УДК 517.9

РАЗНОСТНАЯ ФОРМУЛА СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО ЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

В. З. Мешков[1], И. П. Половинкин[1], М. В. Половинкина[2], Ю. Д. Ермакова[1], С. А. Рабееах[1]

[1] — *Воронежский государственный университет,*
[2] — *Воронежский государственный университет инженерных технологий*

Поступила в редакцию 20.12.2014 г.

Аннотация. В рамках подхода, связанного с нахождением сопровождающего распределения дифференциального оператора (символический подход), в работе получена формула среднего значения для двумерного линейного однородного гиперболического уравнения третьего порядка с постоянными коэффициентами, простыми характеристиками и однородным символом. Доказанная формула среднего значения может быть интерпретирована как распространение на рассматриваемый случай известной теоремы о среднем (принципа Асгейрссона) для уравнения колебаний струны, которая, в свою очередь, тоже может быть сконструирована с помощью символического подхода из формулы среднего для двумерного уравнения первого порядка. Кроме того, эта формула представляет собой точное разностное соотношение для решения указанного уравнения.

Ключевые слова: формула среднего, сопровождающее распределение, разностное соотношение.

DIFFERENCE MEAN-VALUE FORMULA FOR TWO-DIMENSIONAL LINEAR HYPERBOLIC EQUATIONS OF THIRD ORDER

V. Z. Meshkov, I. P. Polovinkin, M. V. Polovinkina, Yu. D. Ermakova, S. A. Rabeeakh

Abstract. In the framework of a symbolic approach to mean-value formulas we obtained a mean-value formula for the two-dimensional linear homogeneous hyperbolic equation of the third order with constant coefficients, simple characteristics and a homogeneous symbol. The proven formula can be interpreted as the expansion into the case of the well-known mean-value theorem (principle of Asgeirsson) for the string vibration equation, which, in turn, can also be designed using the symbolic approach from the mean-value formulas for two-dimensional equations of the first order. In addition, this formula is an exact difference scheme for the specified equations.

Keywords: mean-value formula, accompanying distribution, difference scheme.

В разных разделах и прикладных задачах под понятиями "формула среднего", "теорема о среднем" часто подразумевают несколько разнородные факты. Так или иначе, многообразные результаты для различных типов уравнений объединяет то, что в них участвует среднее (возможно, с весом) достаточно гладкой функции по некоторому множеству, чаще всего по сфере.

Теоремы о среднем для эллиптических уравнений наиболее широко известны. Базовым результатом для использования в приложениях является следующая классическая теорема о среднем (см., напр., [1]), восходящая к Гауссу: для того, чтобы непрерывная в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ функция $u(x)$ была гармонической в Ω, необходимо и достаточно, чтобы для всякой точки $x \in \Omega$ и всякого значения $r > 0$, такого, что замыкание шара $B(x,r) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \ |\xi - x| < r\}$ вложено в Ω, ее значение в точке x равнялось среднему по границе шара (по шару). Этот факт обобщается на эллиптические уравнения второго порядка. В работах В.А. Ильина и Е.И. Моисеева (см. [2]–[5]) устанавливались формулы среднего для эллиптических операторов более общего вида. Эти формулы использовались авторами при изучении вопросов, связанных со спектральным разложением по собственным функциям эллиптических операторов. Следует упомянуть и о другом подходе к изучению средних для двух операндов, включающих средние арифметические, средние геометрические, средние гармонические [6]. В работах [11], [12] был применен подход к получению теорем о среднем, связанный с анализом символа оператора. Этот подход был обобщен в работе [13], где он был назван символическим. Ниже, основываясь на этой методике, мы выведем формулу среднего значения для уравнения

$$(a_1\partial/\partial x + b_1\partial/\partial t)\,(a_2\partial/\partial x + b_2\partial/\partial t)\,(a_3\partial/\partial x + b_3\partial/\partial t)\,u = 0. \tag{1}$$

Через $\widehat{f}$ будем обозначать преобразование Фурье распределения $f \in S'$. Этим же символом $\widehat{f}(w)$ мы будем пользоваться и для обозначения преобразования Фурье - Лапласа распределения f с компактным носителем, представляющего собой в этом случае целую аналитическую функцию комплексной переменной $w \in \mathbb{C}^n$(см. [10]). Далее, пусть

$$D_j = -i\frac{\partial}{\partial x_j},\ j = 1,\dots,n,\quad D = (D_1,\dots,D_n),\ x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}.$$

где мультииндекс $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ имеет неотрицательные целые координаты. Через $\delta(x - x_0)$ обозначается мера Дирака, сосредоточенная в точке x_0.

Пусть $P(w)$ — многочлен m−й степени. Рассмотрим уравнение

$$P(D)u = 0. \tag{2}$$

Определение 1. Распределение Φ с компактным носителем назовем сопровождающим уравнение (2), если для любого решения $u(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ имеет место равенство

$$\langle \Phi, u\rangle = 0. \tag{3}$$

Будем также в этом случае называть распределение Φ сопровождающим оператор $P(D)$ или, короче, сопровождением оператора $P(D)$ и уравнения (2).

Отметим сразу же, что для любого многочлена $P(D)$ существуют тривиальные сопровождающие распределения вида $Q(D)P(D)\delta(x - x_0)$, где $Q(D)$ — произвольный многочлен. Между тем теорема о среднем для бесконечно дифференцируемых решений эквивалентна существованию некоторого нетривиального сопровождающего распределения. Здесь мы придерживаемся терминологии работы [13]. На распределение, которое мы назвали сопровождением оператора, в работах [11], [12] наложено требование, согласно которому, это распределение (оно там не называется сопровождающим) должно быть мерой. В рамках настоящей статьи мы будем иметь дело только с такими распределениями (с дельта-функцией Дирака), однако результаты работы [13] распространяются на произвольные финитные распределения, поэтому мы придерживаемся введенной там терминологии. Базовыми результатами для дальнейшего повествования будут следующие утверждения.

Теорема 2. *(см. [13]). Для того, чтобы распределение Φ с компактным носителем являлось сопровождающим уравнение (2), необходимо и достаточно, чтобы имело место представление*

$$\widehat{\Phi}(w) = P(w)\widehat{\psi}(w),\ w \in \mathbb{C}^n, \tag{4}$$

где $\widehat{\psi}(w)$ – целая аналитическая функция.

Теорема 3. *(см. [13]). Пусть $P(D) = P_1(D)P_2(D)$, где P_1 и P_2 суть многочлены. Пусть Φ_l — распределение с компактным носителем, сопровождающее оператор $P_l(D)$, $l = 1, 2$. Распределение*

$$\Phi = \Phi_1 * \Phi_2$$

является сопровождающим оператор $P(D) = P_1(D)P_2(D)$.

Рассмотрим уравнение

$$(a_1\partial/\partial x + b_1\partial/\partial t)\,(a_2\partial/\partial x + b_2\partial/\partial t)\,(a_3\partial/\partial x + b_3\partial/\partial t)\,u = 0. \tag{1}$$

Будем называть прямую, заданную уравнением

$$b_j x - a_j t = const, \quad j = 1, 2, 3, \tag{5}$$

характеристикой $j-$го типа для уравнения (1). Будем считать, что все характеристики уравнения (1) просты. Пусть $M = (x, t)$. Рассмотрим финитные распределения вида

$$\Phi_j(M) = \delta(M - K_j) - \delta(M - N_j), \quad j = 1, 2, 3, \tag{6}$$

где каждая пара точек

$$K_j = (\xi_j, \tau_j), N_j = (\eta_j, \theta_j), \quad j = 1, 2, 3, \tag{7}$$

лежит на характеристике $j-$го типа. Совершенно очевидно, что каждое распределение $\Phi_j(M)$ является сопровождением оператора

$$(a_j\partial/\partial x + b_j\partial/\partial t)\,, \quad j = 1, 2, 3. \tag{8}$$

Поэтому, в силу теоремы 3, финитное распределение

$$\Phi(M) = \Phi_1(M) * \Phi_2(M) * \Phi_3(M) \tag{9}$$

будет сопровождением уравнения (1). Опишем это сопровождение и соответствующую ему формулу среднего. Принимая во внимание известную формулу

$$\delta(M - M_1) * \delta(M - M_2) = \delta(M - M_1 - M_2), \tag{10}$$

мы получим

$$\Phi(M) = (\delta(M - K_1) - \delta(M - N_1))*$$

$$*(\delta(M - K_2) - \delta(M - N_2)) * (\delta(M - K_3) - \delta(M - N_3)) =$$

$$= \sum_{s=1}^{4} \delta(M - A_s) - \sum_{s=1}^{4} \delta(M - B_s) \tag{11}$$

где

$$A_1 = (\alpha_1, \mu_1) = K_1 + K_2 + K_3, \quad A_2 = (\alpha_2, \mu_2) = K_3 + N_1 + N_2, \tag{12}$$

$$A_3 = (\alpha_3, \mu_3) = K_2 + N_1 + N_3, \quad A_4 = (\alpha_4, \mu_4) = K_1 + N_2 + N_3; \tag{13}$$

$$B_1 = (\beta_1, \rho_1) = K_2 + K_3 + N_1, \quad B_2 = (\beta_2, \rho_2) = K_1 + N_2 + K_3, \tag{14}$$

$$B_3 = (\beta_3, \rho_3) = K_1 + K_2 + N_3, \quad B_4 = (\beta_4, \rho_4) = N_1 + N_2 + N_3. \tag{15}$$

Для описания связей между точками $A_s,\ B_s,\ \ s = 1,2,3,4$, удобно использовать "матрицу смежности" особого вида. В этой матрице строки соответствуют точкам $A_s,\ \ s = 1,2,3,4,$, а столбцы — точкам $B_m,\ \ m = 1,2,3,4$. На пересечении $s-$й строки и $m-$го столбца стоит число j, если точки A_s и B_m лежат на характеристике $j-$го типа. Если же никакая характеристика на проходит через пару точек вида A_s и B_m, то на пересечении $s-$й строки и $m-$го столбца стоит ноль. Надобности в столбцах A_s, $s = 1,2,3,4$, и строках B_m, $m = 1,2,3,4$ нет, поскольку никакие характеристики на проходят через пары точек вида $A_s,\ A_m,\ s \neq m,$, $B_s,\ B_m,\ s \neq m$. Указанная матрица будет иметь вид

$$\begin{array}{ccccc} & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ A_1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ A_2 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ A_3 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ A_4 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{array} \tag{16}$$

Конечно, то, что матрица смежности имеет именно вид (16), подлежит доказательству. Но это несложно. Например, для координат точки $A_3 = (\alpha_3, \mu_3) = K_2 + N_1 + N_3$, учитывая (5) и (7), имеем:

$$b_1\alpha_3 - a_1\mu_3 = b_1(\xi_2 + \eta_1 + \eta_3) - a_1(\tau_2 + \theta_1 + \theta_3) =$$

$$= b_1(\xi_2 + \xi_1 + \eta_3) - a_1(\tau_2 + \tau_1 + \theta_3) = b_1\beta_3 - a_1\rho_3,$$

откуда следует, что характеристика первого типа, проходящая через точку A_3, проходит и через точку B_3, что приводит к появлению числа 1 на пересечении третьей строки и третьего столбца. Аналогично проверяются все остальные элементы матрицы.

Без ограничения общности далее можно считать, что

$$a_1 = a_2 = b_1 = 1, b_2 = -1. \tag{17}$$

Возникает закономерный вопрос: можно ли утверждать, что финитное распределение вида

$$\Phi(M) = \sum_{s=1}^{4} \delta(M - A_s) - \sum_{s=1}^{4} \delta(M - B_s)$$

для всякого набора точек $A_s,\ B_s,\ \ s = 1,2,3,4$, связанных характеристиками так, как это описано матрицей (16), будет сопровождением уравнения (1)? Если нам даны такие точки, то соотношения (12)–(15) можно рассматривать как систему уравнений относительно искомых точек (или их координат) $K_1, K_2, K_3, N_1, N_2, N_3$. Это переопределенная система линейных уравнений. Обычными средствами (например, с помощью метода Гаусса) доказывается, что критерием ее совместности является одновременное выполнение равенств (они получены с учетом (17))

$$A_1 - B_1 = B_2 - A_2 = A_4 - B_4, A_1 - B_3 = A_2 - B_4, \quad A_2 - B_1 = B_4 - A_3. \tag{18}$$

Соотношения (18) заведомо выполнены для точек, описанных матрицей (16). Теперь осталось стандартным образом распространить действие функционала Φ на произвольные регулярные решения уравнения (1). Таким образом, мы пришли к следующему утверждению.

Теорема 4. *Для любых восьми точек A_s, B_s, $s = 1, 2, 3, 4$, связь между которыми описывается матрицей (16), имеет место разностное соотношение (формула среднего значения)*

$$\sum_{s=1}^{4} u(A_s) - \sum_{s=1}^{4} u(B_s) = 0,$$

где $u = u(x, t)$ — регулярное решение уравнения (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гилбарг, Д. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка / Д. Гилбарг, П. Трудингер. — М.: Наука, 1989. — 464 с.

2. Ильин, В.А. О рядах Фурье по фундаментальным системам функций оператора Бельтрами / В.А. Ильин// Дифференциальные уравнения. — 1969. — Т. 5, № 11. — С. 1940–1978.

3. Ильин, В.А. Некоторые свойства регулярного решения уравнения Гельмгольца в плоской области / В.А. Ильин // Математич. заметки. — 1974. — Т. 15, № 6. — С. 885–890.

4. Ильин, В.А. Формула среднего значения для присоединенных функций оператора Лапласа / В.А. Ильин, Е.И. Моисеев // Дифференциальные уравнения. — 1981. — Т. 17, № 10. — С. 1908–1910.

5. Моисеев, Е.И. Асимптотическая формула среднего значения для регулярного решения дифференциального уравнения / Е.И. Моисеев // Дифференциальные уравнения. — 1980. — Т. 16, № 5. — С. 827–844.

6. Ситник, С.М. Обобщения неравенств Коши-Буняковского методом средних значений и их приложения / С.М. Ситник // Черноземный альманах научных исследований, Серия: "Фундаментальная математика". – 1(1), Специальный выпуск: “Избранные труды участников Воронежского математического семинара по математическому анализу, теории функций и дифференциальным уравнениям”. — 2005. — С. 3–42.

7. Йон Ф. Плоские волны и сферические средние / Ф. Йон. — М.: Издательство иностранной литературы, 1958. — 158 с.

8. Бицадзе, А.В. К теории уравнений смешанного типа в многомерных областях / А.В. Бицадзе, А.М. Нахушев // Дифференциальные уравнения. — 1974. — Т. 10, № 12. — С. 2184–2191.

9. Гельфанд, И.М. Обобщенные функции и действия над ними / И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов. — М.: Государственное издательство физико–математической литературы, 1958. — 440 с.

10. Хермандер, Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1 / Л. Хермандер. — М.: Мир, 1986. — 464 с.

11. Zalcman, L. Mean values and differential equations / L. Zalcman // Israel J.Math. — 1973. — V. 14. — P. 339–352.

12. Покровский, А. В. Теоремы о среднем для решений линейных дифференциальных уравнений с частными производными / А. В. Покровский // Математические заметки. — 1998. — Т. 64, вып. 2. — С. 260–272.

13. Мешков, В. З. О получении новых формул среднего значения для динейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами / В. З. Мешков, И. П. Половинкин // Дифференциальные уравнения. — 2011. — Т. 47, № 12. — С. 1724–1731.

14. Баскаков, А.Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений / А.Г. Баскаков // Успехи математических наук. — 2013. — Т. 68, вып. 1(409). — С. 77–128.

15. Половинкин, И. П. Дополнения к свойствам средних значений решений линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами / И. П. Половинкин // Дифференциальные уравнения. — 2011. — Т. 47, № 11. — С. 1669–1671.

16. Баев А.Д. О единственности решения математической модели вынужденных колебаний струны с особенностями / А.Д. Баев, С.А. Шабров, Меач Мон // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 50–55.

17. Лылов, Е.В. Анализ математической модели, реализуемой в виде гиперболического уравнения с двумя независимыми переменными / Е.В. Лылов, С.А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 2. — С. 230–235.

REFERENCES

1. Gilbarg D., Trudinger N. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. [Gilbarg D., Trudinger P. E'llipticheskie differencial'nye uravneniya s chastnymi proizvodnymi vtorogo poryadka]. Moscow: Nauka, 1989, 464 p.

2. Il'in V.A., Fourier Series in Fundamental Systems of Functions of the Beltrami Operator. [Il'in V.A. O ryadax Fur'e po fundamental'nym sistemam funkcij operatora Bel'trami]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 1969, vol. 5, no. 11, pp. 1940–1978.

3. Il'in V.A., Properties of a Regular Solution of the Helmholtz Equation in a Region of a Plane. [Il'in V.A. Nekotorye svojstva regulyarnogo resheniya uravneniya Gel'mgol'ca v ploskoj oblasti]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 1974, vol. 15, iss. 6, pp. 885–890.

4. Il'in V.A. and Moiseev E.I., A Mean Value Formula for the Associated Equation of the Laplace Operator. [Il'in V.A., Moiseev E.I. Formula srednego znacheniya dlya prisoedinennyx funkcij operatora Laplasa]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 1981, vol. 17, no. 10, pp. 1908–1910.

5. Moiseev E.I. Asymptotic Mean Value Formula for the Regular Solution of a Differential Equation. [Moiseev E.I. Asimptoticheskaya formula srednego znacheniya dlya regulyarnogo resheniya differencial'nogo uravneniya]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 1980, vol. 16, no. 5, pp. 827–844.

6. Sitnik S.M. Generalization of Cauchy–Bunyakowsky Inequalities by method of averages and their applications. [Sitnik S.M. Obobshheniya neravenstv Koshi-Bunyakovskogo metodom srednix znachenij i ix prilozheniya]. *Chernozemnyj al'manaxnauchnyx issledovanij, Seriya: "Fundamental'naya matematika". – 1(1), Special'nyj vypusk: "Izbrannye trudy uchastnikov Voronezhskogo matematicheskogo seminara po matematicheskomu analizu, teorii funkcij i differencial'nym uravneniyam" — Black Earth Region Almanac of Scientific Research, Series: "Fundamental mathematics"(Chernozemniy Al'manah nauchnih issledovaniy, Seriya "Fundamental'naya matematika") — 1(1), Special issue "Selected papers of the participants of the Voronezh mathematical seminar of mathematical analysis, theory of functions and differential equations"*, 2005, pp. 3–42.

7. John F., Plane Waves and Spherical means. [Jon F. Ploskie volny i sfericheskie srednie]. Moskow, 1958, 158 p.

8. Bitsadze A.V., Nakhushev A.M. On the Theory of Equations of Mixed Type in Multidimentional Domains. [Bicadze A.V., Naxushev A.M. K teorii uravnenij smeshannogo tipa v mnogomernyx oblastyax]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 1974, vol. 10, no. 12, pp. 2184–2191.

9. Gel'fand I.M., Shilov G.E. Generalized Functions and Related Operations. [Gel'fand I.M., Shilov G.E. Obobshhennye funkcii i dejstviya nad nimi]. Moscow, 1958, 440 p.

10. Hörmander L., The Analysis of Linear Differential Operators. [Xermander, L. Analiz linejnyx differencial'nyx operatorov s chastnymi proizvodnymi. T. 1]. Moscow: Mir, 1986, 464 p.

11. Zalcman L. Mean values and differential equations. Israel J. Math., 1973, vol. 14, pp. 339–352.

12. Pokrovskii A.V. Mean value theorems for solutions of linear partial differential equations. [Pokrovskij A. V. Teoremy o srednem dlya reshenij linejnyx differencial'nyx uravnenij s chastnymi

proizvodnymi]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 1998, vol. 64, iss. 2, pp. 260–272.

13. Meshkov V.Z., Polovinkin I.P. On the Derivation of New Mean-Value Formulas for Linear Differential Equations. [Meshkov V. Z., Polovinkin I. P. O poluchenii novyx formul srednego znacheniya dlya dinejnyx differencial'nyx uravnenij s postoyannymi koe'fficientami]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2011, vol. 47, no. 12, pp. 1724–1731.

14. Baskakov A.G. Analysis of linear differential equations by methods of the spectral theory of difference operators and linear relations. [Baskakov, A.G. Issledovanie linejnyx differencial'nyx uravnenij metodami spektral'noj teorii raznostnyx operatorov i linejnyx otnoshenij]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 2013, vol. 68, no. 1(409), pp. 77–128.

15. Polovinkin I.P. Additions to the properties of the mean values of solutions of linear differential equations with constant coefficients. [Polovinkin I. P. Dopolneniya k svojstvam srednix znachenij reshenij linejnyx differencial'nyx uravnenij s postoyannymi koe'fficientami]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2011, vol. 47, no. 11, pp. 1669–1671.

16. Baev A.D., Shabrov S.A., Meach Mon Uniqueness Of The Solution Mathematical Model Of Forced String Oscillation Singularities. [Baev A.D., Shabrov S.A., Meach Mon O edinstvennosti resheniya matematicheskoj modeli vynuzhdennyx kolebanij struny s osobennostyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, iss. 1, pp. 50–55.

17. Lylov E.V., Shabrov S.A. Analysis of the mathematical model, implemented in the form of hyperbolic equations with two independent variables. [Lylov E.V., Shabrov S.A. Analiz matematicheskoj modeli, realizuemoj v vide giperbolicheskogo uravneniya s dvumya nezavisimymi peremennymi]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 2, pp. 230–235.

Мешков Виктор Захарович, Доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, факультет прикладной математики, информатики и механики, кафедра математического и прикладного анализа, Воронеж, Россия
Тел.: (8-4732)-208348

Meshkov Viktor Z., Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Professor, Department of Applied mathematics, Informatics and mechanics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
Tel.: (8-4732)-208348

Половинкин Игорь Петрович, доктор физико-математических наук, доцент, Воронежский государственный университет, факультет прикладной математики, информатики и механики, кафедра математического и прикладного анализа, Воронеж, Россия
E-mail: polovinkin@yandex.ru
Тел.: (8-4732)-208348

Polovinkin Igor P., Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Applied mathematics, Informatics and mechanics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: polovinkin@yandex.ru
Tel.: (8-4732)-208348

Половинкина Марина Васильевна, кандидат физико-математических наук, доцент, Воронежский государственный университет инженерных технологий, кафедра высшей математики, Воронеж, Россия
E-mail: polovinkina-marina@yandex.ru
Тел.: (8-4732)-208348

Polovinkina Marina V., doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Applied mathematics, Informatics and mechanics, Voronezh State University of engineering technologies, Voronezh, Russia
E-mail: polovinkina-marina@yandex.ru
Tel.: (8-4732)-208348

Ермакова Юлия Дмитриевна, бакалавр прикладной математики, Воронежский государственный университет, факультет прикладной математики, информатики и механики, кафедра математического и прикладного анализа, Воронеж, Россия
Тел.: (8-4732)-208348

Ermakova Julia. D., a postgraduate student, Department of Applied mathematics, Informatics and mechanics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
Tel.: (8-4732)-208348

Рабееах Светлана Александровна, аспирант, Воронежский государственный университет, факультет прикладной математики, информатики и механики, кафедра математического и прикладного анализа, Воронеж, Россия
E-mail: srabeeakh@mail.ru
Тел.: (8-4732)-208348

Rabeeakh Svetlana A., a postgraduate student, Department of Applied mathematics, Informatics and mechanics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: srabeeakh@mail.ru
Tel.: (8-4732)-208348