УДК 517.927

ДИФФЕРЕНЦИАЛ СТИЛТЬЕСА В МОДЕЛИРОВАНИИ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ С ЛОКАЛИЗОВАННЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ*

А. Д. Баев, Ж. О. Залукаева, М. Б. Зверева, С. А. Шабров

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 11.10.2014 г.

Аннотация. В работе рассматривается модель малых вынужденных поперечных колебаний разрывной стилтьесовской струны с произвольным распределением масс (включая сосредоточенные), помещенной во внешнюю среду с локализованными особенностями типа пружин. Математическая модель реализуется в виде начально – краевой задачи второго порядка с особенностями в потенциале типа δ' -взаимодействий. Мы пользуемся расширенным толкованием интеграла и меры Стилтьеса, предложенным Ю.В. Покорным. Чтобы подчеркнуть, что речь идет о такой мере, мы заключаем функцию, стоящую под знаком дифференциала в квадратные скобки. За счет расширения понятия интеграла удается сохранить поточечное толкование как решений, так и соотношений, что позволяет проводить исследование модели методами, аналогичными классическим. В работе доказана единственность решения модели и исследована возможность разложения в ряд Фурье.

Ключевые слова: Интеграл Стилтьеса, колебания струны, ряд Фурье.

THE STIELTJES DIFFERENTIAL IN MODELING OSCILLATIONS OF A STRING WITH LOCALIZED SINGULARITIES

A. D. Baev, Zh. O. Zalukaeva, M. B. Zvereva, S. A. Shabrov

Abstract. In this work was considered a model of small forced transverse oscillations of the discontinuous Stiltjes string with arbitrary mass distribution (including concentrated masses) placed in the environment with localized singularities of the type of springs. The mathematical model is implemented in the form of initial – boundary value problem of second order with singularities in the potential of the type δ'-interactions. We use advanced interpretation of Stiltjes integral and measures, proposed by Y. V. Pokorny. To emphasize that we are talking about such measure, we conclude the function standing under the sign of the differential in brackets. Due to the expansion of the notion of integral is possible to preserve the pointwise interpretation of solutions and relations that allows the study of the model by methods similar to classic. In this work the uniqueness of the solution of the model was proved and the possibility of decomposition of the solution in a Fourier series was investigated.

Keywords: Stiltjes integral,oscillations of the string, Fourier series.

В настоящее время достаточно активно ведутся исследования моделей колебательных процессов в струнных системах, актуальных во многих отраслях естествознания и техники. Особенно можно выделить публикации Е. И. Моисеева, В. А. Ильина, Л. Н. Знаменской, А. И. Егорова, А. В. Боровских, В. В. Провоторова [1]–[5].

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 14-01-00867

Наличие особенностей у изучаемой системы (как внутренних, так и внешних) приводит, как правило, к потере гладкости решения дифференциальной модели. Последнее закрывает возможность использования обыкновенных производных как при моделировании, так и при анализе. Применение теории обобщенных функций (по Соболеву–Шварцу, Коломбо и др.) позволяет доказать наличие слабого решения. При этом приходится преодолевать ряд трудно разрешимых проблем (типа умножения функции на обобщенную). Однако поточечный анализ решения математической модели, очень важный для приложений, при таком подходе становится недоступным.

Работы Стилтьеса о колебаниях струны с бусинками, М. Г. Крейна, Ф. Р. Гантмахера, О. Келлога (см. комментарии в [6]) о произвольно нагруженной струне обозначили направление исследований в интересах физической теории колебаний. Этот подход получил развитие в работах Ю. В. Покорного [7], [8], когда уравнение

$$-(pu')' + qu = f$$

с особенностями в потенциале q типа δ-функции, было заменено поточечно задаваемым уравнением

$$-(pu'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = F'_\sigma. \tag{1}$$

Здесь p, Q, F — функции ограниченной вариации на отрезке $[0, \ell]$, дифференцирование ведется по σ-мере, порождаемой строго возрастающей на $[0, \ell]$ функцией $\sigma(x)$. Уравнение (1), имея поточечный характер, аналогичный обыкновенному дифференциальному уравнению, допустило разработку [9], [10] качественных методов, направленных на анализ классических осцилляционных свойств для задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} -(pu'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = \lambda u M'_\sigma, \\ u(0) = u(\ell) = 0. \end{cases}$$

Последнее дало возможность исследовать колебания струн с произвольным количеством сосредоточенных масс (не более чем счетным), помещенной во внешнюю среду с не более чем счетным количеством локализованных особенностей типа пружин, расположенных вдоль геометрического графа [11], [12].

Рассмотрим теперь математическую модель малых вынужденных колебаний разрывной струны (цепочки из струн, упруго соединенных между собой с помощью пружин), реализуемую в виде начально-краевой задачи

$$\begin{cases} \dfrac{dM}{d[\sigma]}(x)\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial[\sigma]}\left(p(x)\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial \mu}\right) - u(x,t)\dfrac{dQ(x)}{d[\sigma]} + \dfrac{dF(x,t)}{d[\sigma]}, \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Функция $\mu(x)$ строго возрастает на отрезке $[0, \ell]$ и разрывна лишь в точках разрыва $u(x,t)$. Дифференцирование $\dfrac{\partial u}{\partial \mu}$ обращается интегрированием по Стилтьесу по μ-мере. При этом в каждой точке ξ разрыва $\mu(x)$ верно равенство

$$\frac{\partial u}{\partial \mu}(\xi, t) = \frac{u(\xi+0,t) - u(\xi-0,t)}{\mu(\xi+0) - \mu(\xi-0)}.$$

Дифференцирование $\dfrac{d}{d[\sigma]}$ обращается интегралом, понимаемым в расширенном смысле. Необходимое нам углубление понятия интеграла Стильтьеса было предъявлено впервые в

[7]. Напомним, следуя [7], что π-интеграл $\int\limits_{\alpha}^{\beta} ud[v]$ для функций $u(x)$, $v(x)$ ограниченной вариации может быть представлен в виде

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} ud[v] = \int\limits_{\alpha}^{\beta} udv_0 + \sum_{\alpha<s\leqslant\beta} u(s-0)\Delta^- v(s) + \sum_{\alpha\leqslant s<\beta} u(s+0)\Delta^+ v(s),$$

где v_0 — непрерывная часть v, интеграл $\int\limits_{\alpha}^{\beta} udv_0$ понимается по Лебегу-Стилтьесу. Через $\Delta^+ v(x)$ мы обозначаем правый скачок функции v в точке x, а именно $\Delta^+ v(x) = v(x+0) - v(x)$; через $\Delta^- v(x)$ — левый скачок в точке x, т.е. $\Delta^- v(x) = v(x) - v(x-0)$. Полный скачок $\Delta v(x)$ в точке x равен сумме левого и правого скачков. Если обратиться к общей природе интеграла, то интегрирующая функция $v(s)$ в π-интеграле определяет в особых точках расщепляющиеся меры (левую и правую). Подчеркнем, что взятие функции, стоящей под дифференциалом в квадратные скобки, в обозначении π-интеграла должно напоминать, что суммирование происходит именно по таким расщепляющимся в особых точках мерам. Если одна из функций $u(x)$ или $v(x)$ непрерывна, то π-интеграл совпадает с обычным интегралом Стилтьеса.

В точках ξ, в которых $u(x,t)$ терпит разрыв, уравнение в (2) реализуется в виде равенств

$$\Delta^- M(\xi)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi-0,t) = \Delta^-(p\frac{\partial u}{\partial \mu})(\xi,t) - u(\xi-0,t)\Delta^- Q(\xi) + \Delta^- F(\xi,t),$$

$$\Delta^+ M(\xi)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi+0,t) = \Delta^+(p\frac{\partial u}{\partial \mu})(\xi,t) - u(\xi+0,t)\Delta^+ Q(\xi) + \Delta^+ F(\xi,t).$$

Заметим, что скачки $\Delta^- M(\xi)$, $\Delta^+ M(\xi)$ равняются массам, сосредоточенным на разорванных (в точке ξ) концах струны, $\Delta^- Q(\xi)$, $\Delta^+ Q(\xi)$ равняются упругостям внешних пружин, прикрепленных к разорванным концам струн, $p(\xi)$ равняется упругости пружины, соединяющей разорванные концы струн, $\Delta^- F(\xi,t)$, $\Delta^+ F(\xi,t)$ — сосредоточенные на разорванных концах струн силы.

В точках s, в которых функция $u(x,t)$ непрерывна, но хотя бы одна из функций $p(x)$, $Q(x)$, $M(x)$, $F(x,t)$ терпит разрыв, уравнение из системы (2) понимается как

$$\Delta M(s)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(s,t) = \Delta(p\frac{\partial u}{\partial \mu})(s,t) - u(s,t)\Delta Q(s) + \Delta F(s,t).$$

Решение $u(x,t)$ задачи (2) будем искать в классе функций E таких, что при каждом фиксированном t функция $u(x,t)$ является μ-абсолютно непрерывной по переменной x, при этом функция $u'_\mu(x,t)$ $[\sigma]$-абсолютно непрерывна по переменной x. Также предполагается, что $u(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируема по переменной t. Кроме того, для всех пар (x_0,t_0) и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что если $|\mu(x) - \mu(x_0)| < \delta$, $|t - t_0| < \delta$, то $|u(x,t) - u(x_0,t_0)| < \varepsilon$. Функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ предполагаются μ-абсолютно непрерывными, причем, $\varphi'_\mu(x)$, $\psi'_\mu(x)$ – функции ограниченной вариации на $[0,\ell]$.

Теорема 1. *Пусть $p(x)$, $Q(x)$, $M(x)$, $F(x,t)$ — $[\sigma]$-абсолютно непрерывны по x на $[0,\ell]$; $\inf\limits_{[0,\ell]} p > 0$; функция $M(x)$ строго возрастает на $[0,\ell]$, $Q(x)$ не убывает на $[0,\ell]$. Тогда математическая модель (2) не может иметь двух различных решений в классе E.*

Доказательство. Предположим, что существует два различных решения $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$

задачи (2). Тогда разность $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ является решением задачи

$$\begin{cases} \dfrac{dM}{d[\sigma]}(x)\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x,t) = \dfrac{\partial}{\partial[\sigma]}(p(x)v'_\mu(x,t)) - v(x,t)\dfrac{dQ}{d[\sigma]}(x), \\ v(0,t) = v(\ell,t) = 0, \\ v(x,0) = 0, \\ v'_t(x,0) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Умножим первое уравнение системы (3) на v'_t и проинтегрируем:

$$\int_0^\ell v'_t(x,t)v''_{tt}(x,t)\,d[M(x)] = \int_0^\ell v'_t(x,t)\,d_x[p(x)v'_\mu(x,t)] - \int_0^\ell v'_t(x,t)v(x,t)\,d[Q(x)]. \tag{4}$$

Зафиксируем произвольное $T^* \in [0,T]$ и проинтегрируем (4) по отрезку $[0,T^*]$. Получим, что

$$\int_0^{T^*}\int_0^\ell v'_t(x,t)v''_{tt}(x,t)\,d[M(x)]\,dt = \int_0^{T^*}\int_0^\ell v'_t(x,t)\,d_x[p(x)v'_\mu(x,t)]\,dt -$$
$$- \int_0^{T^*}\int_0^\ell v'_t(x,t)v(x,t)\,d[Q(x)]\,dt. \tag{5}$$

Воспользовавшись теоремой Фубини и начальными условиями, преобразуем интеграл слева

$$\int_0^{T^*}\int_0^\ell v'_t(x,t)v''_{tt}(x,t)\,d[M(x)]\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\ell (v'_t(x,T^*))^2 d[M(x)].$$

Внутренний интеграл в $\int_0^{T^*}\int_0^\ell v'_t(x,t)\,d_x[p(x)v'_\mu(x,t)]\,dt$ проинтегрируем по частям, получим

$$\int_0^{T^*}\int_0^\ell v'_t(x,t)\,d_x[p(x)v'_\mu(x,t)]\,dt = -\int_0^\ell\int_0^{T^*} p(x)v'_\mu(x,t)\,d(v'_t(x,t))\,dt.$$

Заметим, что справедливо равенство $v'_t(x,t) = \int_0^x \dfrac{\partial}{\partial t}(v'_\mu(s,t))\,d\mu(s)$.

Тогда

$$-\int_0^\ell\int_0^{T^*} p(x)v'_\mu(x,t)\,d_x v'_t(x,t)\,dt = -\int_0^\ell\int_0^{T^*} p(x)v'_\mu(x,t)\frac{\partial}{\partial t}v'_\mu(x,t)\,d\mu(x)\,dt =$$
$$= -\frac{1}{2}\int_0^\ell\int_0^{T^*} p(x)\frac{\partial}{\partial t}\left(v'_\mu(x,t)\right)^2 d\mu(x)\,dt = -\frac{1}{2}\int_0^\ell p(x)\left(v'_\mu(x,T^*)\right)^2 d\mu(x).$$

Интеграл $\int\limits_0^{T*}\int\limits_0^{\ell} v'_t(x,t)v(x,t)\; d[Q(x)]\; dt$ можно переписать как

$$\int\limits_0^{T^*}\int\limits_0^{\ell} v'_t(x,t)v(x,t)\; d[Q(x)]\; dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{T^*}\int\limits_0^{\ell} \frac{\partial}{\partial t}\,(v(x,t))^2\, d[Q(x)]\; dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\ell}\int\limits_0^{T^*} \frac{\partial}{\partial t}\,(v(x,t))^2\, dt\; d[Q(x)] = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\ell} (v(x,T^*))^2\, d[Q(x)].$$

Окончательно (5) может быть записано в виде

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{\ell} \left(v'_t(x,T^*)\right)^2 d[M(x)] + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\ell} p(x)\left(v'_\mu(x,T^*)\right)^2 d\mu(x) + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\ell} (v(x,T^*))^2\, d[Q(x)] = 0.$$

Значит, $v(x,T^*) = 0$ для всех T^*. Поэтому $v(x,T) = 0$, что и требовалось доказать.

Исследуем вопрос о возможности представления решения математической модели

$$\begin{cases} \dfrac{dM}{d[\sigma]}(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \dfrac{\partial}{\partial[\sigma]}\left(p(x)u'_\mu(x,t)\right) - u(x,t)\dfrac{dQ}{d[\sigma]}(x), \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ u'_t(x,0) = \psi(x), \end{cases} \tag{6}$$

в виде ряда Фурье по собственным функциям спектральной задачи

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{d[\sigma]}(p(x)X'_\mu(x)) + X(x)\dfrac{dQ}{d[\sigma]} = \lambda X(x)\dfrac{dM}{d[\sigma]}, \\ X(0) = X(\ell) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Спектральная задача (7), записанная в интегро-дифференциальной форме, подробно изучена в работе [13]. Показано, что спектр Λ задачи (7) состоит из неограниченной последовательности вещественных, простых и положительных собственных значений, единственная точка сгущения которых $+\infty$. Если занумеровать их в порядке возрастания: $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$, а через $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ обозначить соответствующие им амплитудные функции, то $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ обладают следующими свойствами:

1. $\varphi_1(x)$ не имеет нулевых точек внутри $(0,\ell)$;
2. $\varphi_k(x)$ $(k = 2, 3, \ldots)$ имеет внутри $(0,\ell)$ ровно $k-1$ нулевых точек;
3. нулевые точки $\varphi_k(x)$ и $\varphi_{k+1}(x)$ перемежаются.

Отметим, что амплитудные функции, отвечающие различным собственным частотам, ортогональны в смысле скалярного произведения

$$\langle\varphi,\psi\rangle = \int\limits_0^{\ell} \varphi(x)\psi(x)\; d[M(x)].$$

Будем считать, что амплитудные функции нормированы так, чтобы

$$\|\varphi_n\| = \sqrt{\int_0^\ell \varphi_n^2(x)d[M(x)]} = 1.$$

Покажем, что для всякой μ-абсолютно непрерывной функции $f(x)$, производная которой имеет конечное на $[0,\ell]$ изменение и принимающей нулевые значения в концевых точках $[0,\ell]$, ряд Фурье по амплитудным функциям сходится равномерно и абсолютно на $\overline{[0,\ell]}_\mu$, где через $\overline{[0,\ell]}_\mu$ обозначено множество из [7]-[10], полученное из отрезка $[0,\ell]$ заменой всякой точки ξ разрыва $\mu(x)$ на пары $\xi-0$ и $\xi+0$. Заметим, что тогда коэффициенты ряда Фурье $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$, построенного для функции $f(x)$, определяются по формулам

$$c_n = \int_0^\ell f(x)\varphi_n(x)d[M(x)]. \tag{8}$$

Покажем, что ряд Фурье

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x), \tag{9}$$

где c_n определяются по формулам (8), сходится к $f(x)$ в среднем:

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^\ell \left[f(x) - \sum_{k=1}^{N} c_k\varphi_k(x)\right]^2 d[M(x)] = 0.$$

На множестве E_0 μ-абсолютно непрерывных на $[0,\ell]$ функций $X(x)$, производная которых имеет конечную на $[0,\ell]$ вариацию, и $X(0) = X(\ell) = 0$, рассмотрим функционал

$$\Phi(X) = \int_0^\ell pX_\mu'^2\, d\mu + \int_0^\ell X^2 d[Q].$$

Функции

$$f_N(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{N} c_k\varphi_k(x)$$

принадлежат E_0 при всех N. Введем следующие обозначения

$$\Delta_N^2 = \int_0^\ell f_N^2(x)\, d[M(x)], \quad \psi_N(x) = \frac{f_N(x)}{\Delta_N}.$$

Заметим, что

$$\Phi(\psi_N) = \frac{1}{\Delta_N^2}\left[\Phi(f) - \sum_{k=1}^{N} \lambda_k c_k^2\right],$$

при этом

$$\Phi(\psi_N) \geqslant \lambda_{N+1},$$

где λ_{N+1} – $(N+1)$-ое собственное значение (7). Таким образом,

$$\Delta_N^2 \quad \frac{1}{\lambda_{N+1}}\left(\Phi(f)-\sum_{k=1}^{N}\lambda_k c_k^2\right).$$

Так как $\lambda_k > 0$ для всех k, то выражение $\Phi(f)-\sum\limits_{k=1}^{N}\lambda_k c_k^2$ ограничено при всех N. Из того, что $\lambda_{N+1}\to+\infty$ при $N\to\infty$ следует $\Delta_N^2\to 0$, откуда вытекает сходимость ряда Фурье в среднем.

Теперь остается доказать, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(x)$ сходится равномерно и абсолютно на $\overline{[0,\ell]}_\mu$, так как в этом случае сходится он может только к $f(x)$.

В [13] показано, что решение $u(x)$ задачи (7) может быть представлено в виде

$$u(x)=\lambda\int_0^\ell K(x,s)u(s)\,d[M(s)]. \qquad (10)$$

При этом собственные функции и собственные значения задачи (7) совпадают с собственными функциями и характеристическими значениями (10). Согласно [13], оператор $Au(x)=\int_0^\ell K(x,s)u(s)\,d[M(s)]$ является положительным, вполне непрерывным в пространстве $C_\mu[0,\ell]$ μ — непрерывных функций; функцию влияния $K(x,s)$ можно представить в виде

$$K(x,s)=\left(\int_0^\ell\frac{d\mu(t)}{p(t)\zeta^2(t)}\right)^{-1}\int_0^{\min\{x,s\}}\frac{d\mu(t)}{p(t)\zeta^2(t)}\int_{\max\{x,s\}}^{\ell}\frac{d\mu(t)}{p(t)\zeta^2(t)},$$

где $\zeta(x)$ — положительное решение однородного уравнения $-\dfrac{d}{d[\sigma]}(p(x)X'_\mu(x))+X(x)\dfrac{dQ}{d[\sigma]}=0$, доказательство существования которого можно найти в [13].

Образуем ядро

$$\omega_n(x,s)=K(x,s)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_k(x)\varphi_k(s)}{\lambda_k},$$

где λ_k — характеристические значения, φ_k — собственные функции (10).

Заметим, что λ_{n+1}, λ_{n+2},... и функции $\varphi_{n+1}(x)$, $\varphi_{n+2}(x)$,... представляют собой полную совокупность характеристических чисел и собственных функций уравнения

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^\ell\omega_n(x,s)\varphi(s)\,d[M(s)].$$

Для любой неотрицательной функции $q(x)\in C_\mu[0,\ell]$ справедливо

$$I=\int_0^\ell\int_0^\ell\omega_n(x,s)q(x)q(s)\,d[M(x)]\,d[M(s)]=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k^2}{\widetilde{\lambda}_k}\quad 0,$$

где λ_k – собственные значения ядра ω_n соответственно, совпадающие с $\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \ldots$, которые являются положительными. Тогда для любого $x \in \overline{[0,\ell]}_\mu$ верно $\omega_n(x,x) \geqslant 0$, т.е.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k} \leqslant K(x,x) \leqslant C^*.$$

Заметим, более того, что для изучаемого случая в силу симметричности функции влияния будет верно равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \int_0^\ell K(s,s)\, d[M(s)].$$

Применим теперь критерий Коши для доказательства равномерной сходимости функционального ряда (9). Для суммы $\sum\limits_{k=n}^{n+m} |c_k \varphi_k(x)|$ при некоторых n и m последовательно находим

$$\sum_{k=n}^{n+m} |c_k \varphi_k(x)| = \sum_{k=n}^{n+m} |c_k \sqrt{\lambda_k}| \cdot \left| \frac{\varphi_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}} \right| \leqslant \left(\sum_{k=n}^{n+m} c_k^2 \lambda_k \right)^{1/2} \left(\sum_{k=n}^{n+m} \frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k} \right)^{1/2},$$

что и требовалось.

Введем следующее обозначение:

$$LX \equiv -(pX'_\mu)'_{[\sigma]} + XQ'_{[\sigma]}.$$

Предыдущие рассуждения позволяют доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *функции $\mu(x)$, $M(x)$ строго возрастают, а $Q(x)$ не убывает на $[0,\ell]$; функция $p(x)$ отделена от нуля;*

2) *$p(x)$, $Q(x)$, $M(x)$ — $[\sigma]$-абсолютно непрерывны на $[0;\ell]$;*

3) *$\varphi(x)$ и $\psi(x)$ μ-абсолютно непрерывны на $[0;\ell]$, производные $\varphi'_\mu(x)$ и $\psi'_\mu(x)$ имеют конечное на $[0;\ell]$ изменение;*

4) *квазипроизводные $p(x)\varphi'_\mu(x)$ и $p(x)\psi'_\mu(x)$ $[\sigma]$-абсолютно непрерывны на $[0;\ell]$;*

5) *функции $\dfrac{L(\psi)(x)}{M'_{[\sigma]}(x)}$ и $\dfrac{L(\varphi)(x)}{M'_{[\sigma]}(x)}$ μ-непрерывны на $[0;\ell]$;*

6) *$\dfrac{L(\psi)(x)}{M'_{[\sigma]}(x)}$ μ-абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$ и её производная является функцией ограниченной вариации;*

7) *$\varphi(0) = \varphi(\ell) = L(\varphi)(0) = L(\varphi)(\ell) = \psi(0) = \psi(\ell) = 0$.*

Тогда функция

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \left(A_k \cos\sqrt{\lambda_k}\, t + \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin\sqrt{\lambda_k}\, t \right),$$

где $\varphi_k(x)$ *— нормированная амплитудная функция, отвечающая собственному значению* λ_k,
$A_k = \int\limits_0^\ell \varphi_k(x)\varphi(x)d[M(x)]$, $B_k = \int\limits_0^\ell \varphi_k(x)\psi(x)d[M(x)]$ *является решением математической модели*

$$\begin{cases} \dfrac{dM}{d[\sigma]}(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial[\sigma]}\left(p(x)\dfrac{\partial u}{\partial \mu}\right) - u\dfrac{dQ}{d[\sigma]}, \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0, \end{cases}$$

причем ряд для $u(x,t)$ *можно дифференцировать почленно по* t *дважды и по* μ, $[\sigma]$ *также дважды; полученные таким образом ряды сходятся абсолютно и равномерно на множестве* $\overline{[0,\ell]}_\mu \times [0,T]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильин В. А. Оптимизация граничных управлений колебаниями струны / В.А. Ильин, Е.И. Моисеев // Успехи математических наук. — 2005. — Т. 60, вып. 6 (366). — С. 89–114.

2. Избранные труды В.А. Ильина: В 2-х томах: Том 2. — М.: МАКС Пресс, 2008. — 692 с.

3. Егоров А. И. Об управляемости упругих колебаний последовательно соединенных объектов с распределенными параметрами / А. И. Егоров, Л. Н. Знаменская // Тр. ИММ УрО РАН. — 2011. — Т. 17, вып. 1. — С. 85–92.

4. Боровских А.В. Формулы граничного управления неоднородной струной / А.В. Боровских // Дифференциальные уравнения. — 2007. — Т. 43, вып. 1. — С. 64–89.

5. Провоторов В.В. Оптимальное управление параболической системой с распределенными параметрами на графе / В.В. Провоторов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2014. — Вып. 3. — С. 154–163.

6. Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи: пер. с англ. / Ф. Аткинсон. — М.: Мир, 1968. — 749 с.

7. Покорный Ю.В. Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю.В. Покорный // Докл. АН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С. 167–169.

8. Покорный Ю.В. О дифференциалах Стилтьеса в обобщенной задаче Штурма-Лиувилля / Ю.В. Покорный // Докл. АН. — 2002. — Т. 383, № 5. — С. 262–265.

9. Покорный Ю.В. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач / Ю.В. Покорный, М.Б. Зверева, С.А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, № 1. — С. 111–154.

10. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задач / Ю.В. Покорный, Ж.И. Бахтина, М.Б. Зверева, С.А. Шабров. — М.: Физматлит, 2009. — 192 с.

11. Баев А.Д. О единственности решения математической модели вынужденных колебаний струны с особенностями / А.Д. Баев, С.А. Шабров, Меач Мон // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 50-55.

12. Зверева М.Б. Об адаптации метода конечных элементов для решения граничной задачи с дифференциалами Стилтьеса на геометрическом графе / М.Б. Зверева, С.А. Шабров, Е.В. Лылов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 97–105.

13. Зверева М.Б. Дифференциальные уравнения с разрывными решениями: качественная теория / М.Б. Зверева. — Саарбрюккен, 2012. — 112 с.

14. Дифференциал Стилтьеса в импульсных задачах с разрывными решениями / М.Б. Давыдова, Ю.В. Покорный, М.Б. Зверева, С.А. Шабров // Доклады Академии наук. — 2009. —

Т. 428, № 5. — С. 595–597.

REFERENCES

1. Ilin V.A., Moiseev E.I. Optimization of the Boundary Controls of String Vibrations. [Il'in V. A., Moiseev E.I. Optimizaciya granichnyx upravlenij kolebaniyami struny]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 2005, vol. 60, iss. 6 (366), pp. 89–114.

2. Selected Works of V.A. Ilin: In 2 Volumes: Volume 2. [Izbrannye trudy V.A. Il'ina: V 2-x tomax: Tom 2]. Moscow: MAKS Press, 2008, 692 p.

3. Egorov A.I., Znamenskaya L.N. Controllability of Elastic Oscillations of Serially Connected Objects with Distributed Parameters. [Egorov A. I., Znamenskaya L. N. Ob upravlyaemosti uprugix kolebanij posledovatel'no soedinennyx ob"ektov s raspredelennymi parametrami]. *Tr. IMM UrO RAN — Proc. Inst. Math. Mech.*, 2011, vol. 17, iss. 1, pp. 85–92.

4. Borovskikh A.V. Formulas of Boundary Control of an Inhomogeneous String. [Borovskix A.V. Formuly granichnogo upravleniya neodnorodnoj strunoj]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2007, vol. 43, iss. 1, pp. 64–89.

5. Provotorov V.V. Optimum Control of the Parabolic System with the Distributed Parameters on the Graph. [Provotorov V.V. Optimal'noe upravlenie parabolicheskoj sistemoj s raspredelennymi parametrami na grafe]. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Ser. 10. Prikladnaya matematika. Informatika. Processy upravleniya — Vestnik of St. Petersburg State University. Applied mathematics. Computer science. Control processes*, 2014, iss. 3, pp. 154–163.

6. Atkinson F.V. Discrete and Continuous Boundary Problems. [Atkinson F. Diskretnye i nepreryvnye granichnye zadachi]. Moscow, Mir, 1968, 749 p.

7. Pokornyi Yu. V. The Stieltjes Integral and Derivatives with Respect to the Measure in Ordinary Differential Equations. [Pokornyj Yu.V. Integral Stilt'esa i proizvodnye po mere v obyknovennyx differencial'nyx uravneniyax]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 1999, vol. 364, no. 2, pp. 167–169.

8. Pokornyi Yu. V. The Stieltjes Derivatives in a Generalized Sturm-Liouville Problem. [Pokornyj Yu.V. O differencialax Stilt'esa v obobshhennoj zadache Shturma-Liuvillya]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2002, vol. 383, no. 5, pp. 262–265.

9. Pokorny Yu. V., Zvereva M. B., Shabrov S. A. Oscillation theory of the Sturm-Liouville problem for impulsive problems. [Pokornyj Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnaya teoriya Shturma–Liuvillya dlya impul'snyx zadach]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 2008, vol. 63, iss. 1, pp. 111–154.

10. Pokorny Yu. V., Bakhtina J.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A.. [Pokornyj Yu.V., Baxtina Zh.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnyj metod Shturma v spektral'nyx zadach]. Moscow: Fizmatlit, 2009, 192 p.

11. Baev A.D., Shabrov S.A., Meach Mon Uniqueness Of The Solution Mathematical Model Of Forced String Oscillation Singularities. [Baev A.D., Shabrov S.A., Meach Mon O edinstvennosti resheniya matematicheskoj modeli vynuzhdennyx kolebanij struny s osobennostyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, iss. 1, pp. 50–55.

12. Zvereva M.B., Shabrov S.A., Lilov E.V. Adaptation of the Finite Elements Method for Solution of a Boundary Value Problem with Stieltjes Differentials on a Graph. [Zvereva M.B., Shabrov S.A., Lylov E.V. Ob adaptacii metoda konechnyx e'lementov dlya resheniya granichnoj zadachi s differencialami Stilt'esa na geometricheskom grafe]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 1, pp. 97–105.

13. Zvereva M.B. Differential equations with discontinuous solutions: qualitative theory. [Zvereva M.B. Differencial'nye uravneniya s razryvnymi resheniyami: kachestvennaya teoriya].

Saarbruecken, 2012, 112 p.

14. Pokornyi Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A., Davydova M.B. Stieltjes differential pulsed problems with discontinuous solutions. [Pokornyi Yu. V., Zvereva M. B., Shabrov S. A., Davydova M. B. Differencial Stilt'esa v impul'snyx zadachax s razryvnymi resheniyami]. *Doklady Akademii nauk — Reports of Academy of Sciences*, 2009, Vol. 428, no. 5, pp. 595–597.

Баев Александр Дмитриевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа, математический факультет Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: alexsandrbaev@mail.ru

Baev Alexander Dmitrievich, doctor of physical-mathematical Sciences, Professor, head of Department of mathematical analysis, Voronezh state University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: alexsandrbaev@mail.ru

Залукаева Жанна Олеговна, аспирант, кафедра математического анализа, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: zalukaevajoanna@yandex.ru
Тел.: (473) 2-20-86-90

Zalukaeva Zhanna Olegovna, Post-graduate student of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: zalukaevajoanna@yandex.ru
Tel.: (473) 2-20-86-90

Зверева Маргарита Борисовна, доцент кафедры математического анализа математического факультета Воронежского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: margz@rambler.ru
Тел.: (473) 2-20-86-90

Zvereva Margarita Borisovna, Associate Professor, Department of Mathematical Analysis, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Candidate of physico-mathematical sciences, docent, Voronezh, Russian Federation
E-mail: margz@rambler.ru
Tel.: (473) 2-20-86-90

Шабров Сергей Александрович, доцент кафедры математического анализа математического факультета Воронежского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: shabrov_s_ a@math.vsu.ru

Shabrov Sergey Alexandrovich, Associate Professor, Department of Mathematical Analysis, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Candidate of physico-mathematical sciences, docent, Voronezh, Russian Federation
E-mail: shabrov_s_ a@math.vsu.ru