УДК 539.3

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ШАРНИРНО ОПЕРТОГО СТЕРЖНЯ С УЧЁТОМ МИКРОПОВОРОТА ПРЕДСТАВИТЕЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА

М. И. Быкова[1]**, С. А. Шашкина**[2]

[1] *Воронежский Государственный Университет,*
[2] *Военный Учебный Научный Центр Военно-Воздушных Сил "Военная Воздушная Академия имени проф. Н.Е. ЖуковскогоиЮ.А. Гагарина"*

Поступила в редакцию 19.02.2014 г.

Аннотация. В работе приведена математическая модель изогнутой линии сжатого упругого стержня с учётом микроструктуры материала. Показано, что учёт микроструктуры материала стержня ведёт к уменьшению критической силы и к более ранней потере его устойчивости по сравнению с идеальным случаем однородного сплошного материала.
Ключевые слова: микроструктура, упругий стержень, деформирование, устойчивость.

A MATHEMATICAL MODEL OF ARTICULATED FLEXIBLY BEARING PIVOT DEFORMATION WITH TAKING INTO ACCOUNT OF REPRESENTATIVE ELEMENT MICROTURN

M. I. Bykova, S. A. Shashkina

Abstract. In this paper a mathematical model of curved line of compressed elastic pivot has been constructed with taking into account of microstructure material. The influence of microstructure of pivot material promotes to decrease of critical force and reduces to earlier loss of stability as compared with ideal case of homogeneous continuous material.
Keywords: microstructure, elastic pivot, deformation, stability.

В технологиях сегодняшних дней широкое применение находят твердые, жидкие и пластические материалы с внутренней микроструктурой (горные породы, бетон, наноструктуры и др.), что ведёт к необходимости их научного изучения. Классические модели механики сплошных сред построены в предположении, что элементарный объём (представительный объём, деформируемая материальная точка) настолько мал, что его характерные размеры бесконечно малы по сравнению с характерными размерами самой задачи. Однако для ряда реальных материалов необходимо учитывать относительную величину характерного или представительного объёма, поскольку он содержит достаточно большое количество элементов микроструктуры.Одним из путей учёта микроструктуры является учёт деформирования на разных уровнях.

Определение продольной критической силы, приводящей упругий стержень к неустойчивому состоянию, представляет собой классическую задачу, решение которой известно со времён Эйлера [1], [2]. Ниже изложено уточнение критической силы для случая учёта микроструктуры материала упругого стержня.

Выражение для деформаций с учетом характерного размера h представительного элемента в линейном приближении имеет вид [3], [4]

$$\varepsilon^*_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i U_j + \nabla_j U_i\right) + \frac{h^2}{12}\left(\nabla^2_{jj} U_{i,j} + \nabla^2_{ii} U_{j,i}\right),\ i,j = 1,2,3, \tag{1}$$

где $\overrightarrow{U}$ — вектор перемещений. При изгибе стержня сдвиговая компонента тензора деформаций выражается через перемещения следующим образом

$$\varepsilon^*_{xy} = \frac{1}{2}U_{,x} + \frac{h^2}{12}U_{,xxx}. \tag{2}$$

Дифференциальное уравнение прогибов стержней постоянной толщины [5] представимо в виде

$$\frac{d^2}{dx^2}\frac{d}{dx}\left(EJ\varepsilon^*_{xy}\right) + P\frac{d^2U}{dx^2} = 0, \tag{3}$$

здесь E — модуль упругости, J — момент инерции поперечного сечения стержня, P — продольная сила.Интегрируя дважды уравнение (3) и исключая сдвиговую деформацию ε^*_{xy} (2), получим дифференциальное уравнение для поперечного перемещения $U(x)$ стержня

$$U_{,xx} + h^2/12U_{,xxxx} + \alpha^2 U = c_1 x + c_2,\ \text{где}\ \alpha = \sqrt{P/EJ}. \tag{4}$$

Общее решение дифференциального уравнения (4) имеет вид

$$U(x) = c_5 x + c_6 + c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + c_3 e^{\lambda_3 x} + c_4 e^{\lambda_4 x}. \tag{5}$$

Константы c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, входящие в состав решения (5), могут быть определены из граничных условий. Собственные значения λ находятся из характеристического уравнения

$$\frac{h^2}{12}\lambda^4 + \lambda^2 + \alpha^2 = 0, \tag{6}$$

составленного для дифференциального уравнения (4).Корнями полученного характеристического уравнения (6) будут

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm i\omega_j, \tag{7}$$

где $i = \sqrt{-1}$,

$$\omega_j = \frac{\sqrt{6}}{h}\sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \frac{(\alpha h)^2}{3}}},\ (j = 1,2) \text{ — собственная частота.} \tag{8}$$

Таким образом, решение (5) дифференциального уравнения четвёртого порядка (4) можно представить в виде

$$U(x) = c_1 \sin\omega_1 x + c_2 \cos\omega_1 x + c_3 \sin\omega_2 x + c_4 \cos\omega_2 x + c_5 x + c_6, \tag{9}$$

Заметим, что внешнее приближение решения дифференциального уравнения (4) при $h \to 0$ приводит к классическому решению и к классическому анализу устойчивости сжатых стержней.

Пусть у упругого стержня длиной l оба конца шарнирно опёрты (рис. 1).

Граничные условия, соответствующие данному виду закрепления имеют вид

$$U(0) = 0, \quad U(l) = 0, \qquad U''(0) = 0, \quad U''(l) = 0. \tag{10}$$

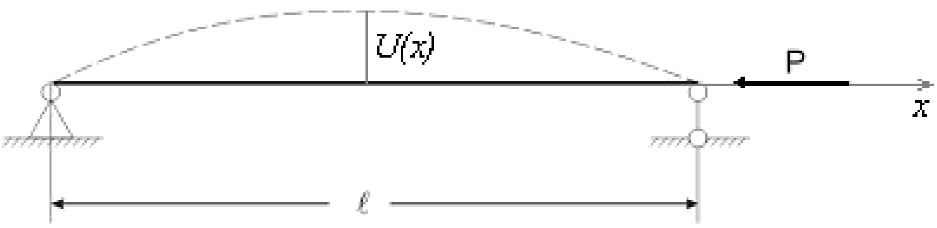

Рис. 1. *Схематическое изображение изогнутой оси стержня с шарнирно опертыми концами.*

$$U''(0) + hU'''(0) = 0, \quad U''(l) - hU'''(l) = 0. \tag{11}$$

Дополнительные граничные условия (11), учитывающие характерный размер микроструктуры материала, соответствуют наличию микроповоротов представительного элемента[6].Используя решение дифференциального уравнения (4) играничные условия (10-11), составим замкнутую систему уравнений для определения неизвестных постоянных c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, входящих в решение (9)

$$\begin{cases} c_2 + c_4 + c_6 = 0 \\ -c_2\omega_1^2 - c_4\omega_2^2 = 0 \\ c_1 \sin\omega_1 l + c_2 \cos\omega_1 l + c_3 \sin\omega_2 l + c_4 \cos\omega_2 l + c_5 l + c_6 = 0 \\ -c_1\omega_1^2 \sin\omega_1 l - c_2\omega_1^2 \cos\omega_1 l - c_3\omega_2^2 \sin\omega_2 l - c_4\omega_2^2 \cos\omega_2 l = 0 \\ -c_1 h\omega_1^3 - c_2\omega_1^2 - c_3 h\omega_2^3 - c_4\omega_2^2 = 0 \\ c_1(-\omega_1^2 \sin\omega_1 l + h\omega_1^3 \cos\omega_1 l) + c_2 \;\; -\omega_1^2 \cos\omega_1 l - h\omega_1^3 \sin\omega_1 l \;\; + \\ +c_3 \;\; -\omega_2^2 \sin\omega_2 l + h\omega_2^3 \cos\omega_2 l \;\; + c_4 \;\; -\omega_2^2 \cos\omega_2 l - h\omega_2^3 \sin\omega_2 l \;\; = 0 \end{cases} . \tag{12}$$

Система (12) является однородной, следовательно, её нетривиальное решение возможно при условии

$$\det A = 0, \tag{13}$$

где A — матрица коэффициентов системы.

Рассмотрим случай, когда собственные частоты $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Тогда равенство (13) примет вид

$$hl\omega^9 \sin\omega l = 0. \tag{14}$$

Решение полученного уравнения (14)при условии $\omega \neq 0$ примет вид

$$\omega = \pi k/l, \quad k = 1, 2, ..., n. \tag{15}$$

Учитывая, что $\alpha = \quad \overline{P/EJ}$ и равенство (8), (предполагая, что $k = 1$), получим зависимость критической силы $P_{\text{кр}}$ от характерного размера микроструктуры h материала

$$P_{kp} = EJ \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \left[1 - \frac{h^2}{12}\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\right]. \tag{16}$$

Учёт микроструктуры ($h/l \neq 0$) приводит к необходимости рассмотрения стержней, длина которых больше или равна характерному размеру h микроструктуры ($l \geqslant h$).

Как следует из рисунка 2, значение критической силы при$h \neq 0$ всегда меньше значений критической силы для идеального упругого материала.

Особенно показателен график отношения K критической силы с учётом микроструктуры к классической критической силе (рис. 3)

$$K = \frac{P_{kp}}{EJ\,(\pi/l)^2} = 1 - \frac{\pi^2}{3\,(l/h)^2}. \tag{17}$$

Из рисунка 3 следует, что учёт микроструктуры значительно уменьшает величину критического усилия, необходимого для потери устойчивости стержня, для малых длин стержней таких, что $l \geqslant h$.

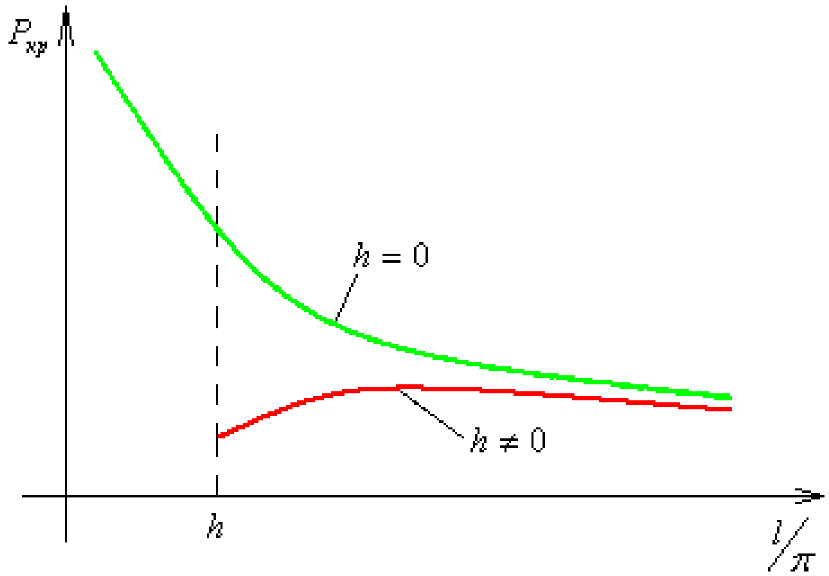

Рис. 2. *Схематическое изображение зависимостикритической силы от длины стержня.*

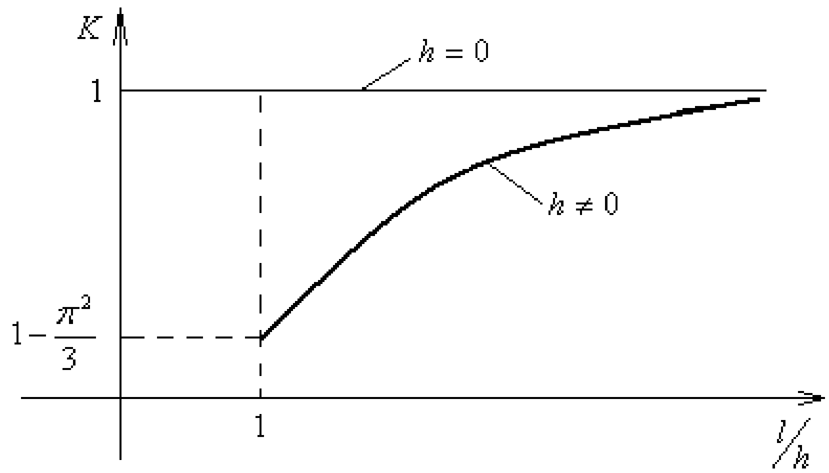

Рис. 3. *Схематическое изображение отношения критической силы с учётом микроструктуры к классической критической силе.*

Так, для стержней длиной l порядка длины представительного элемента h, критическая сила с учётом микроструктуры примерно в пять раз меньше критической силы для идеального упругого материала, (то есть без учёта характерного размера h микроструктуры). Для стержней большой длины влияние микроструктуры мало ощутимо.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пановко Я.Г. Устойчивость и колебания упругих систем / Я.Г. Пановко, И.И. Губанова. — М.: Наука, 1967. — 238 с.

2. Биргер И.А. Прочность, устойчивость, колебания. Т. 3 / И.А. Биргер, Я.Г. Пановко. — М.: Машиностроение, 1968. — 567 с.

3. Шашкина С.А. Формулировка задачи теории упругости для материалов с микроструктурой / С.А. Шашкина // Сб. "Математические модели и операторные уравнения", Т. 3, Воронеж, 2005. — С. 81–86.

4. Быкова М.И. Влияние микроструктуры материала на устойчивость стержней / М.И. Быкова, Н.Д. Вервейко, С.А. Шашкина // Авиакосмические технологии "АКТ-2007": Труды Восьмой Всероссийской с международным участием научно-технической конференции. — Воронеж: Воронеж, гос. техн. ун-т, 2007. — С. 200–204.

5. Тимошенко С.П. Механика материалов / С.П. Тимошенко, Дж. Гере. — М.: Мир, 1976. — С. 145–151.

6. Быкова М.И. Влияние различных условий закрепления стержней на их устойчивость с учётом микроструктуры материала / М.И. Быкова, С.А. Шашкина // Современные проблемы механики и прикладной математики: Сборник трудов международной школы- семинара. — Воронеж: ВорГУ, 2007. — С. 49–53.

7. Щеглова Ю.Д. Об упругопластическом кручении полого цилиндрического стержня из неоднородного материала с поперечным сечением в виде кругового кольца / Ю.Д. Щеглова // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2012. — № 1. — С. 213–219.

8. О единственности классического решения математической модели вынужденных колебаний стержневой системы с особенностями / А.Д. Баев, С.А. Шабров, Ф.В. Голованёва, Меач Мон // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2014. — № 2. — С. 74–80.

9. Шабров С.А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С.А. Шабров // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2013. — № 1. — С. 232–250.

10. Артемов М.А. Математическое моделирование механического поведения вращающегося диска / М.А. Артемов, А.П. Якубенко // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2014. — № 1. — С. 30–38.

11. Вервейко Н.Д. Влияние характерного линейного размера микроструктуры и времени релаксации на переходные процессы в тонких слоях / Н.Д. Вервейко, В.И. Просветов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 2. — С. 141–147.

REFERENCES

1. Panovko J. G., Gubanova I. I. Stability and oscillations of elastic systems. [Panovko Ya.G., Gubanova I.I. Ustojchivost' i kolebaniya uprugix sistem]. Moskow, 1967, 238 p.

2. Birger I. A., Panovko Ya. G. Strength, stability, oscillations. Vol. 3. [Birger I.A., Panovko Ya.G. Prochnost', ustojchivost', kolebaniya. T. 3]. Moskow: Mashinostroenie, 1968, 567 p.

3. Shashkina S. A. Statement of the problem of elasticity theory for materials with microstructure. [Shashkina S.A. Formulirovka zadachi teorii uprugosti dlya materialov s mikrostrukturoj]. "Mathematical models and operator equations Vol. 3, Voronezh, 2005, P. 81–86.

4. Bykova M. I., Verveyko N. D., Shashkina S. A. The effect of material microstructure on the

stability of rods. [Bykova M.I., Vervejko N.D., Shashkina S.A. Vliyanie mikrostruktury materiala na ustojchivost' sterzhnej]. Aerospace technologies "ACT-2007": Proceedings of the Eighth all-Russian with international participation scientific and technical conference. – Voronezh: the Voronezh state technical. Univ., 2007. – P. 200-204..

5. Timoshenko S. P., Gera, J. Mechanics of materials. [Timoshenko S.P., Gere Dzh. Mexanika materialov]. Moskow: Mir, 1976, pp. 145–151.

6. Bykova M. I., Shashkina A. S. The Influence of different conditions of fixing of studs for their stability taking into account the microstructure of the material. [Bykova M.I., Shashkina S.A. Vliyanie razlichnyx uslovij zakrepleniya sterzhnej na ix ustojchivost' s uchyotom mikrostruktury materiala]. *Modern problems of mechanics and applied mathematics: proceedings of the international school - seminar. Voronezh: Voronezh state univ., 2007, pp. 49–53. —* , .

7. Shcheglova Yu.D. On the Elastoplastic Torsion of Hollow Cylindrical Inhomogeneous Rod with a Cross-Section in the Form of a Circular Ring. [Shheglova Yu.D. Ob uprugoplasticheskom kruchenii pologo cilindricheskogo sterzhnya iz neodnorodnogo materiala s poperechnym secheniem v vide krugovogo kol'ca]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 1, pp. 213–219.

8. Baev A.D., Shabrov S.A., Golovaneva F.V., Meach Mon About Unique Classical Solution Mathematical Model Of Forced Vibrations Rod System With Singularities. [Baev A.D., Shabrov S.A., Golovanyova F.V., Meach Mon O edinstvennosti klassicheskogo resheniya matematicheskoj modeli vynuzhdennyx kolebanij sterzhnevoj sistemy s osobennostyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 2, pp. 74–80.

9. Shabrov S. A. Mathematical model for small deformations of the rod system with internal features. [Shabrov S. A. Ob odnoj matematicheskoj modeli malyx deformacij sterzhnevoj sistemy s vnutrennimiosobennostyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 1, pp. 232–250.

10. Artemov M.A., Yakubenko A.P. Rotating Disc Mechanical Behaviour Mathematical Modelling. [Artemov M.A., Yakubenko A.P. Matematicheskoe modelirovanie mexanicheskogo povedeniya vrashhayushhegosya diska]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 1, pp. 30–38.

11. Verveiko N.D., Prosvetov V.I. The Effect of the Typical Lineal Size of Microstructure and Relaxation Time in Transition Layers. [Vervejko N.D., Prosvetov V.I. Vliyanie xarakternogo linejnogo razmera mikrostruktury i vremeni relaksacii na perexodnye processy v tonkix sloyax]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 2, pp. 141–147.

Быкова Мария Игоревна, к. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического и прикладного анализа ф-та прикладной математики, информатики и механики ВорГУ, Воронеж, Россия
E-mail: 477838@mail.ru
Тел.: 8–910–349–62–48

M.I. Bykova, phd, lecturer of Department, Department of mathematical and applied analises, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: 477838@mail.ru
Tel.: 8–910–349–62–48

Шашкина Софья Александровна, к. физ.-мат. наук, старший преподаватель кафедры математики ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н.Е Жуковского и Ю.А. Гагарина», Воронеж, Россия
E-mail: soffia-alex@inbox.ru
Тел.: 8–910–347–19–16

S.A. Shashkina, phd, senior lecturer, Department of mathematics, Air Force Education and Research Center «The Zhukovsky and Gagarin Air Force Academy», Voronezh, Russia
E-mail: soffia-alex@inbox.ru
Tel.: 8–910–347–19–16