УДК 517.95

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Т. К. Юлдашев

Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева

Поступила в редакцию 18.06.2014 г.

Аннотация: изучается однозначная разрешимость линейной обратной задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных четвертого порядка. Сначала модифицируется метод вырожденного ядра интегрального уравнения Фредгольма второго рода для случая интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма в частных производных четвертого порядка. Задача сводится к решению системы дифференциально-алгебраических уравнений четвертого порядка. С помощью известных свойств определителей относительно функции восстановления получится неоднородное дифференциальное уравнение четвертого порядка, которое решается методом вариации произвольных постоянных при начальных условиях.

Ключевые слова: линейная обратная задача, уравнение в частных производных четвертого порядка, уравнение Фредгольма с вырожденным ядром, неоднородное дифференциальное уравнение, однозначная разрешимость.

AN INVERSE PROBLEM FOR LINEAR FREDHOLM PARTIAL INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION OF FOURTH ORDER

T. K. Yuldashev

Abstract: it is studying the one value solvability of the linear inverse problem for a partial Fredholm integro-differential equations of the fourth order. First, it is modified to the case of partial Fredholm integro-differential equations of the fourth order the method of degenerate kernel designed for Fredholm integral equations of the second kind. The considering problem is reduced to solve a system of differential-algebraic equations of the fourth order. By the aid of the known determinant properties in solving the inverse problem with respect to the restore function is obtained the inhomogeneous differential equation of the fourth order, which is solved by the variation method of arbitrary constants with initial value conditions.

Keywords: linear inverse problem, partial equation of the fourth order, Fredholm equation with degenerate kernel, inhomogeneous differential equation, one valued solvability.

Математическое моделирование многих процессов, происходящих в реальном мире, приводит к изучению прямых и обратных задач для уравнений в частных производных, не имеющих аналогов в классической математической физике. Теория начальных и краевых задач в силу ее прикладной важности в настоящее время является одним из важнейших разделов теории дифференциальных уравнений (см., напр. [1]-[3]). Представляют большой интерес с точки зрения физических приложений дифференциальные уравнения четвертого порядка (см., напр. [4]–[6]). Изучение многих задач газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек приводит к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков [7].

Теория обратных задач представляет собой активно развивающееся направление современной теории дифференциальных уравнений. Интенсивное исследование обратных задач в значительной степени обусловлено необходимостью разработки математических методов решения обширного класса важных прикладных проблем, связанных с обработкой и интерпретацией наблюдений. Обратную задачу назовем линейной, если функция восстановления входит в данное уравнение линейно. Линейные обратные задачи для линейных и нелинейных уравнений в частных производных второго, третьего, четвертого и более высоких порядков рассматривались многими авторами (см., напр. [8]–[16]). Нелинейные обратные задачи рассматривались в работах [17]–[20].

В настоящей работе предлагается методика изучения линейной обратной задачи для линейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных четвертого порядка с вырожденным ядром.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается в области $\Omega \equiv \Omega_T \times R$ интегро-дифференциальное уравнение Фредгольма вида

$$\frac{\partial^4 u(t,x)}{\partial t^4} + \int\limits_0^T K(t,s)\frac{\partial^4 u(s,x)}{\partial x^4}ds = f(x) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$\left[\begin{array}{l} u(0,x) = \varphi_1(x), u_t(0,x) = \varphi_2(x), \\ u_{tt}(0,x) = \varphi_3(x), u_{ttt}(0,x) = \varphi_4(x), x \in R, \end{array}\right. \tag{2}$$

$$u(t,0) = h(t,0) + f(0)\frac{t^4}{4!} - \sum_{i=1}^n q_i(t)N_{1i}, \tag{3}$$

$$u_x(t,0) = h_x(t,0) + f'(0)\frac{t^4}{4!} - \sum_{i=1}^n q_i(t)N_{2i}, \tag{4}$$

$$u_{xx}(t,0) = h_{xx}(t,0) + f''(0)\frac{t^4}{4!} - \sum_{i=1}^n q_i(t)N_{3i}, \tag{5}$$

$$u_{xxx}(t,0) = h_{xxx}(t,0) + f'''(0)\frac{t^4}{4!} - \sum_{i=1}^n q_i(t)N_{4i} \tag{6}$$

и дополнительными условиями

$$u(t_0,x) = \psi(x), t_0 \in (0;T)\,, x \in R, \tag{7}$$

$$f(0) = M_1, f'(0) = M_2, f''(0) = M_3, f'''(0) = M_4, \tag{8}$$

где $f(x) \in C^{(4)}\,(R)$ — функция восстановления, $\varphi_k(x) \in C^4(R), k = \overline{1,4}$, $K(t,s) = \sum\limits_{i=1}^n a_i(t)b_i(s)$, $0 < a_i(t), b_i(s) \in C(\Omega_T)$, N_k, M_k — заданные постоянные, $k = \overline{1,4}$, $\Omega_T \equiv [0,T]$, $\psi(x) \in C(R)$, $h(t,x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)\cdot t + \frac{\varphi_3(x)}{2!}t^2 + \frac{\varphi_4(x)}{3!}t^3$, $q_i(t) = \int\limits_0^t \frac{(t-s)^3}{3!}a_i(s)ds$.

Определение. Решением обратной задачи (1)–(8) называется пара непрерывных функций $\left\{u(t,x) \in C^{4,4}(\Omega), f(x) \in C^4(R)\right\}$ удовлетворяющая уравнению (1) и условиям (2)–(8).

Основной подход данной работы состоит в том, что модифицируется и развивается метод интегрального уравнения Фредгольма с вырожденным ядром для случая обратной задачи для линейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных четвертого порядка с вырожденным ядром.

Отличительной чертой данной работы является то, что при решении обратной задачи (1)–(8) относительно восстанавливаемой функции получится неоднородное дифференциальное уравнение четвертого порядка. Для однозначного определения решения этого уравнения дополнительно задаются четыре начальные условия.

2. НАЧАЛЬНАЯ ЗАДАЧА (1) – (6)

В данной работе развивается методика работы [14]. С помощью обозначения

$$c_i(x) = \int_0^T b_i(s) \frac{\partial^4 u(s,x)}{\partial x^4} ds \tag{9}$$

уравнение (1) перепишется в следующем виде

$$\frac{\partial^4 u(t,x)}{\partial t^4} = -\sum_{i=1}^n a_i(t) \cdot c_i(x) + f(x).$$

Четырехкратное интегрирование по t и учет условия (2) в последнем равенстве дают

$$u(t,x) = h(t,x) - \sum_{i=1}^n c_i(x) \cdot q_i(t) + \frac{t^4}{4!} f(x). \tag{10}$$

Дифференцируем (10) четыре раза по x:

$$u_{xxxx}(t,x) = h_{xxxx}(t,x) - \sum_{i=1}^n c_i^{(IV)}(x) \cdot q_i(t) + \frac{t^4}{4!} f^{(IV)}(x). \tag{11}$$

Подставляя (11) в (9), имеем

$$c_i(x) = \int_0^T b_i(s) \left[h_{xxxx}(s,x) - \sum_{j=1}^n c_j^{(IV)}(x) \cdot q_j(s) + \frac{s^4}{4!} f^{(IV)}(x) \right] ds. \tag{12}$$

Примем обозначение

$$B_i(x) = \int_0^T b_i(s) h_{xxxx}(s,x) ds + f^{(IV)}(x) \int_0^T \frac{s^4 b_i(s)}{4!} ds. \tag{13}$$

Пусть

$$A_{ij} = \int_0^T b_i(s) q_j(s) ds > 0. \tag{14}$$

Тогда дифференциальное уравнение (12) запишется в виде

$$c_i(x) + \sum_{j=1}^n A_{ij} \cdot c_j^{(IV)}(x) = B_i(x), i = \overline{1,n}, \tag{15}$$

(15) является системой дифференциально-алгебраических уравнений. Она решается при выполнении следующего условия

$$c_i^{(IV)}(x) = -\lambda c_i(x), 0 < \lambda = const, i = \overline{1,n}. \tag{16}$$

Тогда из (15) получаем следующую систему алгебраических уравнений

$$c_i(x) - \lambda \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \cdot c_j(x) = B_i(x), i = \overline{1,n}. \tag{17}$$

Система алгебраических уравнений (17) однозначно разрешима при любых $B_i(x)$, если выполняется следующее условие

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda A_{11} & -\lambda A_{12} & \dots & -\lambda A_{1n} \\ -\lambda A_{21} & 1-\lambda A_{22} & \dots & -\lambda A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda A_{n1} & -\lambda A_{n2} & \dots & 1-\lambda A_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{18}$$

При выполнении условие (18) решения системы алгебраических уравнений (17) записываются в виде

$$c_i(x) = \frac{\Delta_i(\lambda, x)}{\Delta(\lambda)}, i = \overline{1,n}, \tag{19}$$

где

$$\Delta_i(\lambda, x) = \begin{vmatrix} 1-\lambda A_{11} & \dots & -\lambda A_{1(i-1)} & B_1(x) & -\lambda A_{1(i+1)} & \dots & -\lambda A_{1n} \\ -\lambda A_{21} & \dots & -\lambda A_{2(i-1)} & B_2(x) & -\lambda A_{2(i+1)} & \dots & -\lambda A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda A_{n1} & \dots & -\lambda A_{n(i-1)} & B_n(x) & -\lambda A_{n(i+1)} & \dots & 1-\lambda A_{nn} \end{vmatrix}.$$

С другой стороны, решая дифференциальное уравнение (16), получаем

$$c_i(x) = e^{\nu x} \left[D_{1i} \cos \nu x + D_{2i} \sin \nu x \right] + e^{-\nu x} \left[D_{3i} \cos \nu x + D_{4i} \sin \nu x \right], \tag{20}$$

где $\nu = \sqrt[4]{\frac{\lambda}{4}}$, коэффициенты D_{ki} — подлежат определению, $k = \overline{1,4}$.

Из (19) и (20) получаем, что решение дифференциально-алгебраической системы уравнений (15) имеет вид

$$c_i(x) = e^{\nu x} \left[D_{1i} \cos \nu x + D_{2i} \sin \nu x \right] + e^{-\nu x} \left[D_{3i} \cos \nu x + D_{4i} \sin \nu x \right] + \frac{\Delta_i(\lambda, x)}{\Delta(\lambda)}, i = \overline{1,n}. \tag{21}$$

Для определения коэффициентов $D_{1i}, D_{2i}, D_{3i}, D_{4i}, i = \overline{1,n}$, (20) подставляем в (10)

$$u(t,x) = h(t,x) + \frac{t^4}{4!} f(x) -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} q_i(t) \left\{ e^{\nu x} \left[D_{1i} \cos \nu x + D_{2i} \sin \nu x \right] + e^{-\nu x} \left[D_{3i} \cos \nu x + D_{4i} \sin \nu x \right] \right\}. \tag{22}$$

Используя условий (3)-(6), из (22) имеем

$$D_{1i} = \frac{8\nu^3 N_{1i} - 2\nu^2 N_{2i} - 2\nu N_{3i} - N_{4i}}{8\nu^3}, \quad D_{2i} = \frac{2\nu^2 N_{2i} + 2\nu N_{3i} + N_{4i}}{8\nu^3},$$

$$D_{3i} = \frac{8\nu^3 N_{1i} - 6\nu^2 N_{2i} - 2\nu N_{3i} + N_{4i}}{8\nu^3}, \quad D_{4i} = \frac{2\nu^2 N_{2i} - 2\nu N_{3i} + N_{4i}}{8\nu^3}.$$

Тогда (21) приобретает вид

$$c_i(x)=\sigma_i(x)+\frac{\Delta_i(\lambda,x)}{\Delta_i(\lambda)}, i=\overline{1,n}, \tag{23}$$

где

$$\sigma_i(x)=e^{\nu x}\left[\frac{8\nu^3N_{1i}-2\nu^2N_{2i}-2\nu N_{3i}-N_{4i}}{8\nu^3}\cos\nu x+\ \frac{2\nu^2N_{2i}+2\nu N_{3i}+N_{4i}}{8\nu^3}\sin\nu x\right]+$$

$$+e^{-\nu x}\left[\frac{8\nu^3N_{1i}-6\nu^2N_{2i}-2\nu N_{3i}+N_{4i}}{8\nu^3}\cos\nu x\ +\frac{2\nu^2N_{2i}-2\nu N_{3i}+N_{4i}}{8\nu^3}\sin\nu x\right].$$

Подставляя (23) в (10), имеем

$$u(t,x)=h(t,x)+\frac{t^4}{4!}f(x)-\sum_{i=1}^n q_i(t)\left(\sigma_i(x)+\frac{\Delta_i(\lambda,x)}{\Delta_i(\lambda)}\right). \tag{24}$$

Выражение (13) запишем в следующем виде

$$B_i(x)=B_{1i}(x)+f^{(IV)}(x)B_{2i},$$

где $B_{1i}(x)=\int\limits_0^T b_i(s)h_{xxxx}(s,x)ds$,$B_{2i}=\int\limits_0^T \frac{s^4b_i(s)}{4!}ds$.

В этом случае, согласно свойству определителя имеем

$$\Delta_i(\lambda,x)=\Delta_{1i}(\lambda,x)+f^{(IV)}(x)\Delta_{2i}(\lambda),$$

где

$$\Delta_{1i}(\lambda,x)=\begin{vmatrix} 1-\lambda A_{11} & \dots & -\lambda A_{1(i-1)} & B_{11}(x) & -\lambda A_{1(i+1)} & \dots & -\lambda A_{1n}\\ -\lambda A_{21} & \dots & -\lambda A_{2(i-1)} & B_{12}(x) & -\lambda A_{2(i+1)} & \dots & -\lambda A_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ -\lambda A_{n1} & \dots & -\lambda A_{n(i-1)} & B_{1n}(x) & -\lambda A_{n(i+1)} & \dots & 1-\lambda A_{nn}\end{vmatrix},$$

$$\Delta_{2i}(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda A_{11} & \dots & -\lambda A_{1(i-1)} & B_{21} & -\lambda A_{1(i+1)} & \dots & -\lambda A_{1n}\\ -\lambda A_{21} & \dots & -\lambda A_{2(i-1)} & B_{22} & -\lambda A_{2(i+1)} & \dots & -\lambda A_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ -\lambda A_{n1} & \dots & -\lambda A_{n(i-1)} & B_{2n} & -\lambda A_{n(i+1)} & \dots & 1-\lambda A_{nn}\end{vmatrix}.$$

Тогда (24) приобретает вид

$$u(t,x)=h_0(t,x)+\frac{t^4}{4!}f(x)-f^{(IV)}(x)\sum_{i=1}^n q_i(t)\frac{\Delta_{2i}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \tag{25}$$

где

$$h_0(t,x)=h(t,x)-\sum_{i=1}^n q_i(t)\left(\sigma(x)+\frac{\Delta_{1i}(\lambda,x)}{\Delta(\lambda)}\right).$$

Таким образом, нами доказана, что справедлива

Лемма 1. Пусть:

1). Выполняются условия (14), (16) и (18);

2). $\max\{|\varphi_k(x)|\}<\infty, k=\overline{1,4}, x\in R$.

Тогда в области Ω существует единственное решение начальной задачи (1)–(6) при любой ограниченной функции $f(x)\in C^{(4)}(R)$ вместо со своей производной четвертого порядка. Это решение представимо в виде функции (25).

3. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ $f(x)$

Примем обозначение

$$g(x) = (h_0(t_0, x) - \psi(x)) \left(\sum_{i=1}^{n} q_i(t_0) \frac{\Delta_{2i}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \right)^{-1}.$$

Пусть

$$\omega = \frac{t_0^4}{4!} \left(\sum_{i=1}^{n} q_i(t_0) \frac{\Delta_{2i}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \right)^{-1} > 0. \tag{26}$$

Тогда используя условию (7), из (25) имеем дифференциальное уравнение:

$$f^{(IV)}(x) - \omega f(x) = g(x). \tag{27}$$

Решая уравнения (27) методом вариации произвольных постоянных, получаем

$$f(x) = E_1 e^{\mu x} + E_2 e^{-\mu x} + E_3 \cos \mu x + E_4 \sin \mu x +$$

$$+ \frac{1}{4\mu^3} \int\limits_0^x g(y) G(x, y) dy, \tag{28}$$

где $\mu = \sqrt[4]{\omega}$, коэффициенты $E_{ki}-$ подлежат определению, $k = \overline{1, 4}$,

$$G(x, y) = \left[e^{\mu(x-y)} - e^{-\mu(x-y)} - 2 \sin \mu(x - y) \right].$$

Используя условий в (8), из (28) имеем

$$f(x) = p(x) + \frac{1}{4\mu^3} \int\limits_0^x g(y) G(x, y) dy, \tag{29}$$

где

$$p(x) = \frac{\mu^3 M_1 + \mu^2 M_2 + \mu M_3 + M_4}{4\mu^3} e^{\mu x} + \frac{\mu^3 M_1 - \mu^2 M_2 + \mu M_3 - M_4}{4\mu^3} e^{-\mu x} +$$

$$+ \frac{\mu^2 M_1 - M_3}{4\mu^2} \cos \mu x + \frac{\mu^2 M_2 - M_3}{4\mu^3} \sin \mu x.$$

Таким образом, нами доказана, что справедлива
Лемма 2. Пусть:
1). Выполняются условия леммы 1 и (26);
2). $\int\limits_0^x |g(y)| \cdot |G(x, y)| \, dy < \infty, |p(x)| < \infty, x \in R$.
Тогда существует на числовой оси единственное решение дифференциального уравнения (27) при начальных условиях (8). Это решение представимо в виде функции (29).

4. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА (1)-(8)

Подставляя в (25) функцию (29), получаем искомую функцию $u(t, x)$. Из справедливости доказанных выше двух лемм следует, что справедлива

Теорема. Пусть выполняются все условия леммы 2. Тогда существует единственная пара решений $\{u(t,x) \in C^{4,4}(\Omega), f(x) \in C^4(R)\}$ задачи (1)-(8).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Баев А.Д. О единственности решения математической модели вынужденных колебаний струны с особенностями / А.Д. Баев, С.А. Шабров, Меач Мон // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2014. — № 1. — С. 50–55.

[2] Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными / И.Г. Петровский. — М., 1961. — 400 с.

[3] Турбин М.В. Исследование начально-краевой задачи для модели движения жидкости Гершель-Балкли / М.В. Турбин // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2013. — № 2. — С. 246–257.

[4] Ахтямов А.М. О решении задачи диагностирования дефектов в виде малой полости в стержне / А.М. Ахтямов, А.Р. Аюпова // Журнал Средневолжского математического общества. — 2010. — Т. 12, № 3. — С. 37–42.

[5] Сафина Г.Ф. Сохранение частот колебаний трубопровода при изменении параметров жидкости / Г.Ф. Сафина // Журнал Средневолжского математического общества. — 2011. — Т. 13, № 4. – С. 66–77.

[6] Шабров С.А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С.А. Шабров // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2013. — № 1. — С. 232–250.

[7] Алгазин С.Д. Флаттер пластин и оболочек / С.Д. Алгазин, И.А. Кийко. — М.: Наука, 2006. — 248 с.

[8] Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач / А.М. Денисов. — М.: МГУ, 1994. — 285 с.

[9] Денисов А.М. Обратная задача для уравнения диффузии в случае сферической симметрии / А.М. Денисов, С.И. Соловьева // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2013. — Т. 53, № 11. — С. 1784–1790.

[10] Лаврентьев М.М. Линейные операторы и некорректные задачи / М.М. Лаврентьев, Л.Я. Савельев. — М.: Наука, 1991. — 331 с.

[11] Попова В.А. Обратная задача для сингулярного эволюционного уравнения с нелокальным граничным условием / В.А. Попова, А.В. Глушак // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2012. — № 1. — С. 182–186.

[12] Романов В.Г. Обратные задачи для математической физики / В.Г. Романов. — М.: Наука, 1984. — 264 с.

[13] Сабитов К.Б. Обратная задача для уравнения эллиптико-гиперболического типа с нелокальным граничным условием / К.Б. Сабитов, Н.В. Мартемьянова // Сибирский математический журнал. — 2012. — Т. 53, № 3. — С. 633–647.

[14] Хенкин Г. Обратная задача Дирихле - Неймана для нодальных кривых / Хенкин, В. Мишель // Успехи математических наук. — 2012. — Т. 67, № 6. — С. 101–124.

[15] Юлдашев Т.К. Обратная задача для одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка / Т.К. Юлдашев // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. — 2013. — № 1. — С. 58–66.

[16] Юлдашев Т.К. Об обратной задаче для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений высшего порядка / Т.К. Юлдашев // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 153–163.

[17] Юлдашев Т.К. Обратная задача для нелинейного уравнения с псевдопараболическим оператором высокого порядка / Т.К. Юлдашев // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: физико-математические науки. — 2012. — Т. 28, № 3. —

С. 17–29.

[18] Юлдашев Т.К. Обратная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения с гиперболическим оператором высокой степени / Т.К. Юлдашев // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Физика. — 2013. — Т. 5, № 1. — С. 69–75.

[19] Юлдашев Т.К. Обратная задача для квазилинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка / Т.К. Юлдашев, А.И. Середкина // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: физико-математические науки. — 2013. — Т. 32, № 3. — С. 46–55.

[20] Юлдашев Т.К. Обратная задача для одного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных третьего порядка / Т.К. Юлдашев // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: физико-математические науки. — 2014. — Т. 34, № 1. — С. 56–65.

[21] Юлдашев Т.К. О разрешимости смешанной задачи для линейного параболо-гиперболического интегро-дифференциального уравнения Фредгольма / Т.К. Юлдашев // Журнал Средневолжского математического общества. — 2013. — Т. 15, № 3. — С. 158–163.

[22] О единственности классического решения математической модели вынужденных колебаний стержневой системы с особенностями / А.Д. Баев, С.А. Шабров, Ф.В. Голованёва, Меач Мон // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 74–80.

REFERENCES

[1] Baev A.D., Shabrov S.A., Meach M. Uniqueness of the solution mathematical model of forced string oscillation singularities. [Baev A.D., Shabrov S.A., Meach M. O edinstvennosti reshenija matematicheskoj modeli vynuzhdennyx kolebanij struny s osobennostjami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 1, pp. 50–55.

[2] Petrovskij I.G. Lectures about the partial equations. [Petrovskij I.G. Lektsii ob uravnenijax s chastnymi proizvodnymi]. Moscow, 1961, 400 p.

[3] Turbin M.V. Investigation of initial-boundary value problem for the Herschel-Bulkley mathematical fluid model. [Turbin M.V. Issledovanija nachal'no-krajevoj zadachi dlja modeli dvizhenija zhidkosti Gershel'-Balkli]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 2, pp. 246–257.

[4] Akhtyamov A.M., Aupova A.R. On solving the problem of diagnosing defects in a small cavity in the rod. [Akhtyamov A.M., Aupova A.R. O reshenii zadachi diagnostirovanija defektov v vide maloj polosti v sterzhne]. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva — Journal of Middle Volga Mathematical Society*, 2010, vol. 12, iss. 3, pp. 37–42.

[5] Safina G.F. Preservation of frequencies of fluctuations of the pipeline at change of parameters of liquid. [Safina G.F. Sokhraninije chastot kolebanij truboprovoda pri izmenenii parametrov zhidkosti]. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva — Journal of Middle Volga Mathematical Society*, 2011, vol. 13, iss. 4, pp. 66–77.

[6] Shabrov S.A. Mathematical model of small deformations of a bar system with internal features. [Shabrov S.A. Ob odnoj matematicheskoj modeli malyx deformatsij sterzhnevoj sistemy s vnutrennimi osobennostjami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 1, pp. 232–250.

[7] Algazin S.D., Kiyko I.A. Flutter of plates and shells. [Algazin S.D., Kijko I.A. Flatter plastin i obolochek]. Moscow: Nauka, 2006, 248 p.

[8] Denisov A.M. Introduction to the theory of inverse problem. [Denisov A.M. Vvedenie v

teoriyu obratnyx zadach]. Moscow: Lomonosov Moscow State University, 1994, 285 p.

[9] Denisov A.M., Solov'eva S.I. Inverse problem for the diffusion equation in the case of spherical symmetry. [Denisov A.M., Solov'eva S.I. Obratnaya zadacha dlya uravneniya diffuzii v sluchae sfericheskoj simmetrii]. *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki — Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2013, Vol. 53, no. 11, pp. 1784–1790.

[10] Lavrent'ev M.M., Savel'ev L.Ya. Linear operators and ill-posed problems. [Lavrent'ev M.M., Savel'ev L.Ya. Linejnye operatory i nekorrektnye zadachi]. Moscow: Nauka, 1991, 331 p.

[11] Popova V.A., Glushak A.V. Inverse problem for singular evolution equation with nonlocal boundary condition. [Popova V.A., Glushak A.V. Obratnaja zadacha dlja singuljarnogo evoljutsionnogo uravnenija s nelokal'nym granichnym uslovijem]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 1, pp. 182–186.

[12] Romanov V.G. Inverse Problems of Mathematical Physics. [Romanov V.G. Obratnyje zadachi dlja matematicheskoj fiziki]. Moscow: Nauka, 1984, 264 p.

[13] Sabitov K.B., Martem'yanova N.V. An inverse problem for an equation of elliptic-hyperbolic type with a nonlocal boundary conditions. [Sabitov K.V., Martem'yanova N.V. Obratnaya zadacha dlja uravnenija elliptiko-giperbolicheskogo tipa s nelocal'nym granichnym uslovijem]. *Sibirskij mathematicheskij zhurnal — Siberian Mathematical Journal*, 2012, vol. 53, iss. 3, pp. 507–519.

[14] Henkin G.M., Mishel V. Inverse Dirichlet-to-Neumann problem for nodal curves. [Henkin G.M., Mishel V. Obratnaja zadacha Dirikhle-Nejmana dlja nodal'nyx krivyx]. *Uspekhi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 2012, vol. 67, iss. 6, pp. 1069–1089.

[15] Yuldashev T.K. Inverse problem for a nonlinear integro-differential equation of the third order. [Yuldashev T.K. Obratnaya zadacha dlya odnogo nelineynogo integro-differentsial'nogo uravnenija tret'jego poryadka]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Estestvennonauchnaja — Vestnik of Samara state university. Seria: Natural Sciences*, 2013, iss. 1. pp. 58–66.

[16] Yuldashev T.K. An inverse problem for nonlinear integro-differential equations of higher order. [Yuldashev T.K. Ob obratnoj zadache dlja nelinejnyx integro-differentsial'nyx uravnenij vysshego porjadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, iss. 1, pp. 153–163.

[17] Yuldashev T.K. Inverse problem for a nonlinear equation with pseudoparabolic operator of higher order. [Yuldashev T.K. Obratnaja zadacha dlja nelinejnogo uravnenija s psevdoparabolicheskim operatorom vysokogo porjadka]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-Matematicheskije Nauki — Vestnik of Samara state technical university. Seria: Physical-Mathematical Sciences*, 2012, vol. 28, iss. 3, pp. 17–29.

[18] Yuldashev T.K. An inverse problem for a nonlinear integro-differential equations with hyperbolic operator of the higher degree. [Yuldashev T.K. Obratnaja zadacha dlja nelinejnogo integro-differentsial'nogo uravnenija s giperbolicheskim operatorom vysokoy stepeni]. *Vestnik Juzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Fizika — Vestnik of South Ural state university. Mathematics. Mechaics. Physics*, 2013, vol. 5, iss. 1, pp. 69–75.

[19] Yuldashev T.K., Seredkina A.I. Inverse problem for quasilinear partial integro-differential equations of higher order. [Yuldashev T.K., Seredkina A.I. Obratnaja zadacha dlja kvazilinejnyx integro-differentsial'nyx uravnenij v chastnyx proizvodnyx vysokogo porjadka]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-Matematicheskije Nauki — Vestnik of Samara state technical university. Seria: Physical-Mathematical Sciences*, 2013, vol. 32, iss. 3. pp. 46–55.

[20] Yuldashev T.K. Inverse problem for a Fredholm partial integro-differential equation of the

third order. [Yuldashev T.K. Obratnaja zadacha dlja odnogo integro-differentsial'nogo uravnenija Fredgol'ma v chastnyx proizvodnyx tret'ego porjadka]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-Matematicheskije Nauki — Vestnik of Samara state technical university. Seria: Physical-Mathematical Sciences*, 2014, vol. 34, iss. 1, pp. 56–65.

[21] Yuldashev T.K. On the solvability of a mixed problem for a linear Fredholm parabolic-hyperbolic integro-differential equation. [Yuldashev T.K. O razreshimosti smeshannoj zadachi dlja linejnogo parabolo-giperbolicheskogo integro-differentsial'nogo uravnenija Fredgol'ma]. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva — Journal of Middle Volga Mathematical Society*, 2013, vol. 15, iss. 3, pp. 158–163.

[22] Baev A.D., Shabrov S.A., Golovaneva F.V., Meach Mon About Unique Classical Solution Mathematical Model Of Forced Vibrations Rod System With Singularities. [Baev A.D., Shabrov S.A., Golovanyova F.V., Meach Mon O edinstvennosti klassicheskogo resheniya matematicheskoj modeli vynuzhdennyx kolebanij sterzhnevoj sistemy s osobennostyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 2, pp. 74–80.

Юлдашев Турсун Камалдинович, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики, Институт информатики и телекоммуникации, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, Красноярск, Российская Федерация
E-mail: tursunbay@rambler.ru
Тел.: 8–923–372–51–79

Yuldashev Tursun Kamaldinovich, Candidate of Physics and Mathematics, Docent, Associate professor of Higher Mathematics Department Institute of Informatics and Telecommunication, Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk, Russian Federation
E-mail: tursunbay@rambler.ru
Tel.: 8–923–372–51–79