УДК 519.21

НАХОЖДЕНИЕ КАПИТАЛА СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ, РАБОТАЮЩЕЙ НА ФИНАНСОВОМ РЫНКЕ, МЕТОДАМИ ГРУППОВОГО АНАЛИЗА

О. В. Александрова, Т. В. Жмыхова

Донбасская национальная академия строительства и архитектуры

Поступила в редакцию 30.08.2014 г.

Аннотация. Рассмотрено стохастическое дифференциальное уравнение, описывающее динамику капитала страховой компании, работающей на финансовом (B, S) - рынке и получающей дивиденды за владение акцией. При этом выделен случай, когда финансовый рынок состоит из безрискового актива - банковского счета и рискового актива – акции. Для описания эволюции цены этой акции использовалось геометрическое броуновское движение, так называемая модель П. Самуэльсона. Считалось, что страховая компания работает только с собственным капиталом, привлечение средств извне не рассматривалось. Учитывая доход от инвестиционной деятельности на финансовом (B, S) - рынке, составлено уравнение, описывающее динамику капитала страховой компании, для которого методами группового анализа было найдено решение в явном виде.

Ключевые слова: стохастическое дифференциальное уравнение, групповой анализ, допустимый оператор, группа преобразований, первые интегралы, (B, S) – рынок.

FINDING THE CAPITAL OF THE INSURANCE COMPANY OPERATING IN THE FINANCIAL MARKET, THE METHODS OF GROUP ANALYSIS

O. V. Aleksandrova, T. V. Zhmykhova

Abstract. The stochastic differential equation, describing the insurance company capital dynamics working on financial (B, S) - market and drawing dividends for possession an share, is considered. A case is thus distinguished, when a financial market consists of riskfree asset - bank account and risk asset - share. For description of share price evolution geometrical brownian motion, so-called model of P.Samuelson, was used. It was considered that an insurance company worked only with a property capital, bringing in of facilities from outside was not examined. Taking into account an investment activity income on financial (B, S) - market, an equation was worked out, describing the dynamics of insurance company capital. It was found in the explicit solution by the methods of group analysis for this equation.

Keywords: stochastic differential Ito equation, group analysis, group of transformations, first integral, (B,S) – market.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть задан финансовый (B, S)–рынок, состоящий из двух активов: безрискового (банковского счета), цена которого описывается уравнением:

$$dB(t) = rB(t)dt,\ B(0) > 0, \tag{1}$$

где r $(r > 0)$ — процентная ставка или банковский процент, $B(0)$ — сумма на депозите в начальный момент времени. Цена рискового актива (акции) описывается моделью, заданной на стандартном вероятностном пространстве $(\Omega,\ F, \mathrm{P})$, которая имеет вид:

$$dS(t) = S(t)\left(\mu dt + \sigma dW(t)\right), \tag{2}$$

где $W(t)$ — стандартный винеровский процесс.

Пусть страховая компания, имеющая на момент времени t капитал $X_x(t)$ $(X(0) = x)$, работает на финансовом (B, S) - рынке, цены на котором описываются уравнениями (1) и (2), причем

$uX_x(t)$, $0 < u < 1$ — часть капитала, которую страховая компания инвестирует в акции,

$(1-u)\,X_x(t)$ — часть капитала, размещаемая компанией на банковском депозите.

За владение акцией осуществляется выплата дивидендов D со скоростью $\delta uS(t)$, $0 \leqslant \delta < r$- пропорциональной рисковой составляющей капитала [1], а именно:

$$dD(t) = \delta u dt. \tag{3}$$

Считаем, что страховая компания работает только с собственным капиталом, привлечение средств извне не рассматривается. Если в момент времени t цена акции $S(t)$, тогда на сумму $uX_x(t)$ можно будет купить $\frac{uX_x(t)}{S(t)}$ акций.

Учитывая доход от инвестиционной деятельности на (B, S) - рынке, уравнение, описывающее динамику капитала страховой компании, имеет вид:

$$dX_x(t) = udB(t) + (1-u)dS(t) + dD(t), \tag{4}$$

или, учитывая (1), (2) и (3), уравнение (4) можно переписать в виде:

$$dX_x(t) = \left(rX_x(t) + (1-u)S(t)(\mu - r + \delta)\right)dt + (1-u)S(t)\sigma dW(t). \tag{5}$$

ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Решение уравнения (5) будем искать методами группового анализа, которые для детерминированных дифференциальных уравнений были разработаны С. Ли и развиты Л.В. Овсянниковым, напр. [2]. Методы группового анализа стохастических дифференциальных уравнений были впервые предложены в работе [3] и получили более широкое применение в работах итальянских ученых [4]–[6]. Однако подход, предложенный авторами в [4]–[6], не позволяет в большинстве случаев решать стохастические дифференциальные уравнения, а также строить их первые интегралы. В статье [7] была доказана теорема, позволяющая строить первые интегралы для стохастических дифференциальных уравнений методами группового анализа этих уравнений. Также в работе [8] было рассмотрено линейное стохастическое дифференциальное уравнение общего вида с произвольными параметрами:

$$du = (bu + \alpha)\,dt + (\sigma u + \beta)dW(t), \tag{6}$$

где b, α, σ, β — параметры, в общем случае не равные нулю.

Приведем основные понятия группового анализа стохастических дифференциальных уравнений (СДУ).

Все понятия и теоремы сформулированы для стохастического дифференциального уравнения вида:

$$u(t) = u_0 + \int_0^t A(h, u(h))\, dh + \int_0^t B(h, u(h))\, dW(h), \tag{7}$$

рассматриваемого на полном вероятностном пространстве (Ω, F, P).

В уравнении (7) $\{W(t), t \in [0, T]\} - d$ - мерный винеровский процесс относительно фильтрации $\{F_t, t \in [0, T]\}$, $W^{(i)}(t)$ - независимые винеровские процессы, $u_0 - F_0$ -измеримый случайный вектор, $A : [0, T] \times R^n \to R^n$, $B : [0, T] \times R^n \to R^n \times R^d$ - измеримые неслучайные функции. Предполагается, что коэффициенты уравнения (7) удовлетворяют условиям теоремы существования и единственности решения, сформулированной в работе [9, с. 109].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНВАРИАНТНОСТИ СИСТЕМЫ СДУ ИТО ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Будем рассматривать обратимые преобразования переменной времени в интервале $t \in [0, T]$, зависящие от одного вещественного параметра a:

$$s = f(t, a), \tag{8}$$

где $s \in [s_0, s_T]$, $a \in \Delta \subseteq R$, - групповой параметр, Δ - симметричный около нуля интервал, $s_0 = f(0, a)$, $s_T = f(T, a)$.

Пусть функция $f(t, a)$ удовлетворяет следующим условиям:

1). $f(t, 0) = t$, $\forall t \in [0, T]$;

2). $f(f(t, a), b) = f(t, a + b)$, $\forall t \in [0, T]$, $\forall a \in \Delta$, $\forall b \in \Delta$, таких, что $(a + b) \in \Delta$;

3). $f \in C^2([0, T] \times \Delta)$, $f_t > 0$, $\forall t \in [0, T]$, $\forall a \in \Delta$.

Из условия 2) следует, что обратное преобразование получается изменением знака параметра a, т.е. $f^{-1}(s, a) = f(f(t, a), -a) = t = f(s, -a)$.

Произведём в уравнении (7) замену переменной времени по формуле $t = f(s, -a)$. Получим:

$$\widehat{u}(s) = u_0 + \int_{s_0}^{s} A(f(r, -a), \widehat{u}(r))\, f_r(r, -a)\, dr + \int_{s_0}^{s} B(f(r, -a), \widehat{u}(r)) \sqrt{f_r(r, -a)} dw(r). \tag{9}$$

В полученном уравнении (9) $w(s)$ - это новый винеровский процесс, определенный на том же самом вероятностном пространстве, что и исходный винеровский процесс $W(t)$, входящий в уравнение (7), $s = f(t, a)$, $t \in [0, T]$, $a \in \Delta$.

Следующая лемма устанавливает взаимосвязь винеровских процессов, входящих в уравнения (7) и (9).

Лемма 1. *Пусть $W(t)$ стандартный винеровский процесс, $s = f(t, a)$ локальная однопараметрическая группа преобразований, где функция $f(t, a)$ удовлетворяет условиям (1–3), $f_s(s, -a) > 0$ для всех допустимых s, a. Тогда существует винеровский процесс $w(s)$, определенный на том же самом вероятностном пространстве, что и $W(t)$, такой, что при всех допустимых t, s, a с вероятностью 1 справедливы равенства:*

$$W(f(s, -a)) = \int_{s_0}^{s} \sqrt{f_h(h, -a)} dw(h), \tag{10}$$

$$w\left(f\left(t,a\right)\right)=\int\limits_{0}^{t}\sqrt{f_h\left(h,a\right)}dW\left(h\right). \tag{11}$$

Следствие 1. *Если* $s_0=f\left(0,a\right)$, *то* $P\left\{w\left(s_0\right)=0\right\}=1$.

Далее будем рассматривать преобразования фазовой переменной u:

$$v=g\left(t,W\left(t\right),u,a\right). \tag{12}$$

Здесь $a\in\Delta\subseteq R$, - групповой параметр, Δ - симметричный около нуля интервал.

Функция g удовлетворяет условиям:

1a) $g\left(t,W\left(t\right),u,0\right)=u$;

2a) $g\left(f\left(t,a\right),w\left(f\left(t,a\right)\right),g\left(t,W\left(t\right),u,a\right),b\right)=g\left(t,W\left(t\right),u,a+b\right)$ с вероятностью 1 для любых $t\in[0,T]$, $u\in R^n$, $a\in\Delta$, $b\in\Delta$, таких, что $(a+b)\in\Delta$, $W\left(t\right)$ и $w\left(s\right)$ связаны преобразованием времени по формулам (10) – (11);

3a) $g\in C^2\left([0,T]\times R^d\times R^n\times\Delta\right)$.

4a) матрица первых производных функции g по переменной u невырожденная.

Преобразования f и g, определенные формулами (8) и (12) порождают группу G.

Дадим определение допустимой группы для СДУ Ито (7).

Определение 1. *Уравнение (7) называется инвариантным относительно группы* G *(или допускает группу* G*), если процесс*

$$v(s)=g\left(f\left(s,-a\right),W\left(f\left(s,-a\right)\right),u\left(f\left(s,-a\right)\right),a\right)$$

является решением уравнения:

$$v(s)=g\left(0,0,u_0,a\right)+\int\limits_{s_0}^{s}A(h,v(h))dh+\int\limits_{s_0}^{s}B(h,v(h))dw(h),$$

где $u\left(t\right)$ *— решение уравнения (7).*

Замечание 1. Определение 1 нужно понимать следующим образом: под действием групповых преобразований вида (8), (12) СДУ Ито (7) преобразуется в СДУ Ито с такими же коэффициентами сноса и диффузии, но с другим винеровским процессом, который связан со старым винеровским процессом, входящим в уравнение (1) формулами (10) - (11). При этом также изменяется начальное условие.

Приведем основные характеристики допустимой группы.

Каждая допустимая группа однозначно определяется своим касательным векторным полем. Касательное векторное поле группы G можно также определить в виде дифференциального оператора первого порядка, который также называют инфинитезимальным оператором группы. Следующим определением мы фиксируем вид инфинитезимального оператора группы, допустимой для СДУ Ито (7).

Определение 2. *Линейный дифференциальный оператор вида*

$$X=\xi\left(t\right)\partial_t+\sum_{i=1}^{n}\eta^{(i)}\left(t,W\left(t\right),u\right)\partial_{u_i} \tag{13}$$

будем называть инфинитезимальным оператором допустимой группы G *для уравнения (7).*

По координатам оператора (13) строятся уравнения Ли:

$$\frac{\partial f\left(t,a\right)}{\partial a}=\xi\left(f\left(t,a\right)\right),\quad f\left(t,0\right)=t; \tag{14}$$

$$\frac{\partial g^{(i)}\left(t,W\left(t\right),u,a\right)}{\partial a}=\eta^{(i)}\left(f\left(t,a\right),w\left(f\left(t,a\right)\right),g\left(t,W\left(t\right),u,a\right)\right),\quad \eta^{(i)}\left(t,W\left(t\right),u,0\right)=u_i, \tag{15}$$

$$i=1,\ldots n.$$

Равенства (15) выполнены с вероятностью 1 для винеровских процессов $W\left(t\right)$ и $w\left(s\right)$, связанных преобразованием времени по формулам (10) – (11), $\forall u\in R^n$, $\forall t\in[0,T]$, $\forall a\in\Delta\subseteq R$, где Δ – некоторый симметричный около нуля интервал.

Далее приведен критерий инвариантности СДУ (стохастического дифференциального уравнения) (7), который представляет собой систему линейных уравнений в частных производных.

Теорема 1. (Критерий инвариантности системы СДУ относительно допустимой группы.) *Система уравнений (7) инвариантна относительно группы преобразований с инфинитезимальным оператором (13) тогда и только тогда, когда коэффициенты уравнения и координаты оператора удовлетворяют следующей системе уравнений:*

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}\xi_t\cdot B-\eta_u^{\cdot}B+\xi\cdot B_t+B_u\cdot\eta-\eta_W^{=}0,\\ -\eta_t+\xi_t\cdot A-\eta_u^{\cdot}A+\xi\cdot A_t+A_u\cdot\eta-\\ -\frac{1}{2}Sp\left(\eta_{uu}\cdot B\cdot B^{*}\right)-Sp\left(\eta_{uW}\cdot B\right)-\frac{1}{2}Sp\left(\eta_{WW}\right)=0.\end{array}\right. \tag{16}$$

“*” - этот знак, выставленный вверху обозначения матрицы, обозначает матрицу, транспонированную к данной матрице.

Определение 3. *Функция $\Phi\neq const.$, где $\Phi:[0,T]\times R^d\times R^n\to R,\Phi\in C^2\left([0,T]\times R^d\times R^n\right)$, называется первым интегралом для СДУ (1), если с вероятностью 1 выполнено равенство: $\Phi\left(t,W\left(t\right),u\left(t\right)\right)=\Phi\left(0,0,u_0\right),\forall t\geqslant 0$.*

Для построения решения, в случае уравнения (5) первого интеграла, воспользуемся теоремой из [7]:

Теорема 2. *Если уравнение (1) допускает оператор*

$$X^{*}=\partial_t+\sum_{i=1}^{n}\theta^{(i)}\left(t,W\left(t\right),u\right)\cdot h\left(\Phi\left(t,W\left(t\right),u\left(t\right)\right)\right)\partial_{u_i}, \tag{17}$$

где функции $\theta^{(i)}\left(t,W\left(t\right),u\right)$ удовлетворяют системе определяющих уравнений (16) при условии, что $\xi\left(t\right)=1$, то функция $\Phi\left(t,W\left(t\right),u\left(t\right)\right)$ является первым интегралом системы стохастических уравнений (7).

Если функция $\Phi\left(t,W\left(t\right),u\left(t\right)\right)$ является первым интегралом системы стохастических уравнений (7), то уравнение (7) допускает оператор

$$X^{*}=\partial_t+\sum_{i=1}^{n}\theta^{(i)}\left(t,W\left(t\right),u\right)\cdot h\left(\Phi\left(t,W\left(t\right),u\left(t\right)\right)\right)\partial_{u_i},$$

где функции $\theta^{(i)}\left(t,W\left(t\right),u\right)$ удовлетворяют системе определяющих уравнений (16) при условии, что $\xi\left(t\right)=1$, функция h произвольная.

Для упрощения записей и вычислений уравнение (5) приведем к уравнению (6), сделав замену

$$b=r,\ \alpha=uS(\mu-r+\delta),\ \beta=\frac{\alpha\sigma}{\mu-r+\delta}. \tag{18}$$

После замены (18) уравнение (5) преобразуется к виду:

$$dX_x(t)=\left(bX_x(t)+\alpha\right)dt+\beta dW(t). \tag{19}$$

Подставим коэффициенты уравнения (19) в систему (16), положив при этом $\xi(t) = 1$, получим:

$$\begin{cases} -\eta_W - \eta_X \beta = 0, \\ -\eta_t - \eta_X (bX + \alpha) + b\eta - \frac{1}{2}\eta_{WW} - \eta_{XW}\beta - \frac{1}{2}\eta_{XX}\beta^2 = 0 \end{cases} \tag{20}$$

Решая полученную систему (20), найдем:

$$\eta = e^{bt}\mathrm{I}\left((X - \beta W(t))\, e^{-bt} - \int\limits_0^t e^{-bs}\,(b\beta W(s) + \alpha)\, ds\right). \tag{21}$$

Согласно приведенной выше теореме 2, функция

$$\Phi = (X - \beta W(t))\, e^{-bt} - \int\limits_0^t e^{-bs}\,(b\beta W(s) + \alpha)\, ds \tag{22}$$

является первым интегралом уравнения (19), в чем легко убедиться, применив к выражению (22) формулу Ито [10]:

$$d\Phi = 0.$$

Возвращаясь к старым переменным, учитывая замену (18) и определение 3 первого интеграла, окончательно получим решение уравнения (5):

$$\mathrm{X} = \frac{\alpha\sigma W(t)}{\mu - r + \delta} + e^{rt}\int\limits_0^t e^{-rs}\left(\frac{\alpha\sigma r W(s)}{\mu - r + \delta} + uS(s)(\mu - r + \delta)\right) ds. \tag{23}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье рассмотрена модель финансовой математики - стохастическое дифференциальное уравнение, описывающее динамику капитала страховой компании, с учетом дохода от инвестиционной деятельности на финансовом рынке. Модель состоит из двух активов: безрискового (банковского счета) и рискового (акции). Рассматривался случай, когда страховая компания получает дивиденды за владение акцией. Для рассматриваемого уравнения методами группового анализа стохастических дифференциальных уравнений было найдено решение в явном виде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данилюк Е.Ю. Хеджирование опциона продажи с заданной вероятностью в случае выплаты дивидендов по рисковому активу / Е.Ю. Данилюк, Н.С. Демин // Вестник Томского государственного университета. — 2009. — № 4(9). — С. 32–42.

2. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л. В. Овсянников. — М.: Наука, 1978. — 400 с.

3. Далецкий Ю. Л. Стохастические уравнения и дифференциальная геометрия / Ю. Л. Далецкий, Я. И. Белопольская. — К.: Вища школа, 1989. — 395 с.

4. Gaeta G. Lie point symmetries and stochastic differential equations / G. Gaeta, N. Rodriguez Quinterro // J. Phys. Math. Gen. — 1999. — V. 32. — P. 8485–8505.

5. Gaeta G. Lie point symmetries and stochastic differential equations II / G. Gaeta // J. Phys. Math. Gen. — 2000. — V. 33. — P. 4883–4902.

6. Gaeta G. Symmetry of Stochastic Equations / G. Gaeta // Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. — 2004. — V. 50, Part 1. — P. 98–109.

7. Александрова О.В. Симметрия и первые интегралы систем стохастических дифференциальных уравнений Ито / Александрова О.В. // Вестник НовГУ им. Ярослава Мудрого. Сер.: Физико-математические науки. — 2013. — Т. 1, № 75. — С. 54–60.

8. Александрова О. В. Симметрии линейных стохастических уравнений Ито / О. В. Александрова // Науковий часопис НПУ им. М. П. Драгоманова, серия 1, физ.-мат. науки. — 2004. — № 5. — С. 89–96.

9. Крылов Н.Б. О стохастических эволюционных процессах / Н.Б. Крылов, Б.Л. Розовский. — М.: ВИНИТИ, Результаты науки и инженерии, современные проблемы математики. — 1979. — Т. 14. — С. 72–147.

10. Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения: введение в теорию и приложения / Б. Оксендаль. — М.: Мир, ООО "Издательство АСТ", 2003. – 408 с.

REFERENCES

1. Danyluk E. Yu., Demin N. S. Hedging option sales with a given probability in the case of payment of dividends on the risky assets. [Danilyuk E.Yu., Demin N.S. Xedzhirovanie opciona prodazhi s zadannoj veroyatnost'yu v sluchae vyplaty dividendov po riskovomu aktivu]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta — Bulletin of Tomsk State University*, 2009, no. № 4(9), pp. 32–42.

2. Ovsyannikov L. V. Group analysis of differential equations. [Ovsyannikov L. V. Gruppovoj analiz differencial'nyx uravnenij]. Moscow: Nauka, 1978, 400 p.

3. Daletskiy L., Belopol'skaya Ya. I. Stochastic equations and differential geometry. [Daleckij Yu. L., Belopol'skaya Ya. I. Stoxasticheskie uravneniya i differencial'naya geometriya]. K: Higher School, 1989, 395 p.

4. Gaeta G., Rodriguez Quinterro N. Lie point symmetries and stochastic differential equations. J. Phys. Math. Gen., 1999, vol. 32, pp. 8485–8505.

5. Gaeta G. Lie point symmetries and stochastic differential equations II. J. Phys. Math. Gen., 2000, vol. 33, pp. 4883–4902.

6. Gaeta G. Symmetry of Stochastic Equations. Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2004, vol. 50, Part 1, pp. 98–109.

7. Aleksandrova O. V. Symmetry and first integrals for systems of stochastic differential equations by Ito. [Aleksandrova O.V. Simmetriya i pervye integraly sistem stoxasticheskix differencial'nyx uravnenij Ito]. *Vestnik NovGU im. Yaroslava Mudrogo. Ser.: Fiziko-matematicheskie nauki — Journal NovSU by Yaroslav Mudriy. Ser.: Physics and mathematics*, 2013, vol. 75, no. 1, pp. 54–60.

8. Aleksandrova O. V. Symmetries of linear Ito stochastic equations. [Aleksandrova O. V. Simmetrii linejnyx stoxasticheskix uravnenij Ito]. *Naukovij chasopis NPU im. M. P. Dragomanova, seriya 1, fiz.-mat. nauki — Science magazine NPU them. M. P. Dragomanov, Series 1, Phys.-Math. science*, 2004, no. 5, pp. 89–96.

9. Krylov N. B., B. L. Rozovskiy On stochastic evolutionary processes. [Krylov N.B., Rozovskij B.L. O stoxasticheskix e'volyucionnyx processax]. Moscow: VINITI, results of science and engineering, advanced math. problems, 1979, vol. 14, pp. 72–147.

10. Oksendal B. Stochastic Differential Equations: An introduction to the theory and applications. [Oksendal' B. Stoxasticheskie differencial'nye uravneniya: vvedenie v teoriyu i prilozheniya]. Moscow: Mir, 2003, 408 p.

Александрова О.В., к.ф.-м.н., доцент кафедры Высшей и прикладной математики и информатики Донбасской национальной академии строительства и архитектуры, г. Макеевка, Донецкая область, Украина
E-mail: alexand_olga_la@mail.ru

Aleksandrova O.V., Ph.D. (Physics & Mathematics), the associate professor of Higher and Applied Mathematics and Computer Science Department of Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeyevka, Donetsk region, Ukraine
E-mail: alexand_olga_la@mail.ru

Жмыхова Т. В., к.ф.-м.н., доцент кафедры Высшей и прикладной математики и информатики Донбасской национальной академии строительства и архитектуры, г. Макеевка, Донецкая область, Украина
E-mail: zhmykhovatanya@mail.ru

Zhmykhova T. V., Ph.D. (Physics & Mathematics), the associate professor of Higher and Applied Mathematics and Computer Science Department of Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeyevka, Donetsk region, Ukraine
E-mail: zhmykhovatanya@mail.ru