = T_{\mathbb{C}}({T_{\mathbb{R}}}^{-1}\,\varphi + i\,{T_{\mathbb{R}}}^{-1}\,\psi) = T_{\mathbb{R}}\,{T_{\mathbb{R}}}^{-1}\,\varphi + i\,T_{\mathbb{R}}\,{T_{\mathbb{R}}}^{-1}\,\psi = \varphi + i\psi.$$

С другой стороны, для всех $\varphi, \psi \in D(T_{\mathbb{R}})$ справедливо равенство

$$S_{\mathbb{C}}\, T_{\mathbb{C}}(\varphi + i\psi) = S_{\mathbb{C}}(T_{\mathbb{R}}\,\varphi + i\,T_{\mathbb{R}}\,\psi) = {T_{\mathbb{R}}}^{-1}\,T_{\mathbb{R}}\,\varphi + i\,{T_{\mathbb{R}}}^{-1}\,T_{\mathbb{R}}\,\psi = \varphi + i\psi. \quad \square$$

Теорема 3. *Пусть $T_{\mathbb{C}}$ — комплексификация самосопряженного оператора $T_{\mathbb{R}}$. Тогда область определения $D(T_{\mathbb{C}})$ оператора $T_{\mathbb{C}}$ является всюду плотной в $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}$, а оператор $T_{\mathbb{C}}$ является самосопряженным.*

Доказательство. Так как $D(T_{\mathbb{C}}) = D(T_{\mathbb{R}}) \oplus\, iD(T_{\mathbb{R}})$, а $D(T_{\mathbb{R}})$ является всюду плотной в $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}$, то $D(T_{\mathbb{C}})$, очевидно, является всюду плотной в $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}$.

Несложно проверить, что $D({T_{\mathbb{C}}}^*) = D({T_{\mathbb{R}}}^*) \oplus\, iD({T_{\mathbb{R}}}^*)$ и

$${T_{\mathbb{C}}}^*(\varphi + i\psi) = {T_{\mathbb{R}}}^*\,\varphi + i\,{T_{\mathbb{R}}}^*\,\psi, \qquad \varphi, \psi \in D({T_{\mathbb{R}}}^*).$$

Поэтому из ${T_{\mathbb{R}}}^* = T_{\mathbb{R}}$ следует ${T_{\mathbb{C}}}^* = T_{\mathbb{C}}$. $\square$

Символами $\mathbf{0}_{\mathbb{C}}\colon\ \mathbf{H}_{\mathbb{C}} \to \mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ и $\mathbf{0}_{\mathbb{R}}\colon\ \mathbf{H}_{\mathbb{R}} \to \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ будем обозначать нулевые операторы, а $\mathbf{1}_{\mathbb{C}} : \mathbf{H}_{\mathbb{C}} \to \mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ и $\mathbf{1}_{\mathbb{R}} : \mathbf{H}_{\mathbb{R}} \to \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ — тождественные операторы. Очевидно, $\mathbf{0}_{\mathbb{C}}$ является комплексификацией $\mathbf{0}_{\mathbb{R}}$, а $\mathbf{1}_{\mathbb{C}}$ — комплексификацией $\mathbf{1}_{\mathbb{R}}$.

Пусть $T_{\mathbb{C}}$ — замкнутый оператор. Множество $\rho(T_{\mathbb{C}})$ всех $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых оператор $(\lambda\mathbf{1}_{\mathbb{C}} - T_{\mathbb{C}})$ обратим, называют *резольвентным множеством* [3], [4], [13] оператора $T_{\mathbb{C}}$, а функцию $\lambda \mapsto (\lambda\mathbf{1}_{\mathbb{C}} - T_{\mathbb{C}})^{-1}$ — резольвентой. Дополнение $\sigma(T_{\mathbb{C}})$ к резольвентному множеству называют *спектром* оператора $T_{\mathbb{C}}$. *Действительным резольвентным множеством* $\rho(T_{\mathbb{R}})$ замкнутого оператора $T_{\mathbb{R}}$, действующего в пространстве $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}$, будем называть множество $\rho(T_{\mathbb{C}}) \cap \mathbb{R}$, а *действительным спектром* $\sigma(T_{\mathbb{R}})$ — множество $\sigma(T_{\mathbb{C}}) \cap \mathbb{R}$, где $T_{\mathbb{C}}$ — комплексификация $T_{\mathbb{R}}$. Отметим, что спектр самосопряженного оператора $T_{\mathbb{C}}$ содержится [3] в $(-\infty, +\infty)$, поэтому действительный спектр $\sigma(T_{\mathbb{R}})$ самосопряженного оператора $T_{\mathbb{R}}$ совпадает со спектром $\sigma(T_{\mathbb{C}})$ его комплексификации $T_{\mathbb{C}}$.

3. СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА

Обозначим через $\mathcal{B}(\mathbf{H}_{\mathbb{C}})$ банахову алгебру [2], [3], [4], [12] всех линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}$. Аналогично определим $\mathcal{B}(\mathbf{H}_{\mathbb{R}})$. Оператор $P \in \mathcal{B}(\mathbf{H}_{\mathbb{C}})$ (или $P \in \mathcal{B}(\mathbf{H}_{\mathbb{R}})$) называют *проектором*, если $P^2 = P$. Оператор $P \in \mathcal{B}(\mathbf{H}_{\mathbb{C}})$ называют *самосопряженным*, если $\langle P\varphi, \psi\rangle_{\mathbb{C}} = \langle \varphi, P\psi\rangle_{\mathbb{C}}$, $\varphi, \psi \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}$. Аналогично определяют самосопряженный оператор в $\mathcal{B}(\mathbf{H}_{\mathbb{R}})$. Отметим, что последнее определение можно рассматривать как частный случай определения неограниченного самосопряженного оператора из предыдущего параграфа.

(*Комплексным*) *разложением единицы* на σ-алгебре Σ всех борелевских подмножеств действительной оси называют [3], [4] отображение

$$E^{\mathbb{C}} \colon \Sigma \to \mathcal{B}(\mathbf{H}_{\mathbb{C}}),$$

обладающее свойствами:

1. $E^{\mathbb{C}}(\varnothing) = \mathbf{0}_{\mathbb{C}}, \quad E^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) = \mathbf{1}_{\mathbb{C}}$;
2. для любого $\omega \in \Sigma$ оператор $E^{\mathbb{C}}(\omega)$ является самосопряженным проектором;
3. для всех $\omega', \omega'' \in \Sigma$ справедливо равенство
$$E^{\mathbb{C}}(\omega' \cap \omega'') = E^{\mathbb{C}}(\omega')E^{\mathbb{C}}(\omega'');$$
4. для всех $\omega', \omega'' \in \Sigma$, $\omega' \cap \omega'' = \varnothing$, выполняется равенство
$$E^{\mathbb{C}}(\omega' \cup \omega'') = E^{\mathbb{C}}(\omega') + E^{\mathbb{C}}(\omega'');$$
5. для любых $\varphi, \psi \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ функция $E^{\mathbb{C}}_{\varphi\psi}(\omega) = \langle E^{\mathbb{C}}(\omega)\varphi, \psi\rangle_{\mathbb{C}}$ является комплексной регулярной борелевской мерой [3], [14] на Σ.

Из свойства 2 следует, что для всех $\varphi \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ мера $E^{\mathbb{C}}_{\varphi\varphi}(\omega) = \langle E^{\mathbb{C}}(\omega)\varphi, \varphi\rangle_{\mathbb{C}}$ является положительной.

Теорема 4 ([3, теорема 13.30]). *Пусть $T_{\mathbb{C}} \colon D(T_{\mathbb{C}}) \subset \mathbf{H}_{\mathbb{C}} \to \mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ — самосопряженный оператор. Тогда существует единственное разложение единицы $E^{\mathbb{C}}$, определенное на σ-алгебре Σ всех борелевских подмножеств действительной оси и такое, что*

$$\langle T_{\mathbb{C}}\,\varphi, \psi\rangle_{\mathbb{C}} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi dE^{\mathbb{C}}_{\varphi\psi}(\xi), \qquad \varphi \in D(T_{\mathbb{C}}), \quad \psi \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}\,. \tag{5}$$

Кроме того, разложение единицы $E^{\mathbb{C}}$ сосредоточено на $\sigma(T_{\mathbb{C}}) \subset \mathbb{R}$ в том смысле, что $E^{\mathbb{C}}\big(\sigma(T_{\mathbb{C}})\big) = \mathbf{1}_{\mathbb{C}}$.

Разложение единицы $E^{\mathbb{C}}$, связанное с оператором $T_{\mathbb{C}}$ так, как описано в теореме 4, называют [3] (*комплексным*) *спектральным разложением оператора* $T_{\mathbb{C}}$.

Предложение 5. *Пусть $E^{\mathbb{C}}$ — спектральное разложение оператора $T_{\mathbb{C}}$, являющегося комплексификацией самосопряженного оператора $T_{\mathbb{R}}$. Тогда проекторы $E^{\mathbb{C}}(\omega)$, порожденные $T_{\mathbb{C}}$, переводят $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ в $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}$.*

Доказательство. Для спектрального разложения $E^{\mathbb{C}}$ самосопряженного оператора $T_{\mathbb{C}}$ на любом открытом интервале $\omega = (a, b)$ и при любом $\varphi \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ справедлива [13, теорема XII.2.10] формула

$$E^{\mathbb{C}}(\omega)\varphi = \lim_{\delta\to+0}\lim_{\varepsilon\to+0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a+\delta}^{b-\delta} \Big[\big((\mu - i\varepsilon)\mathbf{1}_{\mathbb{C}} - T_{\mathbb{C}}\big)^{-1} - \big((\mu + i\varepsilon)\mathbf{1}_{\mathbb{C}} - T_{\mathbb{C}}\big)^{-1}\Big]\varphi\, d\mu.$$

Используя тождество Гильберта [13, лемма XII.1.3], получаем

$$\begin{aligned}\big((\mu - i\varepsilon)\mathbf{1}_{\mathbb{C}} - T_{\mathbb{C}}\big)^{-1} - \big((\mu + i\varepsilon)\mathbf{1}_{\mathbb{C}} - T_{\mathbb{C}}\big)^{-1} = \\ = 2i\varepsilon\big((\mu - i\varepsilon)\mathbf{1}_{\mathbb{C}} - T_{\mathbb{C}}\big)^{-1}\big((\mu + i\varepsilon)\mathbf{1}_{\mathbb{C}} - T_{\mathbb{C}}\big)^{-1} = \\ = 2i\varepsilon\big((\mu\mathbf{1}_{\mathbb{C}} - T_{\mathbb{C}})^2 + \varepsilon^2\mathbf{1}_{\mathbb{C}}\big)^{-1}.\end{aligned}$$

Отметим, что из $\sigma(T_{\mathbb{C}}) \subset (-\infty, +\infty)$ следует $\mu \pm i\varepsilon \in \rho(T_{\mathbb{C}})$, где $\varepsilon > 0$, поэтому оператор $(\mu\mathbf{1}_{\mathbb{C}} - T_{\mathbb{C}})^2 + \varepsilon^2\mathbf{1}_{\mathbb{C}}$ обратим. В силу предложения 2 комплексификация оператора $\big((\mu\mathbf{1}_{\mathbb{R}} - T_{\mathbb{R}})^2 + \varepsilon^2\mathbf{1}_{\mathbb{R}}\big)^{-1}$ совпадает с оператором $\big((\mu\mathbf{1}_{\mathbb{C}} - T_{\mathbb{C}})^2 + \varepsilon^2\mathbf{1}_{\mathbb{C}}\big)^{-1}$. Поэтому для всех $\varphi \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$

$$E^{\mathbb{C}}(\omega)\varphi = \lim_{\delta\to+0}\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\varepsilon}{\pi}\int\limits_{a+\delta}^{b-\delta}\big((\mu\mathbf{1}_{\mathbb{R}} - T_{\mathbb{R}})^2 + \varepsilon^2\mathbf{1}_{\mathbb{R}}\big)^{-1}\varphi\, d\mu \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}\,. \quad \square$$

Из предложения 5 следует, что для спектрального разложения оператора $T_{\mathbb{C}}$, являющегося комплексификацией самосопряженного оператора $T_{\mathbb{R}}$, выполняется свойство

5′. для всех $\varphi, \psi \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ регулярная борелевская мера

$$E^{\mathbb{C}}_{\varphi\psi}(\omega) = \langle E^{\mathbb{C}}(\omega)\varphi, \psi\rangle_{\mathbb{C}} = \langle E^{\mathbb{C}}(\omega)\varphi, \psi\rangle_{\mathbb{R}}$$

является действительной.

Действительным разложением единицы на σ-алгебре Σ всех борелевских подмножеств действительной оси будем называть отображение

$$E^{\mathbb{R}}\colon \Sigma \to \mathcal{B}(\mathbf{H}_{\mathbb{R}}),$$

обладающее свойствами:

1. $E^{\mathbb{R}}(\varnothing) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}}, \quad E^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}}$;
2. для любого $\omega \in \Sigma$ оператор $E^{\mathbb{R}}(\omega)$ является самосопряженным проектором;
3. для всех $\omega', \omega'' \in \Sigma$ справедливо равенство
$$E^{\mathbb{R}}(\omega' \cap \omega'') = E^{\mathbb{R}}(\omega')E^{\mathbb{R}}(\omega'');$$
4. для всех $\omega', \omega'' \in \Sigma$, $\omega' \cap \omega'' = \varnothing$, выполняется равенство
$$E^{\mathbb{R}}(\omega' \cup \omega'') = E^{\mathbb{R}}(\omega') + E^{\mathbb{R}}(\omega'');$$
5. для любых $\varphi, \psi \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ функция $E^{\mathbb{R}}_{\varphi\psi}(\omega) = \langle E^{\mathbb{R}}(\omega)\varphi, \psi\rangle_{\mathbb{R}}$ является действительной регулярной борелевской мерой на Σ.

Очевидно, для всех $\varphi \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ мера $E^{\mathbb{R}}_{\varphi\varphi}(\omega) = \langle E^{\mathbb{R}}(\omega)\varphi, \varphi\rangle_{\mathbb{R}}$ является положительной.

Приведем теперь аналог теоремы 4 для самосопряженного оператора $T_{\mathbb{R}}$, действующего в действительном гильбертовом пространстве $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}$.

Теорема 6. *Пусть $T_{\mathbb{R}}\colon D(T_{\mathbb{R}}) \subset \mathbf{H}_{\mathbb{R}} \to \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ — самосопряженный оператор. Тогда существует единственное действительное разложение единицы $E^{\mathbb{R}}$, определенное на σ-алгебре Σ всех борелевских подмножеств действительной оси и такое, что*

$$\langle T_{\mathbb{R}}\,\varphi, \psi\rangle_{\mathbb{R}} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi dE^{\mathbb{R}}_{\varphi\psi}(\xi), \qquad \varphi \in D(T_{\mathbb{R}}), \quad \psi \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}\,. \tag{6}$$

Кроме того, разложение единицы $E^{\mathbb{R}}$ сосредоточено на $\sigma(T_{\mathbb{R}}) \subset \mathbb{R}$ в том смысле, что $E^{\mathbb{R}}\big(\sigma(T_{\mathbb{R}})\big) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}}$.

Доказательство. Рассмотрим комплексификацию $T_{\mathbb{C}}$ оператора $T_{\mathbb{R}}$. Теорема 4 сопоставляет оператору $T_{\mathbb{C}}$ единственное разложение единицы $E^{\mathbb{C}}\colon \Sigma \to \mathcal{B}(\mathbf{H}_{\mathbb{C}})$, для которого справедливо представление (5). Учитывая, что на $D(T_{\mathbb{R}})$ оператор $T_{\mathbb{C}}$ совпадает с $T_{\mathbb{R}}$, получаем

$$\langle T_{\mathbb{R}}\,\varphi,\psi\rangle_{\mathbb{R}} = \langle T_{\mathbb{C}}\,\varphi,\psi\rangle_{\mathbb{C}} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi dE^{\mathbb{C}}_{\varphi\psi}(\xi), \qquad \varphi\in D(T_{\mathbb{R}}), \quad \psi\in\mathbf{H}_{\mathbb{R}}\,.$$

А так как для всех $\omega\in\Sigma$ проекторы $E^{\mathbb{C}}(\omega)$ переводят $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ в $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ (см. предложение 5), то в качестве $E^{\mathbb{R}}(\omega)$ достаточно взять сужение $E^{\mathbb{C}}(\omega)$ на $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}$.

Покажем теперь, что разложение единицы $E^{\mathbb{R}}$, соответствующее оператору $T_{\mathbb{R}}$, единственно. Предположим противное. Пусть существует еще одно разложение единицы $\widetilde{E}^{\mathbb{R}}$, определенное на σ-алгебре Σ всех борелевских подмножеств действительной оси и такое, что

$$\langle T_{\mathbb{R}}\,\varphi,\psi\rangle_{\mathbb{R}} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi d\widetilde{E}^{\mathbb{R}}_{\varphi\psi}(\xi), \qquad \varphi\in D(T_{\mathbb{R}}), \quad \psi\in\mathbf{H}_{\mathbb{R}}\,.$$

Рассмотрим комплексификацию $\widetilde{E}^{\mathbb{C}}(\omega)$ операторов $\widetilde{E}^{\mathbb{R}}(\omega)$. Несложно проверить, что $\widetilde{E}^{\mathbb{C}}$ является разложением единицы и удовлетворяет соотношению

$$\langle T_{\mathbb{C}}\,\varphi,\psi\rangle_{\mathbb{C}} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi d\widetilde{E}^{\mathbb{C}}_{\varphi\psi}(\xi), \qquad \varphi\in D(T_{\mathbb{C}}), \quad \psi\in\mathbf{H}_{\mathbb{C}}\,.$$

В силу теоремы 4 (комплексное) спектральное разложение оператора $T_{\mathbb{C}}$ единственно, поэтому $\widetilde{E}^{\mathbb{C}}$ совпадает с $E^{\mathbb{C}}$. Очевидно, отсюда следует, что $\widetilde{E}^{\mathbb{R}}$ совпадает с $E^{\mathbb{R}}$. □

Разложение единицы $E^{\mathbb{R}}$, связанное с оператором $T_{\mathbb{R}}$ так, как описано в теореме 6, будем называть (*действительным*) *спектральным разложением оператора* $T_{\mathbb{R}}$.

Замечание 7. Из доказательства теоремы 6 видно, что комплексификация $E^{\mathbb{R}}$ совпадает с $E^{\mathbb{C}}$.

4. ТЕОРЕМА О ФУНКЦИОНАЛЬНОМ ИСЧИСЛЕНИИ

Теорема 8 ([3, теоремы 13.24 и 13.25]). *Пусть $E^{\mathbb{C}}$ — спектральное разложение самосопряженного оператора $T_{\mathbb{C}}\colon D(T_{\mathbb{C}})\subset\mathbf{H}_{\mathbb{C}}\to\mathbf{H}_{\mathbb{C}}$.*

Каждой измеримой по Борелю функции $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ формула

$$\big\langle \Psi_{\mathbb{C}}(f)\varphi,\psi\big\rangle_{\mathbb{C}} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) dE^{\mathbb{C}}_{\varphi\psi}(\xi), \qquad \varphi\in D\big(\Psi_{\mathbb{C}}(f)\big), \quad \psi\in\mathbf{H}_{\mathbb{C}}, \tag{7}$$

сопоставляет плотно определенный замкнутый оператор

$$\Psi_{\mathbb{C}}(f)\colon D\big(\Psi_{\mathbb{C}}(f)\big)\subset\mathbf{H}_{\mathbb{C}}\to\mathbf{H}_{\mathbb{C}}$$

с областью определения

$$D\big(\Psi_{\mathbb{C}}(f)\big) = \Big\{\varphi\in\mathbf{H}_{\mathbb{C}}: \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f|^2\, dE^{\mathbb{C}}_{\varphi\varphi} < \infty\Big\}.$$

При этом отображение $\Psi_{\mathbb{C}}$ обладает следующими свойствами:

(a) *Для всех* $\varphi \in D\big(\Psi_{\mathbb{C}}(f)\big)$ *выполняется соотношение*

$$\|\Psi_{\mathbb{C}}(f)\varphi\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f|^2 \, dE^{\mathbb{C}}_{\varphi\varphi}.$$

(b) *Справедливо равенство*

$$\Psi_{\mathbb{C}}(f)^* = \Psi_{\mathbb{C}}(\bar{f}),$$

где черта означает комплексное сопряжение, а звездочка — переход к сопряженному оператору.

(c) *Если функция* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *ограничена, то оператор* $\Psi_{\mathbb{C}}(f)$ *ограничен.*

(d) *Для любых измеримых по Борелю функций* $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *справедливо включение*

$$\Psi_{\mathbb{C}}(f) + \Psi_{\mathbb{C}}(g) \subset \Psi_{\mathbb{C}}(f+g),$$
$$\Psi_{\mathbb{C}}(f)\Psi_{\mathbb{C}}(g) \subset \Psi_{\mathbb{C}}(fg).$$

В частности, если функция g *ограничена, то*

$$\Psi_{\mathbb{C}}(f) + \Psi_{\mathbb{C}}(g) = \Psi_{\mathbb{C}}(f+g),$$
$$\Psi_{\mathbb{C}}(f)\Psi_{\mathbb{C}}(g) = \Psi_{\mathbb{C}}(fg).$$

Формулу (7) иногда сокращенно записывают в виде

$$\Psi_{\mathbb{C}}(f) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f \, dE^{\mathbb{C}}.$$

Пусть $T_{\mathbb{R}}\colon D(T_{\mathbb{R}}) \subset \mathbf{H}_{\mathbb{R}} \to \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ — самосопряженный оператор, а $E^{\mathbb{R}}$ — его спектральное разложение. Каждой измеримой по Борелю функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ сопоставим оператор

$$\Psi_{\mathbb{R}}(f)\colon D\big(\Psi_{\mathbb{R}}(f)\big) \subset \mathbf{H}_{\mathbb{R}} \to \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$$

по формуле

$$\big\langle \Psi_{\mathbb{R}}(f)\varphi, \psi \big\rangle_{\mathbb{R}} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) dE^{\mathbb{R}}_{\varphi\psi}(\xi), \qquad \varphi \in D\big(\Psi_{\mathbb{R}}(f)\big), \quad \psi \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}},$$

с областью определения

$$D\big(\Psi_{\mathbb{R}}(f)\big) = \Big\{ \varphi \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}} : \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f|^2 \, dE^{\mathbb{R}}_{\varphi\varphi} < \infty \Big\}.$$

Несложно проверить, что $\Psi_{\mathbb{R}}(f)$ является плотно определенным замкнутым оператором.

Теорема 9. *Пусть* $T_{\mathbb{R}}\colon D(T_{\mathbb{R}}) \subset \mathbf{H}_{\mathbb{R}} \to \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ *— самосопряженный оператор, а* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *— измеримая по Борелю функция. Тогда комплексификация оператора* $\Psi_{\mathbb{R}}(f)$*, построенного по оператору* $T_{\mathbb{R}}$*, совпадает с оператором* $\Psi_{\mathbb{C}}(f)$*, построенным по комплексификации* $T_{\mathbb{C}}$ *оператора* $T_{\mathbb{R}}$*.*

Доказательство. Пусть $E^{\mathbb{R}}$ — спектральное разложение оператора $T_{\mathbb{R}}$, а $E^{\mathbb{C}}$ — спектральное разложение $T_{\mathbb{C}}$. Заметим, что для всех $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2 \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ справедливо равенство

$$\begin{aligned}\langle E^{\mathbb{C}}(\varphi_1 + i\psi_1), \varphi_2 + i\psi_2\rangle_{\mathbb{C}} &= \langle E^{\mathbb{R}}\varphi_1 + iE^{\mathbb{R}}\psi_1, \varphi_2 + i\psi_2\rangle_{\mathbb{C}} = \\ &= \langle E^{\mathbb{R}}\varphi_1, \varphi_2\rangle_{\mathbb{R}} + \langle E^{\mathbb{R}}\psi_1, \psi_2\rangle_{\mathbb{R}} + i\langle E^{\mathbb{R}}\psi_1, \varphi_2\rangle_{\mathbb{R}} - i\langle E^{\mathbb{R}}\varphi_1, \psi_2\rangle_{\mathbb{R}}.\end{aligned}$$

Пусть $S_{\mathbb{C}}$ — комплексификация оператора $\Psi_{\mathbb{R}}(f)$. Несложно проверить, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f|^2\, dE^{\mathbb{C}}_{\varphi+i\psi,\varphi+i\psi} = \int_{-\infty}^{+\infty} |f|^2\, dE^{\mathbb{R}}_{\varphi\varphi} + \int_{-\infty}^{+\infty} |f|^2\, dE^{\mathbb{R}}_{\psi\psi},$$

откуда следует $D\big(S_{\mathbb{C}}\big) = D\big(\Psi_{\mathbb{C}}(f)\big)$.

Для всех $\varphi_1, \psi_1 \in D\big(\Psi_{\mathbb{R}}(f)\big)$, $\varphi_2, \psi_2 \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ имеем цепочку эквивалентных равенств

$$\begin{aligned}\langle S_{\mathbb{C}}(\varphi_1 + i\psi_1), \varphi_2 + i\psi_2\rangle_{\mathbb{C}} &= \langle \Psi_{\mathbb{R}}(f)\varphi_1 + i\Psi_{\mathbb{R}}(f)\psi_1, \varphi_2 + i\psi_2\rangle_{\mathbb{C}} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f\, dE^{\mathbb{R}}_{\varphi_1\varphi_2} + \int_{-\infty}^{+\infty} f\, dE^{\mathbb{R}}_{\psi_1\psi_2} + i\int_{-\infty}^{+\infty} f\, dE^{\mathbb{R}}_{\psi_1\varphi_2} - i\int_{-\infty}^{+\infty} f\, dE^{\mathbb{R}}_{\varphi_1\psi_2} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f\, dE^{\mathbb{C}}_{\varphi_1+i\psi_1,\varphi_2+i\psi_2} = \langle \Psi_{\mathbb{C}}(f)(\varphi_1 + i\psi_1), \varphi_2 + i\psi_2\rangle_{\mathbb{C}}.\end{aligned}$$

Таким образом, $S_{\mathbb{C}} = \Psi_{\mathbb{C}}(f)$. □

Из этой теоремы следует действительный аналог теоремы 8 о функциональном исчислении.

Теорема 10. *Пусть $E^{\mathbb{R}}$ — спектральное разложение самосопряженного оператора $T_{\mathbb{R}}\colon D(T_{\mathbb{R}}) \subset \mathbf{H}_{\mathbb{R}} \to \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$, а $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — измеримая по Борелю функция. Тогда отображение $\Psi_{\mathbb{R}}$ обладает следующими свойствами:*

(a) *Для всех $\varphi \in D\big(\Psi_{\mathbb{R}}(f)\big)$ выполняется соотношение*

$$\|\Psi_{\mathbb{R}}(f)\varphi\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f|^2\, dE^{\mathbb{R}}_{\varphi\varphi}.$$

(b) *Оператор $\Psi_{\mathbb{R}}(f)\colon D\big(\Psi_{\mathbb{R}}(f)\big) \subset \mathbf{H}_{\mathbb{R}} \to \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ является самосопряженным.*

(c) *Если функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ограничена, то оператор $\Psi_{\mathbb{R}}(f)$ ограничен.*

(d) *Для любых измеримых по Борелю функций $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ справедливо включение*

$$\begin{aligned}\Psi_{\mathbb{R}}(f) + \Psi_{\mathbb{R}}(g) &\subset \Psi_{\mathbb{R}}(f + g), \\ \Psi_{\mathbb{R}}(f)\Psi_{\mathbb{R}}(g) &\subset \Psi_{\mathbb{R}}(fg).\end{aligned}$$

В частности, если функция g ограничена, то

$$\begin{aligned}\Psi_{\mathbb{R}}(f) + \Psi_{\mathbb{R}}(g) &= \Psi_{\mathbb{R}}(f + g), \\ \Psi_{\mathbb{R}}(f)\Psi_{\mathbb{R}}(g) &= \Psi_{\mathbb{R}}(fg).\end{aligned}$$

Доказательство. Доказательство вытекает из теорем 8 и 9. □

Замечание 11 (подробнее см. [3]). Из теоремы 10 следует, что для ограниченных функций f и g операторы $\Psi_{\mathbb{R}}(f)$ и $\Psi_{\mathbb{R}}(g)$ коммутируют. Если же функция g ограничена, а f нет, то в общем случае справедливо только включение

$$\Psi_{\mathbb{R}}(g)\Psi_{\mathbb{R}}(f) \subset \Psi_{\mathbb{R}}(f)\Psi_{\mathbb{R}}(g). \tag{8}$$

В следующем предложении приводятся формулы для вычисления элементарных рациональных функций от оператора в комплексном гильбертовом пространстве. Подобные формулы играют важную роль в методах вычислений [5], [6], [15], [16], [17].

Предложение 12. *Пусть* $T_{\mathbb{C}}\colon D(T_{\mathbb{C}}) \subset \mathbf{H}_{\mathbb{C}} \to \mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ *— самосопряженный оператор, а* $E^{\mathbb{C}}$ *— его спектральное разложение. Тогда*

(a) *Для резольвенты оператора* $T_{\mathbb{C}}$ *справедливо представление*

$$(\lambda\mathbf{1}_{\mathbb{C}} - T_{\mathbb{C}})^{-1} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda-\xi}\,dE^{\mathbb{C}}(\xi), \qquad \lambda \in \rho(T_{\mathbb{C}}).$$

(b) *Для рациональной функции*

$$f(\xi) = \frac{\alpha+\beta\xi}{\xi^2+\mu\xi+\nu}, \quad \alpha,\beta,\mu,\nu \in \mathbb{C},$$

корни знаменателя которой не содержатся в $\sigma(T_{\mathbb{C}})$, *справедлива формула*

$$\Psi_{\mathbb{C}}(f) = (\alpha\mathbf{1}_{\mathbb{C}} + \beta\,T_{\mathbb{C}})({T_{\mathbb{C}}}^2 + \mu\,T_{\mathbb{C}} + \nu\mathbf{1}_{\mathbb{C}})^{-1}.$$

Доказательство. (a) Доказано в [13, теорема XII.2.6(e)].

(b) Обозначим через λ_1 и λ_2 корни знаменателя функции f. Заметим, что рациональные функции

$$g(\xi) = \frac{1}{\xi^2+\mu\xi+\nu} = g_1(\xi)g_2(\xi),$$
$$g_1(\xi) = \frac{1}{(\xi-\lambda_1)}, \qquad g_2(\xi) = \frac{1}{(\xi-\lambda_2)}$$

ограничены на $\sigma(T_{\mathbb{C}})$. Поэтому из (a) и теоремы 8(d) следует

$$\begin{aligned}\Psi_{\mathbb{C}}(g) = \Psi_{\mathbb{C}}(g_1g_2) = \Psi_{\mathbb{C}}(g_1)\Psi_{\mathbb{C}}(g_2) = (T_{\mathbb{C}} - \lambda_1\mathbf{1}_{\mathbb{C}})^{-1}(T_{\mathbb{C}} - \lambda_2\mathbf{1}_{\mathbb{C}})^{-1} = \\ = ({T_{\mathbb{C}}}^2 + \mu\,T_{\mathbb{C}} + \nu\mathbf{1}_{\mathbb{C}})^{-1}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\Psi_{\mathbb{C}}(f) = \Psi_{\mathbb{C}}\big(hg\big) = \Psi_{\mathbb{C}}(h)\Psi_{\mathbb{C}}(g) = (\alpha\mathbf{1}_{\mathbb{C}} + \beta\,T_{\mathbb{C}})({T_{\mathbb{C}}}^2 + \mu\,T_{\mathbb{C}} + \nu\mathbf{1}_{\mathbb{C}})^{-1},$$

где $h(\xi) = \alpha + \beta\xi$. □

Приведем действительный аналог этого утверждения.

Предложение 13. *Пусть* $T_{\mathbb{R}}\colon D(T_{\mathbb{R}}) \subset \mathbf{H}_{\mathbb{R}} \to \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ *— самосопряженный оператор, а* $E^{\mathbb{R}}$ *— его спектральное разложение. Тогда*

(a) *Для резольвенты* $(\lambda \mathbf{1}_\mathbb{R} - T_\mathbb{R})^{-1}$ *оператора* $T_\mathbb{R}$ *справедливо представление*

$$(\lambda \mathbf{1}_\mathbb{R} - T_\mathbb{R})^{-1} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda - \xi}\, dE^\mathbb{R}(\xi), \qquad \lambda \in \rho(T_\mathbb{R}).$$

(b) *Для рациональной функции*

$$f(\xi) = \frac{\alpha + \beta\xi}{\xi^2 + \mu\xi + \nu}, \quad \alpha, \beta, \mu, \nu \in \mathbb{R},$$

корни знаменателя которой не содержатся в $\sigma(T_\mathbb{R})$*, справедлива формула*

$$\Psi_\mathbb{R}(f) = (\alpha \mathbf{1}_\mathbb{R} + \beta\, T_\mathbb{R})({T_\mathbb{R}}^2 + \mu\, T_\mathbb{R} + \nu \mathbf{1}_\mathbb{R})^{-1}.$$

Доказательство. Доказательство следует из предложения 12 и теоремы 9. □

5. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Самосопряженный оператор $B_\mathbb{R}\colon D(B_\mathbb{R}) \subset \mathbf{H}_\mathbb{R} \to \mathbf{H}_\mathbb{R}$ называют *неположительно определенным*, если

$$\langle B_\mathbb{R}\varphi, \varphi\rangle_\mathbb{R} \leqslant 0, \qquad \varphi \in D(B_\mathbb{R}).$$

Очевидно, комплексификация неположительно определенного оператора является неположительно определенным оператором.

Предложение 14. *Пусть* $B_\mathbb{R}\colon D(B_\mathbb{R}) \subset \mathbf{H}_\mathbb{R} \to \mathbf{H}_\mathbb{R}$ *— самосопряженный неположительно определенный оператор. Тогда* $\sigma(B_\mathbb{R}) \subset (-\infty, 0]$.

Доказательство. Доказательство полностью аналогично изложенному в [3, теорема 13.31] для случая неотрицательно определенного оператора, действующего в комплексном гильбертовом пространстве. □

Пусть $B_\mathbb{R}\colon D(B_\mathbb{R}) \subset \mathbf{H}_\mathbb{R} \to \mathbf{H}_\mathbb{R}$ — самосопряженный неположительно определенный оператор. Рассмотрим задачу Коши для однородного уравнения

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= B_\mathbb{R} x(t), \\ x(0) &= b. \end{aligned} \tag{9}$$

Для $b \in D(B_\mathbb{R})$ *решением* задачи (9) называют [11] (сильно) дифференцируемую функцию $x\colon [0, +\infty) \to D(B_\mathbb{R})$, удовлетворяющую (9). Такое решение всегда существует и единственно [11]. Обозначим через $U(t)$ оператор с областью определения $D(B_\mathbb{R})$, ставящий в соответствие каждому $b \in D(B_\mathbb{R})$ значение $x(t)$ решения задачи (9). Можно показать [11], что операторы $U(t)$ равномерно ограничены по t на любом отрезке $[0, T]$. Поэтому операторы $U(t)$ допускают единственное продолжение на все $\mathbf{H}_\mathbb{R}$; это продолжение будем обозначать прежним символом $U(t)$. *Обобщенным решением* задачи (9) называют [11] функцию $x(t) = U(t)b$ в случае произвольного $b \in \mathbf{H}_\mathbb{R}$.

Теорема 15. *Пусть* $E^\mathbb{R}$ *— спектральное разложение самосопряженного неположительно определенного оператора* $B_\mathbb{R}\colon D(B_\mathbb{R}) \subset \mathbf{H}_\mathbb{R} \to \mathbf{H}_\mathbb{R}$*. Тогда оператор* $U(t)$ *можно представить в виде*

$$U(t) = \Psi_\mathbb{R}(\exp_t),$$

где

$$\exp_t(\xi) = e^{\xi t}.$$

Таким образом, для обобщенного решения задачи (9) *справедливо представление*

$$x(t) = \Psi_{\mathbb{R}}(\exp_t)b = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{\xi t}\, dE^{\mathbb{R}}(\xi)b.$$

Доказательство. Покажем сначала, что для всех $b \in D(B_{\mathbb{R}})$ функция $x(t) = \Psi_{\mathbb{R}}(\exp_t)b$ является решением задачи Коши (9).

Очевидно, $x(0) = b$. Проверим, что $x(t) \in D(B_{\mathbb{R}})$ при $t > 0$. Заметим, что для функции $u(\xi) = \xi$ в силу теоремы 6 справедливо равенство $\Psi_{\mathbb{R}}(u) = B_{\mathbb{R}}$. Кроме того, функция $\exp_t$ является ограниченной на $(-\infty, 0]$ при всех $t > 0$. Поэтому из (8) следует, что для любого $t > 0$ справедливо включение

$$B_{\mathbb{R}}\Psi_{\mathbb{R}}(\exp_t) = \Psi_{\mathbb{R}}(u)\Psi_{\mathbb{R}}(\exp_t) \supset \Psi_{\mathbb{R}}(\exp_t)\Psi_{\mathbb{R}}(u) = \Psi_{\mathbb{R}}(\exp_t)B_{\mathbb{R}}.$$

Из этого включения видно, что если выражение $\Psi_{\mathbb{R}}(\exp_t)B_{\mathbb{R}}b$ определено, то и $B_{\mathbb{R}}\Psi_{\mathbb{R}}(\exp_t)b$ также определено. Выражение $\Psi_{\mathbb{R}}(\exp_t)B_{\mathbb{R}}b$ имеет смысл при любом $b \in D(B_{\mathbb{R}})$, так как оператор $\Psi_{\mathbb{R}}(\exp_t)$ ограничен. Следовательно, поскольку $B_{\mathbb{R}}\Psi_{\mathbb{R}}(\exp_t)b$ определено, $x(t) = \Psi_{\mathbb{R}}(\exp_t)b$ попадает в $D(B_{\mathbb{R}})$.

Несложно проверить, что $\dot{x}(t) = B_{\mathbb{R}}x(t)$ (доказательство аналогично [11, теорема I.4.1]).

Таким образом, при $b \in D(B_{\mathbb{R}})$ выполняется равенство

$$U(t)b = \Psi_{\mathbb{R}}(\exp_t)b.$$

Так как операторы $U(t)$ и $\Psi_{\mathbb{R}}(\exp_t)$ ограничены и совпадают на плотном подпространстве $D(B_{\mathbb{R}})$ пространства $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}$, они совпадают всюду на $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Морен К. Методы гильбертова пространства / К. Морен. — М.: Мир, 1965. — 572 с.

2. Наймарк М.А. Нормированные кольца / М.А. Наймарк. — М.: Наука, 1968. — 664 с.

3. Рудин У. Функциональный анализ / У. Рудин. — М.: Мир, 1975. — 444 с.

4. Хилле Э. Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле, Р. Филлипс. — М.: Иностранная литература, 1962. — 830 с.

5. Голуб Дж. Матричные вычисления / Дж. Голуб, Ч. Ван Лоун. — М.: Мир, 1999. — 548 с.

6. Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения / Дж. Деммель. — М.: Мир, 2001. — 430 с.

7. Баскаков А.Г. Лекции по алгебре: учебное пособие / А.Г. Баскаков. — Воронеж: ВГУ, 2013. — 159 с.

8. Баскаков А.Г. К спектральной теории линейных отношений / А.Г. Баскаков, А.С. Загорский // Математические заметки. — 2007. — Т. 81, № 1. — С. 17–31.

9. Глазман И.М. Конечномерный линейный анализ / И.М. Глазман, Ю.И. Любич. — М.: Наука, 1969. — 476 с.

10. Печкуров А.В. Комплексификация упорядоченной пары линейных операторов / А.В. Печкуров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2007. — № 2. — С. 143–147.

11. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн. — М.: Наука, 1967. — 464 с.

12. Баскаков А.Г. Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов / А.Г. Баскаков // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2004. — Т. 9. — С. 3–151.

13. Данфорд Н. Линейные операторы. Спектральная теория / Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц. — М.: Мир, 1966. — 1065 с.

14. Халмош П. Теория меры / П. Халмош. — М.: Иностранная литература, 1953. — 292 с.

15. Курбатов В.Г. О нахождении приближенного решения линейного дифференциального уравнения второго порядка / В.Г. Курбатов, М.Н. Орешина // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2003. — № 2. — С. 173–188.

16. Kurbatov V.G. Krylov subspace methods of approximate solving differential equations from the point of view of functional calculus / V.G. Kurbatov, I.V. Kurbatova // Eurasian Mathematical Journal. — 2012. — Vol. 3, no. 4. — P. 53–80.

17. Kurbatov V.G. Interconnect macromodelling and approximation of matrix exponent / V.G. Kurbatov, M.N. Oreshina // Analog Integrated Circuits and Signal Processing. — 2004. — Vol. 40, no. 1. — pp. 5–19.

REFERENCES

1. Moren K. Hilbert space methods. [Moren K. Metody gil'bertova prostranstva]. Moscow: Mir, 1965, 572 p.

2. Naimark M.A. Normed rings. [Naimark M.A. Normirovannyje kolca]. Moscow: Nauka, 1968, 664 p.

3. Rudin W. Functional analysis. [Rudin W. Funkcional'nyj analiz]. Moscow: Mir, 1975, 444 p.

4. Hille E., Phillips R. Functional analysis and semi-groups. [Hille E., Phillips R. Funkcional'nyj analyz i polugruppy]. Moscow: Inostrannaya literatura, 1962, 830 p.

5. Golub G., Van Loan Ch. Matrix computations. [Golub G., Van Loan Ch. Matrichnyje vychisleniya]. Moscow: Mir, 1999, 548 p.

6. Demmel J. Applied numerical linear algebra. [Demmel J. Vychislitel'naya linejnaya algebra. Teoriya i prilozheniya]. Moscow: Mir, 2001, 430 p.

7. Baskakov A.G. Lectures on algebra: a tutorial. [Baskakov A.G. Lekcii po algebre: uchebnoe posobie]. Voronezh, Voronezhskij gosudarstvennyj universitet, 2013, 159 p.

8. Baskakov A.G., Zagorskii A. S. Spectral theory of linear relations on real Banach spaces. [Baskakov A.G., Zagorskii A. S. K spektral'noj teorii linejnyx otnoshenij]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2007, vol. 81, no. 1, pp. 17–31.

9. Galsman I.M., Luybich Yu.I. Finite-dimensional linear analysis. [Galsman I.M., Luybich Y.I. Konechnomernyj linejnyj analiz]. Moscow: Nauka, 1969, 476 p.

10. Pechkurov A.V. Complexification of ordered pairs of linear operators. [Pechkurov A.V. Kompleksifikaciya uporyadochennoj pary linejnyx operatorov]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2007, no. 2, pp. 143–147.

11. Krein S.G. Linear differential equations in a banach space. [Krein S.G. Linejnyje differncial'nye uravneniya v banahovom prostranstve]. Moscow: Nauka, 1967, 464 p.

12. Baskakov A.G. Representation theory for Banach algebras, Abelian groups, and semigroups in the spectral analysis of linear operators. [Baskakov A.G. Teoriya predstavlenij banahovyx algebr, abelevyx grupp i polugrupp v spektral'nom analize linejnyx operatorov]. *Sovremennaya matematika. Fundamental'nye napravleniya — Modern mathematics. Fundamental directions*, 2004, vol. 9, pp. 3–151.

13. Dunford N., Schwartz J.T. Linear operators. Spectral theory. [Dunford N., Schwartz J.T. Linejnye operatory. Spectral'naya teoriya]. Moscow: Mir, 1966, 1065 p.

14. Halmos P. Measure Theory. [Halmos P. Teoriya mery]. Moscow: Inostrannaya literatura, 1953, 292 p.

15. Kurbatov V.G., Oreshina M.N. On approximate solution of the second order linear differential equation. [Kurbatov V.G., Oreshina M.N. O nahozhdenii priblizhennogo resheniya linejnogo differencial'nogo uravneniya vtorogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2003, no. 2, pp. 173–188.

16. Kurbatov V.G., Kurbatova I.V. Krylov subspace methods of approximate solving differential equations from the point of view of functional calculus. Eurasian Mathematical Journal, 2012, vol. 3, no. 4, pp. 53–80.

17. Kurbatov V.G., Oreshina M.N. Interconnect macromodelling and approximation of matrix exponent. Analog Integrated Circuits and Signal Processing, 2004, vol. 40, no. 1, pp. 5–19.

Орешина М.Н., кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики Липецкого государственного технического университета, Липецк, Россия
E-mail: m_oreshina@mail.ru
Тел.: (4742) 32–80–51

Oreshina M.N., Candidate of Science in Phisics and Mathematics, associate professor of the Department of Applied Mathematics, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russia
E-mail: m_oreshina@mail.ru
Tel.: (4742) 32–80–51