УДК 517.9

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛУГРУПП, ПОРОЖДЕННЫХ ВОЗМУЩЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ ВТОРОЙ ПРОИЗВОДНОЙ С УСЛОВИЕМ НЕЙМАНА

И. М. Гудошников

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 29.04.2014 г.

Аннотация. В данной статье рассматривается дифференциальный оператор второй производной над пространством непрерывных на отрезке функций с условием Неймана. Показывается, что масштабированная полугруппа, порожденная этим оператором, является аналитической, равномерно экспоненциально устойчивой, а так же, что она сохраняет устойчивость при возмущениях своего генератора ограниченным положительным оператором, связанным с исходным дифференциальным оператором условием на спектральный радиус. Приводятся примеры таких возмущений в виде операторов с запаздыванием, причем наличие запаздывания позволяет в некоторых случаях улучшить условие устойчивости.

Ключевые слова: сильно непрерывные полугруппы, аналитические полугруппы, конус, устойчивость полугрупп, оператор Лапласа.

ON STABILITY OF SEMIGROUPS, GENERATED BY PERTURBED DIFFERENTIAL OPERATOR DEFINED BY SECOND DERIVATIVE AND NEUMANN CONDITIONS

I. M. Gudoshnikov

Abstract. The second derivative differential operator acting on the space of continious functions with Neumann boundary condition is considered in this paper. The following facts are proven here: a rescaled semigroup generated by the operator is analytic, uniformly exponentially stable and it preserves its stability when its generator is perturbed by a bounded positive operator, which must satisfy a special condition. Also this paper includes examples of such perturbations in the form of operators with delay. The delay allows to improve the stability conditions in some cases.

Keywords: strongly continious semigroup, analytic semigroup, cone, Ordered Banach Space, semigroup stability, Laplace operator.

В данной статье показывается, что для оператора

$$-\Gamma : f \mapsto f'' - af, \quad a > 0$$

$$-\Gamma : \{f \in C^2[0,1] : f'(0) = f'(1) = 0\} \to C[0,1],$$

полугруппа $e^{-\Gamma + M}$ является устойчивой для инвариантных относительно конуса неотрицательных функций ограниченных возмущений M, удовлетворяющих специальному условию. Отметим, что такие возмущения погут включать в себя сдвиги функций. Свойства оператора второй производной, необходимые для выполнения условий теоремы 2 хорошо известны и все

же мы приведем здесь прямое доказательство секториальности, основанное на вычислении функции Грина, соответствующей спектральной краевой здаче и прямой оценке нормы резольвенты в пространастве $C[0,1]$. Полученный результат может быть расширен на n-мерный оператор Лапласа.

Следует отметить, что результаты, близкие к изложенным в разделе были получены А. И. Перовым [1] для случая неотрицательных матриц.

1. ПРЕДШЕСТВУЮЩИЕ ТЕОРЕМЫ

Теорема 1. *Пусть F — вещественное банахово пространство,*
$K \subset F$ — воспроизводящий конус, норма в пространстве F монотонна по отношению к K.
Пусть заданы линейные операторы:
$\Gamma : D(\Gamma) \subset F \to F$ такой что $-\Gamma$ — производящий оператор сильно непрерывной полугруппы, причем $e^{-\Gamma t} \geqslant 0$ в смысле K для всех $t \geqslant 0$,
$M : F \to F$, ограничнный и $M \geqslant 0$ в смысле K
и композиция $\Gamma^{-1}M$ вполне непрерывна.
Тогда при любом $t > 0$

$$\rho(e^{(-\Gamma+M)t}) < 1 \Longrightarrow \rho(\Gamma^{-1}M) < 1$$

Теорема 2. *Пусть F — вещественное банахово пространство, а $K \subset F$ — воспроизводящий конус.*
Пусть заданы линейные операторы:
$\Gamma : D(\Gamma) \subset F \to F$, такой, что Γ^{-1} вполне непрерывен, $-\Gamma_C$ является производящим оператором аналитической и равномерно экспоненциально устойчивой полугруппы, а $e^{-\Gamma t}$ положительны в смысле K для всех $t \geqslant 0$.
$M : F \to F$ — ограничен и $M \geqslant 0$ в смысле K. Тогда для любого $t > 0$

$$\rho(\Gamma^{-1}M) < 1 \Longrightarrow \rho(e^{(-\Gamma+M)t}) < 1.$$

Здесь Γ_C — комплексификация оператора Γ, см. [3].

2. ОПЕРАТОР ВТОРОЙ ПРОИЗВОДНОЙ С УСЛОВИЯМИ НЕЙМАНА

2.1. Исходный оператор

Пусть пространство $F = C[0,1]$, а оператор L задан дифференциальным выражением

$$l(f) = f''$$

и краевыми условиями

$$\begin{aligned} f'(0) &= 0 \\ f'(1) &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

то есть

$$L : D(L) = \{f \in C^2[0,1] : f'(0) = f'(1) = 0\} \subset F \to F$$

$$L : f \mapsto f''$$

Оператор L имеет собственное значение $\lambda_0 = 0$ с собственными векторами $f_0(t) \equiv c$ и собственные значения $\lambda_k = -\pi^2 k^2, k \in \mathbb{N}$ с собственными векторами $f_k(t) = c \cos \pi k t$. Этим его спектр исчерпывается.

2.2. Функция Грина и резольвента

Найдем резольвенту оператора L для регулярных λ, то есть оператор $(L - \lambda I)^{-1}$. Для этого построим функцию Грина краевой задачи

$$\begin{cases} f'' - \lambda f = g, \\ U_1(f) := f'(0) = 0, \\ U_2(f) := f'(1) = 0; \end{cases} \tag{2}$$

Нам известна фундаментальная система решений однородного уравнения:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= e^{\sqrt{\lambda} t} \\ f_2(t) &= e^{-\sqrt{\lambda} t} \end{aligned}$$

и производные ее членов:

$$\begin{aligned} f_1'(t) &= \sqrt{\lambda} e^{\sqrt{\lambda} t} \\ f_2'(t) &= -\sqrt{\lambda} e^{-\sqrt{\lambda} t} \end{aligned}$$

Построим функцию Грина следуя доказательству теоремы 1 [5, I.§3.3]. Известно, что

$$G_\lambda(x, \xi) = \begin{cases} 0 \leqslant x < \xi \leqslant 1 : a_1(\xi) f_1(x) + a_2(\xi) f_2(x) \\ 0 \leqslant \xi < x \leqslant 1 : b_1(\xi) f_1(x) + b_2(\xi) f_2(x) \end{cases} \tag{3}$$

где a и b удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} a_1(\xi) f_1(\xi) + a_2(\xi) f_2(\xi) - (b_1(\xi) f_1(\xi) + b_2(\xi) f_2(\xi)) = 0 \\ a_1(\xi) f_1'(\xi) + a_2(\xi) f_2'(\xi) - (b_1'(\xi) f_1(\xi) + b_2'(\xi) f_2(\xi)) = -1 \end{cases}$$

Обозначив

$$\begin{aligned} c_1 &= b_1 - a_1, \\ c_2 &= b_2 - a_2, \end{aligned} \tag{4}$$

получим систему:

$$\begin{cases} c_1(\xi) e^{\sqrt{\lambda}\xi} + c_2(\xi) e^{\sqrt{-\lambda}\xi} = 0; \\ c_1(\xi) \sqrt{\lambda} e^{\sqrt{\lambda}\xi} - \sqrt{\lambda} e^{-\sqrt{\lambda}\xi} = 1. \end{cases}$$

Решаем:

$$W(\xi) = \begin{vmatrix} e^{\sqrt{\lambda}\xi} & e^{\sqrt{-\lambda}\xi} \\ \sqrt{\lambda} e^{\sqrt{\lambda}\xi} & -\sqrt{\lambda} e^{\sqrt{-\lambda}\xi} \end{vmatrix} = -\sqrt{\lambda} e^{(\sqrt{\lambda}\xi - \sqrt{\lambda}\xi)} - \sqrt{\lambda} e^{(\sqrt{\lambda}\xi - \sqrt{\lambda}\xi)} = -2\sqrt{\lambda},$$

$$W_1(\xi) = \begin{vmatrix} 0 & e^{-\sqrt{\lambda}\xi} \\ 1 & -\sqrt{\lambda} e^{-\sqrt{\lambda}} \end{vmatrix} = -e^{-\sqrt{\lambda}\xi}, \quad W_2(\xi) = \begin{vmatrix} e^{\sqrt{\lambda}\xi} & 0 \\ \sqrt{\lambda} e^{\sqrt{\lambda}} & 1 \end{vmatrix} = e^{\sqrt{\lambda}\xi}.$$

$$c_1(\xi) = \frac{W_1(\xi)}{W(\xi)} = \frac{-e^{-\sqrt{\lambda}\xi}}{-2\sqrt{\lambda}} = \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\xi}}{2\sqrt{\lambda}}, \quad c_2(\xi) = \frac{W_2(\xi)}{W(\xi)} = \frac{e^{\sqrt{\lambda}\xi}}{-2\sqrt{\lambda}} = -\frac{e^{\sqrt{\lambda}\xi}}{2\sqrt{\lambda}}.$$

Краевые условия дают систему

$$\begin{cases} U_1(G_\lambda) = 0, \\ U_2(G_\lambda) = 0; \end{cases}$$

из который с учетом (3) и (4) (см. [5, I.§3.3]) получаем систему

$$\begin{array}{l} b_1(\xi)\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}\cdot 0} - b_2(\xi)\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}\cdot 0} = \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\xi}}{2\sqrt{\lambda}}\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}\cdot 0} + \frac{e^{\sqrt{\lambda}\xi}}{2\sqrt{\lambda}}\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}\cdot 0}; \\ b_1(\xi)\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}\cdot 1} - b_2(\xi)\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}\cdot 1} = 0, \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} b_1(\xi)\sqrt{\lambda} - b_2(\xi)\sqrt{\lambda} = \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\xi}}{2} + \frac{e^{\sqrt{\lambda}\xi}}{2}; & \sqrt{\lambda}(b_1(\xi) - b_2(\xi)) = \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\xi}+e^{\sqrt{\lambda}\xi}}{2}; \\ b_1(\xi)e^{\sqrt{\lambda}} = b_2(\xi)e^{-\sqrt{\lambda}}, & b_1(\xi) = b_2(\xi)e^{-2\sqrt{\lambda}}, \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \sqrt{\lambda}b_2(\xi)(e^{-2\sqrt{\lambda}} - 1) = \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\xi}+e^{\sqrt{\lambda}\xi}}{2}; \\ b_1(\xi) = b_2(\xi)e^{-2\sqrt{\lambda}}. \end{array}$$

Заметим, что $\sqrt{\lambda}(e^{-2\sqrt{\lambda}} - 1) = 0 \Rightarrow \{-\pi^2k^2 : k \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$. Продолжим:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_2(\xi) = \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\xi}+e^{\sqrt{\lambda}\xi}}{2\sqrt{\lambda}(e^{-2\sqrt{\lambda}}-1)}; \\ b_1(\xi) = \frac{(e^{-\sqrt{\lambda}\xi}+e^{\sqrt{\lambda}\xi})e^{-2\sqrt{\lambda}}}{2\sqrt{\lambda}(e^{-2\sqrt{\lambda}}-1)}. \end{array} \right.$$

Тогда

$$a_1(\xi) = b_1(\xi) - c_1(\xi) = \frac{(e^{-\sqrt{\lambda}\xi} + e^{\sqrt{\lambda}\xi})e^{-2\sqrt{\lambda}}}{2\sqrt{\lambda}(e^{-2\sqrt{\lambda}} - 1)} - \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\xi}}{2\sqrt{\lambda}},$$

$$a_2(\xi) = b_2(\xi) - c_2(\xi) = \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\xi} + e^{\sqrt{\lambda}\xi}}{2\sqrt{\lambda}(e^{-2\sqrt{\lambda}} - 1)} + \frac{e^{\sqrt{\lambda}\xi}}{2\sqrt{\lambda}}.$$

Итого:

$$G_\lambda(x,\xi) = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & x < \xi & 1 : G_{1,\lambda}(x,\xi); \\ 0 & \xi < x & 1 : G_{2,\lambda}(x,\xi), \end{array} \right.$$

$$G_{1,\lambda}(x,\xi) = \left(\frac{(e^{-\sqrt{\lambda}\xi} + e^{\sqrt{\lambda}\xi})e^{-2\sqrt{\lambda}}}{2\sqrt{\lambda}(e^{-2\sqrt{\lambda}} - 1)} - \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\xi}}{2\sqrt{\lambda}} \right) e^{\sqrt{\lambda}x} + \left(\frac{e^{-\sqrt{\lambda}\xi} + e^{\sqrt{\lambda}\xi}}{2\sqrt{\lambda}(e^{-2\sqrt{\lambda}} - 1)} + \frac{e^{\sqrt{\lambda}\xi}}{2\sqrt{\lambda}} \right) e^{-\sqrt{\lambda}x},$$

$$G_{2,\lambda}(x,\xi) = \frac{(e^{-\sqrt{\lambda}\xi} + e^{\sqrt{\lambda}\xi})e^{-2\sqrt{\lambda}}}{2\sqrt{\lambda}(e^{-2\sqrt{\lambda}} - 1)}e^{\sqrt{\lambda}x} + \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\xi} + e^{\sqrt{\lambda}\xi}}{2\sqrt{\lambda}(e^{-2\sqrt{\lambda}} - 1)}e^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Упростим:

$$G_{1,\lambda}(x,\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}(e^{-2\sqrt{\lambda}} - 1)}\Big(e^{-\sqrt{\lambda}\xi-2\sqrt{\lambda}+\sqrt{\lambda}x} + e^{\sqrt{\lambda}\xi-2\sqrt{\lambda}+\sqrt{\lambda}x} - e^{-2\sqrt{\lambda}-\sqrt{\lambda}\xi+\sqrt{\lambda}x} + e^{-\sqrt{\lambda}\xi+\sqrt{\lambda}x} +$$

$$+e^{-\sqrt{\lambda}\xi-\sqrt{\lambda}x} + e^{\sqrt{\lambda}\xi-\sqrt{\lambda}x} + e^{-2\sqrt{\lambda}+\sqrt{\lambda}\xi-\sqrt{\lambda}x} - e^{\sqrt{\lambda}\xi-\sqrt{\lambda}x}\Big) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\lambda}(e^{-2\sqrt{\lambda}} - 1)} \left(e^{\sqrt{\lambda}\xi-2\sqrt{\lambda}+\sqrt{\lambda}x} + e^{-\sqrt{\lambda}\xi+\sqrt{\lambda}x} + e^{-\sqrt{\lambda}\xi-\sqrt{\lambda}x} + e^{-2\sqrt{\lambda}+\sqrt{\lambda}\xi-\sqrt{\lambda}x}\right) =$$

$$= \frac{(e^{-2\sqrt{\lambda}}e^{\sqrt{\lambda}\xi} + e^{-\sqrt{\lambda}\xi})(e^{\sqrt{\lambda}x} + e^{-\sqrt{\lambda}x})}{2\sqrt{\lambda}(e^{-2\sqrt{\lambda}} - 1)},$$

$$G_{2,\lambda}(x,\xi) = \frac{(e^{-\sqrt{\lambda}\xi} + e^{\sqrt{\lambda}\xi})(e^{-2\sqrt{\lambda}}e^{\sqrt{\lambda}x} + e^{-\sqrt{\lambda}x})}{2\sqrt{\lambda}(e^{-2\sqrt{\lambda}} - 1)}.$$

Получив функцию Грина, мы можем выписать резольвенту оператора L:

$$R(\lambda, L)(f) = \int\limits_0^1 G_\lambda(x,\xi)f(\xi)d\xi,$$

где $f \in C[0,1]$.

2.3. Секториальность оператора

Покажем теперь, что L — секториальный оператор (см. [7, II.4.a]). Для этого достаточно, чтобы для некоторого $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ сектор $\Sigma_\theta = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| < \theta\} \setminus \{0\}$ состоял из одних только регулярных точек и найдется такое M, что для все этих точек

$$||R(\lambda, L)|| \quad \frac{M}{|\lambda|}. \tag{5}$$

Зафиксируем $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$. Весь спектр L лежит на мнимой оси в левой полуплоскости, так что он не лежит в Σ_θ. Докажем теперь оценку (5).

$$||R(\lambda, L)|| = \sup_{f \in C[0,1], ||f||=1} ||R(\lambda, L)f|| = \sup_{f \in C[0,1], ||f||=1} \max_{x \in [0,1]} \int_0^1 G_\lambda(x,\xi) f(\xi) d\xi$$

$$\sup_{f \in C[0,1], ||f||=1} \max_{x \in [0,1]} \int_0^1 |G_\lambda(x,\xi) f(\xi)| d\xi \qquad \sup_{f \in C[0,1], ||f||=1} \max_{x \in [0,1]} \int_0^1 |G_\lambda(x,\xi)| \max_{y \in [0,1]} |f(y)| d\xi =$$

$$= \sup_{f \in C[0,1], ||f||=1} \max_{x \in [0,1]} \left(\int_0^1 |G_\lambda(x,\xi)| d\xi \cdot ||f|| \right) = \max_{x \in [0,1]} \int_0^1 |G_\lambda(x,\xi)| d\xi =$$

$$= \max_{x \in [0,1]} \left(\int_0^x |G_{2,\lambda}(x,\xi)| d\xi + \int_x^1 |G_{1,\lambda}(x,\xi)| d\xi \right) =$$

$$= \max_{x \in [0,1]} \left(\int_0^x \quad \frac{(e^{-\sqrt{\lambda}\xi} + e^{\sqrt{\lambda}\xi})(e^{-2\sqrt{\lambda}} e^{\sqrt{\lambda}x} + e^{-\sqrt{\lambda}x})}{2\sqrt{\lambda}(e^{-2\sqrt{\lambda}} - 1)} \quad d\xi + \right.$$

$$\left. + \int_x^1 \quad \frac{(e^{-2\sqrt{\lambda}} e^{\sqrt{\lambda}\xi} + e^{-\sqrt{\lambda}\xi})(e^{\sqrt{\lambda}x} + e^{-\sqrt{\lambda}x})}{2\sqrt{\lambda}(e^{-2\sqrt{\lambda}} - 1)} \quad d\xi \right)$$

$$\frac{1}{2|\sqrt{\lambda}||e^{-2\sqrt{\lambda}} - 1|} \max_{x \in [0,1]} \left(\quad e^{-2\sqrt{\lambda}} e^{\sqrt{\lambda}x} + e^{-\sqrt{\lambda}x} \quad \int_0^x \left(\quad e^{-\sqrt{\lambda}\xi} \quad + \quad e^{\sqrt{\lambda}\xi} \quad \right) d\xi + \right.$$

$$\left. + \quad e^{\sqrt{\lambda}x} + e^{-\sqrt{\lambda}x} \quad \int_x^1 \left(\quad e^{-\sqrt{\lambda}\xi} \quad + \quad e^{-2\sqrt{\lambda}} \quad e^{\sqrt{\lambda}\xi} \quad \right) d\xi \right)$$

$$\frac{1}{2|\sqrt{\lambda}||e^{-2\sqrt{\lambda}} - 1|} \max_{x \in [0,1]} \quad \left(e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} + e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} \right) \quad \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} - 1}{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} + \frac{e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} - 1}{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} \quad +$$

$$+ \left(e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} + e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} \right) \quad \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} - e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x}}{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} + e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} \frac{e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} - e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x}}{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} \qquad = \frac{1}{2|\sqrt{\lambda}||e^{-2\sqrt{\lambda}} - 1|} \cdot$$

$$\cdot \max_{x \in [0,1]} \left(\frac{1}{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} \left(e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} - e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} + e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} - e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} \right) + \right.$$

$$+\frac{1}{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}}\left(e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}}e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x}e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x}-e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}}e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x}+e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x}e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x}-e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x}\right)+$$

$$+\frac{1}{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}}\left(e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x}e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}}-e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x}e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x}+e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x}e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}}-e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x}e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x}\right)+$$

$$+\frac{1}{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}}\left(e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x}e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}}e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}}-e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x}e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}}e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x}+e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x}e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}}e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}}-\right.$$

$$\left.-e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x}e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}}e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x}\right)\Bigg)=\frac{1}{2|\sqrt{\lambda}||e^{-2\sqrt{\lambda}}-1||\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}|}\max_{x\in[0,1]}\Big(-e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}}+e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}}e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x}+$$

$$-e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x}+e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x}+e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}}e^{2\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x}-e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}}e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x}+1-e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x}-e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}}e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x}+1-$$

$$-e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}}e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x}+e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x}+e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}}e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x}-e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}}e^{2\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x}+e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}}e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x}-e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}}\Big)=$$

$$=\frac{|e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}}-1|}{|\sqrt{\lambda}||\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}||e^{-2\sqrt{\lambda}}-1|}. \tag{6}$$

Здесь следует сделать два замечания. Во-первых, поскольку $|\arg\lambda|<\theta<\pi$, то можно выбирать в качестве $\sqrt{\lambda}$ тот из корней, который лежит в правой полуплоскости и без ограничения общности можно считать, что $0 \quad |\arg\sqrt{\lambda}|<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$. Тогда $|\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}|=|\sqrt{\lambda}|\cos|\arg\sqrt{\lambda}|>|\sqrt{\lambda}|\cos\frac{\theta}{2}$.

Во-вторых, для произвольных $a,b>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}$, будет верно:

$$|a(\cos\varphi+i\sin\varphi)-b|=\sqrt{(a\cos\varphi-b)^2+a^2\sin^2\varphi}=$$

$$=\sqrt{a^2\cos^2\varphi-2a\cos\varphi\cdot b+b^2+a^2\sin^2\varphi}=\sqrt{a^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)-2ab\cos\varphi+b^2}=$$

$$=\sqrt{a^2-2ab\cos\varphi+b^2}\geqslant\sqrt{a^2-2ab+b^2}=\sqrt{(a-b)^2}=a-b$$

В нашем случае $a=e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}},b=1,\varphi=\arg\sqrt{\lambda}$. Поэтому из (6) следует, что

$$R(\lambda,L)\quad\frac{1}{|\lambda|\cos\frac{\theta}{2}}.$$

Мы доказали, что L — секториальный оператор.

2.4. Обратимый оператор и полугруппа

В [7, II.2.12] показано, что оператор L порождает сильно непрерывную полугруппу на пространстве $F=C[0,1]$, заданную формулой

$$(e^{Lt}f)(s)=\int\limits_0^1 k_t(s,r)f(r)dr,$$

$$k_t(s,r)=1+2\sum_{n\in\mathbb{N}}e^{-\pi^2n^2t}\cos(\pi ns)\cdot\cos(\pi nr),$$

причем k_t — положительные функции, определенные на $[0,1]\times[0,1]$.

Поскольку $0\in\sigma(L)$, то оператор L необратим. Построим масштабированную полугруппу, выбрав число $a\in(0,\infty)$ и обозначив

$$\Gamma=-L+aI.$$

Тогда, согласно [7, II.2.2]

$$\sigma(-\Gamma) = \sigma(L - aI) = \{-\pi^2 k^2 - a : k \in \{0\} \cup \mathbb{N}\},$$

$$e^{-\Gamma} = e^{-at} e^{Lt}. \tag{7}$$

Поскольку L является секториальным оператором, что он порождает аналитическую полугруппу [7, Theorem II.4.6], а значит и $-\Gamma = L - aI$ порождает аналитическую полугруппу, так как $-aI$ — ограниченный оператор (см. [7, Proposition III.1.12]). Так как

$$R(\lambda, \Gamma) = (\Gamma - \lambda I)^{-1} = (-(-\Gamma - (-\lambda)I))^{-1} = -(-\Gamma - (-\lambda)I)^{-1} = -R(-\Gamma, -\lambda),$$

то

$$\sigma(\Gamma) = -\sigma(-\Gamma) = \{\pi^2 k^2 + a : k \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$$

при тех же собственных подпространствах, отвечающих соответствующим собственным значениям.

Как можно видеть, 0 является регулярной точкой оператора Γ, поэтому он обратим. По теореме 6.15 [4, III.6.3] имеем расширенный спектр (который может отличаться от спектра оператора только точками 0 и ∞):

$$\widetilde{\sigma}(\Gamma^{-1}) = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{\pi^2 k^2 + a} : k \in \{0\} \cup \mathbb{N} \right\},$$

и получаем спектральный радиус

$$\sigma(\Gamma^{-1}) \ni \frac{1}{a} = \rho(\Gamma^{-1}).$$

Заметим, что

$$(\Gamma^{-1} f)(x) = ((-L + aI)^{-1} f)(x) = ((-(L - aI))^{-1} f)(x) = (-(L - aI)^{-1} f)(x) = \\ = -\int\limits_0^1 G_a(x, \xi) f(\xi) d\xi. \tag{8}$$

Как показано в [6, IV.§6.1.4], в этом случае оператор Γ^{-1} компактен, а значит компактна и резольвента Γ и $-\Gamma$. Поскольку полугруппа $e^{-\Gamma t}$ аналитична, то она непрерывна по норме при $t > 0$ и благодаря компактности резольвенты генератора мы имеем компактность полугруппы (см. [7, Theorem II.4.29]). Значит у нее отсутствует существенный спектр и $\omega_0(e^{-\Gamma t}) = s(-\Gamma) = \sup \operatorname{Re} \sigma(-\Gamma) = -a < 0$, то есть полугруппа устойчива.

Рассмотрим конус

$$K = \{f \in C[0,1] : \forall(x \in [0,1])[f(x) \geqslant 0]\}.$$

Если рассматривать операторы только над вещественнозначными функциями мы получаем, что полугруппа $e^{-\Gamma t}$ положительна в смысле K благодаря положительности ядер k_t (что дает положительноеть e^{Lt}) и соотношению (7).

2.5. Итоги и примеры возмущений

Таким образом, для оператора $-\Gamma$ выполнены все условия теоремы (2). В качестве ее следствия мы можем сформулировать следующую теорему:

Теорема 3. *Пусть* $M : F \to F$ *— ограниченный линейный оператор, положительный относительно конуса* K*, и такой, что* $\rho(\Gamma^{-1} M) < 1$*. Тогда полугруппа* $e^{(-\Gamma + M)t}$ *равномерно экспоненциально устойчива.*

Пример 4. Зафиксируем $0 < p < 1$. Рассмотрим функцию $q_1 \in K$ и оператор

$$(M_1 f)(t) = \begin{cases} t \in [0,p] : q_1(t) f(0) \\ t \in [p,1] : q_1(t) f(t-p). \end{cases}$$

M_1 положителен и ограничен. Выясним, когда полугруппа $e^{(-\Gamma+M_1)t}$ равномерно экспоненциально устойчива.

Заметим, что

$$\rho(\Gamma^{-1}M_1) \quad \|\Gamma^{-1}M_1\| = \sup_{f \in C[0,1], \|f\|=1} \max_{x \in [0,1]} |(\Gamma^{-1}M_1 f)(x)| =$$

$$= \sup_{f \in C[0,1], \|f\|=1} \max_{x \in [0,1]} \quad - \int\limits_0^1 G_a(x,\xi) M_1 f(\xi) d\xi$$

$$\sup_{f \in C[0,1], \|f\|=1} \max_{x \in [0,1]} \left(\int\limits_0^p |G_a(x,\xi)| \cdot |q_1(\xi)| \cdot |f(0)| d\xi + \int\limits_p^1 |G_a(x,\xi)| \cdot |q_1(\xi)| \cdot |f(\xi - p)| d\xi \right)$$

$$\sup_{f \in C[0,1], \|f\|=1} \max_{x \in [0,1]} \int\limits_0^1 |G_a(x,\xi)| \cdot |q_1(\xi)| d\xi \|f\| = \max_{x \in [0,1]} \int\limits_0^1 |G_a(x,\xi)| q_1(\xi) d\xi$$

Таким образом, $e^{(-\Gamma+M_1)t}$ устойчива, если

$$\max_{x \in [0,1]} \int\limits_0^1 |G_a(x,\xi)| q_1(\xi) d\xi < 1$$

Если для всех $x \in [1-p, 1]$

$$\left[\int\limits_0^p |G_a(x,\xi)| q_1(\xi) d\xi \cdot \int\limits_p^1 |G_a(x,\xi)| q_1(\xi) d\xi \neq 0 \right], \tag{9}$$

то мы можем несколько улучшить оценку.

Выберем непрерывную на $[0,1]$ функцию $\nu(t) : \forall (t \in [0,1])[\nu(t) \neq 0]$. Введем норму на $C[0,1]$

$$\|x\|_\nu = \|\nu x\|.$$

Она эквивалентна стандартной:

$$\|x\| = \left\| \frac{\nu}{\nu} x \right\| = \max_{t \in [0,1]} \frac{\nu(t)}{\nu(t)} x(t) \qquad \max_{t \in [0,1]} \frac{1}{\nu(t)} \cdot \max_{t \in [0,1]} |\nu(t) x(t)| = \left\| \frac{1}{\nu} \right\| \|x\|_\nu,$$

$$\|x\|_\nu = \|x\nu\| = \max_{t \in [0,1]} |x(t)\nu(t)| \qquad \max_{t \in [0,1]} |x(t)| \cdot \max_{t \in [0,1]} |\nu(t)| = \|x\| \|\nu\|.$$

Тогда, подобно случаю со стандартной нормой

$$\rho(\Gamma^{-1}M_1) \quad \|\Gamma^{-1}M_1\|_\nu = \sup_{f \in C[0,1], \|f\|_\nu=1} \max_{x \in [0,1]} \quad - \int\limits_0^1 G_a(x,\xi) M_1 f(\xi) d\xi \cdot \nu(x)$$

$$\sup_{f\in C[0,1],\|f\|_\nu=1}\ \max_{x\in[0,1]}\left(\int_0^p |G_a(x,\xi)|q_1(\xi)\ \ f(0)\frac{\nu(0)}{\nu(0)}\ \ d\xi\cdot|\nu(x)|+\right.$$

$$\left.+\int_p^1 |G_a(x,\xi)|q_1(\xi)\ \ f(\xi-p)\frac{\nu(\xi-p)}{\nu(\xi-p)}\ \ d\xi\cdot|\nu(x)|\right)$$

$$\sup_{f\in C[0,1],\|f\|_\nu=1}\ \max_{x\in[0,1]}\left(\int_0^p |G_a(x,\xi)|q_1(\xi)d\xi\cdot\|f\|_\nu\cdot\ \frac{\nu(x)}{\nu(0)}\ +\right.$$

$$\left.+\int_p^1 |G_a(x,\xi)|q_1(\xi)d\xi\cdot\|f\|_\nu\cdot\max_{\xi\in[p,1]}\ \frac{\nu(x)}{\nu(\xi-p)}\ \right)=$$

$$=\max_{x\in[0,1]}\left(\int_0^p |G_a(x,\xi)|q_1(\xi)d\xi\cdot\ \frac{\nu(x)}{\nu(0)}\ +\int_p^1 |G_a(x,\xi)|q_1(\xi)d\xi\cdot\max_{\xi\in[p,1]}\ \frac{\nu(x)}{\nu(\xi-p)}\ \right). \tag{10}$$

Выберем $\nu(x)$ следующим образом:

$$\nu(x)=\begin{cases}1, & x\quad 1-p\\ \min\left(1,\frac{\int_0^p|G_a(1-p,\xi)|q_1(\xi)d\xi}{\int_0^p|G_a(x,\xi)|q_1(\xi)d\xi}\right)\cdot\min\left(1,\frac{\int_p^1|G_a(1-p,\xi)|q_1(\xi)d\xi}{\int_p^1|G_a(x,\xi)|q_1(\xi)d\xi}\right), & 1-p<x.\end{cases}$$

Функция $\nu(x)$ определена, непрерывна, и положительна на $[0,1]$ благодаря (9). Далее для $x>1-p$

$$\int_0^p |G_a(x,\xi)|q_1(\xi)d\xi\cdot\ \frac{\nu(x)}{\nu(0)}\ +\int_p^1 |G_a(x,\xi)|q_1(\xi)d\xi\cdot\max_{\xi\in[p,1]}\ \frac{\nu(x)}{\nu(\xi-p)}$$

$$\int_0^p |G_a(1-p,\xi)|q_1(\xi)d\xi\cdot\nu(1-p)+\int_p^1 |G_a(1-p,\xi)|q_1(\xi)d\xi\cdot\nu(1-p)$$

Значит, максимум по x в (10) достигается при $x\in[0,1-p]$ и при выполненном (9) условием устойчивости будет неравенство

$$\max_{x\in[0,1-p]}\int_0^1 |G_a(x,\xi)|q_1(\xi)d\xi<1$$

Пример 5. Пусть $q_2:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ — непрерывная функция, такая, что $\forall x,s\in[0,1]\,q_2(x,s)\geqslant 0$. Рассмотрим оператор

$$(M_2f)(s)=\int_0^p q_2(t,s)f(0)ds+\int_p^1 q_2(t,s)f(s-p)ds$$

Аналогично:

$$\rho(\Gamma^{-1}M_1) \qquad \sup_{f\in C[0,1],\|f\|=1} \max_{x\in[0,1]} -\int\limits_0^1 G_a(x,\xi)\left(\int\limits_0^p q_2(\xi,s)f(0)ds+\int\limits_p^1 q_2(\xi,s)f(s-p)ds\right)d\xi$$

$$\max_{x\in[0,1]}\int\limits_0^1 |G_a(x,\xi)|\int\limits_0^1 q_2(\xi,s)ds\,d\xi$$

имеем условие устойчивости полугруппы $e^{(-\Gamma+M_2)t}$:

$$\max_{x\in[0,1]}\int\limits_0^1 |G_a(x,\xi)|\int\limits_0^1 q_2(\xi,s)ds\,d\xi<1.$$

Аналогично примеру 4, если для всех $x\in[1-p,1]$

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^p |G_a(x,\xi)|q_2(\xi,s)ds\,d\xi\cdot\int\limits_0^1\int\limits_p^1 |G_a(x,\xi)|q_2(\xi,s)ds\,d\xi=0$$

то верна оценка

$$\rho(\Gamma^{-1}M_2) \qquad \|\Gamma^{-1}M_2\|_\nu$$

$$\max_{x\in[0,1]}\left(\int\limits_0^1\int\limits_0^p |G_a(x,\xi)|q_2(\xi,s)ds\,d\xi\cdot\ \frac{\nu(x)}{\nu(0)}\ +\int\limits_0^1\int\limits_p^1 |G_a(x,\xi)|q_2(\xi,s)ds\,d\xi\cdot\max_{s\in[p,1]}\ \frac{\nu(x)}{\nu(s-p)}\ \right).$$

И, выбрав

$$\nu(x)=\begin{cases}1, & x \quad 1-p\\ \min\left(1,\frac{\int\limits_0^1\int\limits_0^p|G_a(1-p,\xi)|q_2(\xi,s)ds\,d\xi}{\int\limits_0^1\int\limits_0^p|G_a(x,\xi)|q_2(\xi,s)ds\,d\xi}\right)\cdot\min\left(1,\frac{\int\limits_0^1\int\limits_p^1|G_a(1-p,\xi)|q_2(\xi,s)ds\,d\xi}{\int\limits_0^1\int\limits_p^1|G_a(x,\xi)|q_2(\xi,s)ds\,d\xi}\right), & 1-p<x.\end{cases}$$

получаем улучшенное условие устойчивости

$$\max_{x\in[0,1-p]}\int\limits_0^1 |G_a(x,\xi)|\int\limits_0^1 q_2(\xi,s)ds\,d\xi<1.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Перов А. И. Обобщённый принцип сжимающих отображений / А. И. Перов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2005. — № 1. — С. 196–207.

2. Боровских А. В. Лекции по обыновенным дифференциальным уравнениям / А. В. Боровских, А. И. Перов. — М., НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. — 540 с.

3. Канторович Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. — М.: Наука, 1977. — 744 с.

4. Като Т. Теория возмущений линейных операторов / Т. Като. — М.: Мир, 1972. — 740 с.

5. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы / М. А. Наймарк. — М.: Наука, 1969. — 528 с.

6. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 572 с.

7. Engel K.-J. One-parameter semigroups for linear evolution equations / K.-J. Engel, R. Nagel. — New-York: Springer-Verlag, 2000. — 586 p.

8. Баев А.Д. О единственности решения математической модели вынужденных колебаний струны с особенностями / А.Д. Баев, С.А. Шабров, Меач Мон // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 50–55.

REFERENCES

1. Perov A. I. Generalized contraction mappings principal. [Perov A. I. Obobshhyonnyj princip szhimayushhix otobrazhenij]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2005, no. 1, pp. 196–207.

2. Borovskikh A. V., Perov A. I. Lection on Ordinary Differential Equations. [Borovskix A. V., Perov A. I. Lekcii po obynovennym differencial'nym uravneniyam]. Moscow: Research center “Regular and chaotic dynamics”, 2004, 540 p.

3. Kantorovich L. V., Akilov G. P. Functional Analysis. [Kantorovich L. V., Akilov G. P. Funkcional'nyj analiz]. Moscow: Nauka, 1977, 744 p.

4. Kato T. Perturbation theory of linear operators. [Kato T. Teoriya vozmushhenij linejnyx operatorov]. Moscow: Mir, 1972, 740 p.

5. Naimark M. A. Linear Differential operators. [Najmark M. A. Linejnye differencial'nye operatory]. Moscow: Nauka, 1969, 528 p.

6. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. Elements of Functions Theory and Functional Analysis. [Kolmogorov A. N., Fomin S. V. E'lementy teorii funkcij i funkcional'nogo analiza]. Moscow: PhysMathLit, 2004, 572 p.

7. Engel K.-J., Nagel R. One-parameter semigroups for linear evolution equations, Springer, 2000, 586 p.

8. Baev A.D., Shabrov S.A., Meach Mon Uniqueness Of The Solution Mathematical Model Of Forced String Oscillation Singularities. [Baev A.D., Shabrov S.A., Meach Mon O edinstvennosti resheniya matematicheskoj modeli vynuzhdennyx kolebanij struny s osobennostyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, iss. 1, pp. 50–55.

Гудошников Иван Михайлович, аспирант Кафедры функционального анализа и операторных уравнений Математического факультета Воронежского Государственного Университета. Воронеж, Россия
E-mail: gudoshnikov@yandex.ru

Gudoshnikov Ivan Mikhaylovich, PhD student of Operational Equation Studies and Functional Analysis Department, Faculty of Mathematics, Voronezh State University. Voronezh, Russia
E-mail: gudoshnikov@yandex.ru