УДК 517.926.4

ОБ ОЦЕНКАХ ФУНКЦИИ ВЛИЯНИЯ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА*

С. А. Шабров

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 29.12.2013 г.

Аннотация: в работе получены оценки функции влияния невырожденной граничной задачи, возникающей при моделировании малых деформаций стержневой системы, помещённой во внешнюю среду с локализованными особенностями, которые приводят к потере гладкости у решения. При анализе решений возникающей математический модели, которая реализуется в виде краевой задачи четвёртого порядка, мы используем поточечный подход, предложенный Ю.В. Покорным и показавший свою эффективность при изучении задач второго порядка. Полученные в работе оценки функции влияния позволяют изучить нелинейные граничные задачи с негладкими решениями.

Ключевые слова: функция влияния, граничная задача, математическая модель, производная по мере.

ABOUT THE ESTIMATES of THE FUNCTION INFLUENCE OF A MATHEMATICAL MODEL FOURTH ORDER

S. A. Shabrov

Abstract: we obtain estimates of the influence function degenerate boundary value problem arising in modeling small deformations of the rod system, placed in an external environment with localized features that lead to loss of smoothness of the solution. In the analysis of solutions to emerging mathematical model, which is implemented in the form of a fourth-order boundary value problem, we use the pointwise approach proposed by Yu. V. Pokornyi and has shown its effectiveness in the study of the second order equations. Obtained in the evaluation of the influence functions allow us to study the nonlinear boundary value problems with non-smooth solutions.

Keywords: influence function, boundary value problem, mathematical model, derivative on the measure.

Интенсивное изучение краевых задач с производными по мере началось после выхода работы Ю. В. Покорного [1]. Так удалось построить точную параллель классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка вплоть до осцилляционных теорем [2]–[7]. Более того, начато изучение нелинейных краевых задач с производными Радона–Никодима [8], [9], задач с разрывными решениями [10], [11], [12], граничных задач четвертого порядка [13], [14], и математических моделей, описывающих малые свободные и вынужденные колебания струнных и стержневых систем [15], [16].

Такой прорыв объясняется тем, что возникающие дифференциальные уравнения являются поточечно заданными, т.е. обыкновенными. В отличие от теории обобщенных функций, где приходится преодолевать ряд трудностей (например, умножение разрывной функции на обобщенную), и, к сожалению, получить лишь слабую разрешимость.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14–01–00867)

Интересные результаты получены в работах [17]–[22].

В работе получены оценки функции влияния математической модели

$$\begin{cases} Lu \equiv \left(pu''_{x\mu}\right)''_{x\sigma} - \left(ru'_x\right)'_\sigma + uQ'_\sigma = F'_\sigma, \\ u(0) = u'(0) = 0, \\ u(\ell) = u'(\ell) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

которая возникает при описании малых деформаций стержневой системы, имеющей не только внутренние особенности, приводящие к потери гладкости у решения, но и помещена во внешнюю среду локализованными особенностями.

Граничную задачу (1) назовем *невырожденной*, если однородная задача имеет только тривиальное решение.

Достаточные условия невырожденности (1), и доказательства существования функции влияния можно найти в [14].

Решение модели (1) мы ищем в классе E абсолютно непрерывных на $[0;\ell]$ функций, производная которых μ-абсолютно непрерывна; квазипроизводная $pu''_{x\mu}(x)$ — абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$; $(pu''_{x\mu})'_x$ — σ-абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$.

В дальнейшем нам понадобится следующее множество $\overline{[0;\ell]}_\sigma$ на котором задано уравнение, и в силу непрерывности решения можно считать заданным и на $[0;\ell]$, и на $\overline{[0;\ell]}_\sigma$. Строится $\overline{[0;\ell]}_\sigma$ следующим образом. Если $\sigma(x)$ — строго возрастающая функция, порождающая на $[0;\ell]$ меру, то $([0;\ell];\rho)$, где $\rho(x;y) = |\sigma(x) - \sigma(y)|$ — метрика на $[0;\ell]$, не является полным метрическим пространством в случае, когда множество $S(\sigma)$ точек разрыва функции $\sigma(x)$ непусто. Стандартное пополнение $([0;\ell],\rho)$ при котором каждая точка $\xi \in S(\sigma)$ заменяется на тройку собственных элементов $\{\xi - 0; \xi, \xi + 0\}$ и дает нам $\overline{[0;\ell]}_\sigma$.

На коэффициенты математической модели (1) мы накладываем следующие условие: 1) $p(x)$ определена на $\overline{[0;\ell]}_\mu$ (строится аналогично $\overline{[0;\ell]}_\sigma$ с заменой σ на μ), положительна на $\overline{[0;\ell]}_\mu$, и $\min\limits_{\overline{[0;\ell]}_\mu \setminus S(\mu)} p(x) > 0$; 2) $r(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ определены на $\overline{[0;\ell]}_\sigma \setminus S(\sigma)$, $r(x) \geqslant 0$ и $Q(x)$ не убывает.

Будем говорить, что однородное уравнение $Lu = 0$ не осциллирует на $\overline{[0;\ell]}_\sigma$, решение имеет на $[0;\ell]$ не более трех нулей с учетом кратности.

Последнее понимается следующим образом. Точку x_0 назовем нулем решения $u(x)$ уравнения $Lu = 0$, кратности 1 (или простым нулём), если $u(x_0) = 0$ и $u'_x(x_0 - 0) \cdot u'_x(x_0 + 0) > 0$; кратности 2, если $u(x_0) = 0$, $u'_x(x_0 - 0) \cdot u'_x(x_0 + 0) \leqslant 0$ и $\left(pu''_{x\mu}\right)(x_0) \neq 0$; кратности 3, если $u(x_0) = 0$, $u'_x(x_0 - 0) = u'_x(x_0 + 0) = 0$, $\left(pu''_{x\mu}\right)(x_0) = 0$ и $\left(pu''_{x\mu}\right)'_x(x_0 - 0) \times \left(pu''_{x\mu}\right)'_x(x_0 + 0) > 0$.

Если x_0 не принадлежит множеству $S(\sigma)$, т. е. является точкой непрерывности самого решения и всех ее производных до третьего порядка включительно, то введенное определение совпадает с классическим. Если x_0 принадлежит разности множеств $S(\sigma)$ и $S(\mu)$ ($x_0 \in S(\sigma) \setminus S(\mu)$), то определение нуля кратности 1 и 2 снова совпадает с классическим.

Заметим, что нули кратности больше, чем 3 могут быть только у тривиального решения.

Теорема 1. *Пусть* (1) *обладает свойством невырожденности и* $G(x,s)$ *— ее функция влияния; однородное уравнение*

$$(pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = 0 \tag{2}$$

не осциллирует на $\overline{[0;\ell]}_\sigma$*;* $G^*(x,s)$ *— функция влияния модели* $(pu''_{x\mu})''_{x\sigma} = F'_\sigma$*,* $u(0) = u'_x(0) = 0$*,* $u(\ell) = u'_x(\ell) = 0$*. Тогда*

$$m \cdot G^*(x,s) \leqslant G(x,s) \leqslant M \cdot G^*(x,s), \tag{3}$$

где m, M *— конечные положительные константы, для всех* x *и* s*, принадлежащих* $[0,\ell]$*.*

Доказательство. Пусть $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)$ и $\varphi_4(x)$ — решения уравнения (2), удовлетворяющих начальным условиям $u(0) = u'_x(0) = 0$, $pu''_{x\mu}(0) = (pu''_{x\mu})'_x(0) = 1$, $u(0) = u'_x(0) = 0$, $(pu''_{x\mu})(0) = -1$, $(pu''_{x\mu})'_x(0) = 0$, $u(\ell) = u'_x(\ell) = 0$, $(pu''_{x\mu})(\ell) = (pu''_{x\mu})'_x(\ell) = 1$ и $u(\ell) = u'_x(\ell) = 0$, $(pu''_{x\mu})(\ell) = -1$, $(pu''_{x\mu})'_x(\ell) = 0$ соответственно. Функция влияния (1), как следует из [14], имеет вид

$$G(x,s) = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} K(x,s) & \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) & \varphi_4(x) \\ 0 & 0 & 0 & \varphi_3(\ell) & \varphi_4(\ell) \\ 0 & 0 & 0 & \varphi'_3(\ell) & \varphi'_4(\ell) \\ K(\ell,s) & \varphi_1(\ell) & \varphi_2(\ell) & 0 & 0 \\ K'_x(\ell,s) & \varphi'_1(\ell) & \varphi'_2(\ell) & 0 & 0 \end{vmatrix}, \tag{4}$$

где

$$K(x,s) = \frac{1}{pW(s)}\begin{cases} \begin{vmatrix} \varphi_1(s) & \varphi_2(s) & \varphi_3(s) & \varphi_4(s) \\ {\varphi_1}'_x(s) & {\varphi_2}'_x(s) & {\varphi_3}'_x(s) & {\varphi_4}'_x(s) \\ p{\varphi_1}''_{x\mu}(s) & p{\varphi_2}''_{x\mu}(s) & p{\varphi_3}''_{x\mu}(s) & p{\varphi_4}''_{x\mu}(s) \\ \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) & \varphi_4(x) \end{vmatrix} & s \leqslant x, \\ 0 & x < s, \end{cases} \tag{5}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_1(\ell) & \varphi_2(\ell) \\ \varphi'_2(\ell) & \varphi'_2(\ell) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varphi_3(\ell) & \varphi_4(\ell) \\ \varphi'_3(\ell) & \varphi'_4(\ell) \end{vmatrix}.$$

Раскроем определитель в (4) по первой строке и, используя свойства $\varphi_i(x)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, $K(x,s)$ (раскрыв при этом определитель в определении по последней строке), будем иметь

$$G(x,s) = \frac{1}{(pW)(s)}\begin{cases} \varphi_1(x)\alpha_1(s) + \varphi_2(x)\alpha_2(s) & x \leqslant s, \\ \varphi_3(x)\alpha_3(s) + \varphi_4(s)\alpha_4(s) & x < s, \end{cases}$$

где $\alpha_i(s)$ – алгебраическое дополнение к элементу $\varphi_i(s)$, стоящему на пересечении последней строки и i-го столбца определителя (5).

Функция влияния дифференциальной модели $(pu''_{x\mu})''_{x\sigma} = F'_\sigma$, $u(0) = u'_x(0) = 0$, $u(\ell) = u'_x(\ell) = 0$ имеет вид

$$G^*(s,x) = \frac{1}{W^*(s)}\begin{cases} \varphi^*_1(x)\alpha^*_1(s) + \varphi^*_2(x)\alpha^*_2(s) & x \leqslant s, \\ \varphi^*_3(x)\alpha^*_3(s) + \varphi^*_4(s)\alpha^*_4(s) & x < s, \end{cases}$$

где функции $\{\varphi^*_i(x)\}$ – определяются также, как и $\{\varphi_i(x)\}$, – решения однородного уравнения $(pu''_{x\mu})''_{x\sigma} = 0$, удовлетворяющие соответствующим условиям; $\alpha^*(s)$ – алгебраические дополнения к элементу $\{\varphi^*_i(x)\}$ определителя

$$\begin{vmatrix} \varphi^*_1(s) & \varphi^*_2(s) & \varphi^*_3(s) & \varphi^*_4(s) \\ \varphi^{*\prime}_{1x}(s) & \varphi^{*\prime}_{2x}(s) & \varphi^{*\prime}_{3x}(s) & \varphi^{*\prime}_{4x}(s) \\ \varphi^{*\prime\prime}_{1x\mu}(s) & \varphi^{*\prime\prime}_{2x\mu}(s) & \varphi^{*\prime\prime}_{3x\mu}(s) & \varphi^{*\prime\prime}_{4x\mu}(s) \\ \varphi^*_1(x) & \varphi^*_2(x) & \varphi^*_3(x) & \varphi^*_4(x) \end{vmatrix};$$

$W^*_i(s)$ – определитель Вронского системы $\{\varphi^*_i\}_{i=1}^{i=4}$.)

Если $x \cdot s \cdot (\ell - x) \cdot (\ell - s) = 0$, то (3) справедливо при любых m и M.

Пусть $x \cdot s \cdot (\ell - x) \cdot (\ell - s) \neq 0$. Рассмотрим отношение

$$\frac{G(x,s)}{G^*(x,s)} = \frac{pW^*(s)}{pW(s)}\begin{cases} \dfrac{\varphi_1(x)\alpha_1(s) + \varphi_2(x)\alpha_2(s)}{\varphi^*_1(x)\alpha^*_1(s) + \varphi^*_2(x)\alpha^*_2(s)} & \text{если } x \leqslant s, \\ \dfrac{\varphi_3(x)\alpha_3(s) + \varphi_4(x)\alpha_4(s)}{\varphi^*_3(x)\alpha^*_3(s) + \varphi^*_4(x)\alpha^*_4(s)} & \text{если } s < x, \end{cases}$$

Так как $G(x,s)>0$ и $G^*(x,s)>0$ для всех x и s, принадлежащих интервалу $(0,\ell)$, то предел $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ s\to s_0}}\dfrac{G(x,s)}{G^*(x,s)}$ существует, конечен и положителен для всякой (x_0,s_0), где $x_0\cdot s_0>0$ и $(x_0-\ell)\cdot(s_0-\ell)>0$. Поэтому, если особенность возникает, то в одном из следующих случаев: 1) $x=0$; 2) $x=\ell$; 3) $s=0$; 4) $s=\ell$; 5) $x=0,s=0$; 6) $x=0,s=\ell$; 7) $x=\ell,s=0$; 8) $x=\ell,s=\ell$. В силу симметрии $G(x,s)$ достаточно рассмотреть первый, второй, пятый, шестой и восьмой случаи.

Дальнейшие рассуждения опираются на следующую лемму.

Лемма 1 (Аналог правила Лопиталя)**.** *Пусть $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ принадлежат E — пространству решений уравнения $Lu=F'_\sigma$. Тогда*

1) *если $\varphi_i(x_0)=0$ $(i=1,2)$, ${\varphi_2}'_x(x_0+0)\neq 0$, то* $\lim\limits_{x\to x_0+0}\dfrac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}=\dfrac{{\varphi_1}'_x(x_0+0)}{{\varphi_2}'_x(x_0+0)}$;

2) *если $\varphi_i(x_0)={\varphi_i}'_x(x_0+0)=0$ $(i=1,2)$, ${\varphi_2}''_{x\mu}(x_0+0)\neq 0$, то* $\lim\limits_{x\to x_0+0}\dfrac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}=\dfrac{{\varphi_1}''_{x\mu}(x_0+0)}{{\varphi_2}''_{x\mu}(x_0+0)}$;

3) *если $\varphi_i(x_0)={\varphi_i}'_x(x_0+0)={\varphi_i}''_{x\mu}(x_0+0)=0$ $(i=1,2)$, $({\varphi_2}''_{x\mu})'_x(x_0+0)\neq 0$, то* $\lim\limits_{x\to x_0+0}\dfrac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}=\dfrac{({\varphi_1}''_{x\mu})'_x(x_0+0)}{({\varphi_2}''_{x\mu})'_x(x_0+0)}$.

Доказательство. В первом случае имеем

$$\lim_{x\to x_0+0}\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}=\lim_{x\to x_0+0}\frac{\dfrac{\varphi_1(x)-\varphi_1(x_0)}{x-x_0}}{\dfrac{\varphi_2(x)-\varphi_2(x_0)}{x-x_0}}=\frac{{\varphi_1}'_x(x_0+0)}{{\varphi_2}'_x(x_0+0)}.$$

Второй случай. Из равенств $(i=1,2)$

$$\varphi_i(x)=\int\limits_{x_0+0}^{x}\int\limits_{x_0+0}^{s}({\varphi_i}''_{x\mu}(\tau)-{\varphi_i}''_{x\mu}(x_0+0))\,d\mu(\tau)\,ds+{\varphi_i}''_{x\mu}(x_0+0)\int\limits_{x_0+0}^{x}(\mu(s)-\mu(x_0+0))ds,$$

следует

$$\lim_{x\to x_0+0}\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}=\lim_{x\to x_0+0}\left[\left({\varphi_1}''_{x\mu}(x_0+0)+\int\limits_{x_0+0}^{x}\left(\int\limits_{x_0+0}^{s}({\varphi_1}''_{x\mu}(\tau)-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.-\,{\varphi_1}''_{x\mu}(x_0+0))\,d\mu(\tau)\right)\,ds\left(\int\limits_{x_0+0}^{x}(\mu(s)-\mu(x_0+0))\,ds\right)^{-1}\right)\Bigg/$$

$$\Bigg/\left({\varphi}''_{2x\mu}(x_0+0)+\int\limits_{x_0+0}^{x}\left(\int\limits_{x_0+0}^{s}({\varphi_2}''_{x\mu}(\tau)-{\varphi_2}''_{x\mu}(x_0+0))\right)\,d\mu(\tau))\,ds\times\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\int\limits_{x_0+0}^{x}(\mu(s)-\mu(x_0+0))ds\right)^{-1}\right)\right]=\frac{{\varphi_1}''_{x\mu}(x_0+0)}{{\varphi_2}''_{x\mu}(x_0+0)},$$

так как ${\varphi_2}''_{x\mu}(x_0+0)\neq 0$ и

$$\left|\int\limits_{x_0+0}^{x}\left(\int\limits_{x_0+0}^{s}({\varphi_i}''_{x\mu}(\tau)-{\varphi_i}''_{x\mu}(x_0+0))d\mu(\tau)\right)\,ds\left(\int\limits_{x_0+0}^{x}(\mu(s)-\mu(x_0+0))ds\right)^{-1}\right|\leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x_0<\tau<x} |\varphi_{i x\mu}''(\tau) - \varphi_{i x\mu}''(x_0+0)| \to 0$$

при $x \to x_0+0$.

Для доказательства третьего пункта достаточно заметить, что

$$\varphi_i(x) = \int\limits_{x_0+0}^{x}\int\limits_{x_0+0}^{s}\int\limits_{x_0+0}^{\tau} ((p\varphi_{i x\mu}'')_x'(t) - (p\varphi_{i x\mu}'')_x'(x_0+0))\,dt\frac{d\mu(\tau)}{p(\tau)}\,ds+$$

$$+ (p\varphi_{i x\mu}'')_x'(x_0+0)\int\limits_{x_0+0}^{x}\int\limits_{x_0+0}^{s}\frac{\tau - x_0}{p(\tau)}\,d\mu(\tau)\,ds$$

и повторить рассуждения проведенные во втором пункте. Лемма доказана. □

Замечание 1. *Справедливо аналогичное утверждение и для левых производных.*

Замечание 2. *Во втором случае можно утверждать, что*

$$\lim_{x\to x_0+0}\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = \frac{(p\varphi_{1 x\mu}'')(x_0)}{(p\varphi_{2 x\mu}'')(x_0)} = \frac{\varphi_{1 x\mu}''(x_0-0)}{\varphi_{2 x\mu}''(x_0-0)}.$$

Из леммы следует, что

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ s\to s_0}}\frac{G(x,s)}{G^*(x,s)} = \frac{pW^*(s_0)}{pW(s_0)}\cdot\frac{p\varphi_{1 x\mu}''(0)\alpha_1(s_0) + p\varphi_{2 x\mu}''(0)\alpha_2(s_0)}{p\varphi_{1 x\mu}^{*\prime\prime}(0)\alpha_1^*(s_0) + p\varphi_{2 x\mu}^{*\prime\prime}(0)\alpha_2^*(s_0)}$$

при условии, что $p\varphi_{1 x\mu}^{*\prime\prime}(0)\alpha_1^*(s_0) + p\varphi_{2 x\mu}^{*\prime\prime}(0)\alpha_2^*(s_0) \neq 0$.

Последнее неравенство заведомо выполняется, если $s_0\cdot(\ell - s_0) \neq 0$. Если же $s_0 = \ell$ или $s_0 = 0$, то предел отношения $\dfrac{G(x,s)}{G^*(x,s)}$ равен, как нетрудно видеть, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ s\to s_0}}\dfrac{G(x,s)}{G^*(x,s)} = \dfrac{p\varphi_{1 x\mu}''(0)\alpha_{1 x\mu}''(s_0) + p\varphi_{2 x\mu}''(0)\alpha_{2 x\mu}''(s_0)}{p\varphi_{1 x\mu}^{*\prime\prime}(0)\alpha_{1 x\mu}^{*\prime\prime}(s_0) + p\varphi_{2 x\mu}^{*\prime\prime}(0)\alpha_{2 x\mu}^{*\prime\prime}(s_0)}$, причем знаменатель дроби, стоящей в правой части последнего равенства отличен от нуля.

Остальные случаи рассматриваются аналогично. □

Лемма 2. *Пусть $g(x,s)$ — функция влияния математической модели*

$$\begin{cases} (u_{x\mu}'')_{x\sigma}'' = F_\sigma', \\ u(0) = u_x'(0) = 0, \\ u(\ell) = u_x'(\ell) = 0; \end{cases} \tag{6}$$

$u_0(x) = \int\limits_0^x (x-\tau)\,d\mu(\tau)\cdot\int\limits_x^\ell(\tau - x)\,d\mu(\tau)$. *Тогда существуют σ-суммируемые, ограниченные и положительные на $\overline{[0;\ell]}_\sigma$ функции $v_1(s)$ и $v_2(s)$ такие, что*

$$u_0(x)v_1(s) \leqslant g(x,s) \leqslant u_0(x)v_2(s) \tag{7}$$

для всех $x, s \in [0;\ell]\times\overline{[0;\ell]}_\sigma$.

Доказательство. Как нетрудно видеть, $g(x,s)$ имеет вид

$$g(x,s)=\frac{1}{a}\left\{\begin{array}{l}\varphi_1(x)\psi_1(s)+\varphi_2(x)\psi_2(s), 0\leqslant x\leqslant s\leqslant \ell,\\ \varphi_1(s)\psi_1(x)+\varphi_2(s)\psi_2(x), 0\leqslant s\leqslant x\leqslant \ell,\end{array}\right.$$

где $\varphi_1(x)=\int\limits_0^x (x-\tau)\,d\mu(\tau)$, $\varphi_2(x)=\int\limits_0^x (x-\tau)\tau\,d\mu(\tau)$, $\psi_1(x)=\begin{vmatrix} x & \varphi_1(x) & \varphi_2(x)\\ \ell & \varphi_1(\ell) & \varphi_2(\ell)\\ 1 & {\varphi_1}'_x(\ell) & {\varphi_2}'_x(\ell)\end{vmatrix}$, $\psi_2(x)=-\begin{vmatrix} 1 & \varphi_1(x) & \varphi_2(x)\\ 1 & \varphi_1(\ell) & \varphi_2(\ell)\\ 0 & {\varphi_1}'_x(\ell) & {\varphi_2}'_x(\ell)\end{vmatrix}$ и $a=\varphi_1(\ell){\varphi_2}'_x(\ell)-{\varphi_1}'_x(\ell)\varphi_2(\ell)=\int\limits_0^\ell \tau^2\,d\mu(\tau)\int\limits_0^\ell d\mu(\tau)-\left(\int\limits_0^\ell \tau\,d\mu(\tau)\right)^2$.

Отметим очевидные свойства функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ и числа a:

1) $\varphi_i(0)={\varphi_i}'_x(0)=\psi_i(\ell)={\psi_i}'_x(\ell)=0$ $(i=1,2)$;

2) ${\varphi_1}''_{x\mu}(0)\cdot{\psi_1}''_{x\mu}(\ell)\neq 0$ $(i=1,2)$;

3) $a>0$.

Так как предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x,s)}{u_0(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi_1(x)\psi_1(s)+\varphi_2(x)\psi_2(s)}{a\varphi_1(x)\varphi_3(x)}=\dfrac{\varphi_1(s)}{a\varphi_3(0)}>0$, где $\varphi_3(x)=\int\limits_x^\ell(\tau-x)\,d\mu(\tau)$, то существует односторонняя окрестность $[0;\varepsilon_1)$ точки $x=0$ такая, что $u_0(x)\dfrac{\psi_1(s)}{2a\varphi_3(0)}\leqslant g(x,s)\leqslant u_0(x)\dfrac{3\psi_1(s)}{2a\varphi_3(0)}$ для всех $x\in[0;\varepsilon_1)$ и всех $s\in(0;\ell)$. Аналогично,

$$\lim_{x\to\ell}\frac{g(x,s)}{u_0(x)}=\lim_{x\to\ell}\frac{\varphi_1(s)\psi_1(x)+\varphi_2(s)\psi_2(x)}{a\varphi_1(x)\varphi_3(x)}=\frac{1}{a\varphi_1(\ell)}(\varphi_1(s)\varphi_2(\ell)+\varphi_2(s)\varphi_1(\ell))>0.$$

Поэтому существует такая окрестность $(\ell-\varepsilon_2,\ell]$ точки $x=\ell$, что для всех $x\in(\ell-\varepsilon_2,\ell]$ и $s\in(0,\ell)$ справедливо неравенство

$$u_0(x)\frac{\varphi_1(s)\varphi_2(\ell)+\varphi_2(s)\varphi_1(\ell)}{2a\varphi_1(\ell)}\leqslant g(x,s)\leqslant u_0(x)\frac{3(\varphi_1(s)\varphi_2(\ell)+\varphi_2(s)\varphi_1(\ell))}{2a\varphi_1(\ell)}.$$

В тоже время отношение $\dfrac{g(x,s)}{u_0(x)}$ на отрезке $[\varepsilon_1,\ell-\varepsilon_2]$ ограничено сверху и снизу положительными константами. Если обозначить их через α и β соответственно, и положить $v_1(s)=\min\left\{\dfrac{\psi_1(s)}{2a\varphi_3(0)};\dfrac{\varphi_1(s)\varphi_2(\ell)+\varphi_2(s)\varphi_1(\ell)}{2a\varphi_1(\ell)};\beta\right\}$ и $v_2(s)=\max\left\{\dfrac{3\psi_1(s)}{2a\varphi_3(0)};\dfrac{3(\varphi_1(s)\varphi_2(\ell)+\varphi_2(s)\varphi_1(\ell))}{2a\varphi_1(\ell)};\alpha\right\}$, то мы придем к (7). Лемма доказана. □

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1; уравнение $Lu=0$ не осциллирует на $[0;\ell]_\sigma$. Тогда существуют положительные константы m_1 и m_2, не зависящие от x и s, такие, что для всех x и s, принадлежащих отрезку $[0,\ell]$, справедливо*

$$m_1 g(x,s)\leqslant G(x,s)\leqslant m_2 g(x,s), \tag{8}$$

где $G(x,s)$ и $g(x,s)$ — функции влияния моделей

$$\left\{\begin{array}{l}(pu''_{x\mu})''_{x\sigma}-(ru'_x)'_\sigma+uQ'_\sigma=F'_\sigma,\\ u(0)=pu''_{x\mu}(0)-\gamma_1u'_x(0)=0,\\ u(\ell)=pu''_{x\mu}(\ell)+\gamma_2u'_x(\ell)=0,\end{array}\right. \quad \text{и} \quad \left\{\begin{array}{l}u''''_{x\mu x\sigma}=F'_\sigma,\\ u(0)=u'_x(0)=0,\\ u(\ell)=u'_x(\ell)=0.\end{array}\right.$$

соответственно.

Утверждение теоремы очевидным образом вытекает из положительности функций $G(x,s)$ и $g(x,s)$ внутри квадрата $[0;\ell]\times[0;\ell]$, симметричности $G(x,s)$ и $g(x,s)$, положительности производных $G''_{x\mu}(0,s)$ и $g''_{x\mu}(0,x)$, и отрицательности $G''_{x\mu}(\ell,s)$ и $g''_{x\mu}(\ell,s)$.

Из доказанной леммы и неравенства (8) вытекает

Теорема 3. *Пусть однородное уравнение $Lu=0$ не осциллирует на $\overline{[0;\ell]}_\sigma$; $G(x;s)$ — функция влияния модели (1); $u_0(x)=\int\limits_0^x(x-\tau)\,d\mu(\tau)\times\int\limits_x^\ell(\tau-x)\,d\mu(\tau)$. Тогда существуют σ-суммируемые, положительные функции $v_1(s)$ и $v_2(s)$ такие, что*

$$u_0(x)v_1(s)\leqslant G(x,s)\leqslant u_0(x)v_2(s) \tag{9}$$

для всех x и s, принадлежащих $[0;\ell]$.

Лемма 3. *Пусть $g(x,s)$ — функция влияния (6). Тогда существует такая положительная константа C, что для всех x, s и τ, принадлежащих $[0;\ell]$, справедливо неравенство*

$$g(x,s)\geqslant C\varphi_1(x)\varphi_3(x)g(\tau,s), \tag{10}$$

где $\varphi_1(x)=\int\limits_0^x(x-\tau)\,d\mu(\tau)$ и $\varphi_3(x)=\int\limits_x^\ell(\tau-x)\,d\mu(\tau)$.

Доказательство. Неравенство (10) выполняется для любого C, если хотя бы одна из точек x, s и τ совпадает с 0 или ℓ. Пусть все точки x, s и τ являются внутренними отрезка $[0;\ell]$.

Предположим противное: для всякого $C=\dfrac{1}{n}$ существует тройка (x_n,s_n,τ_n) внутренних точек $[0;\ell]$ такая, что

$$g(x_n;s_n)\leqslant\frac{1}{n}\varphi_1(x_n)\varphi_3(x_n)g(\tau_n;s_n). \tag{11}$$

Без ограничения общности, мы можем считать, что последовательности $\{x_n\}$, $\{s_n\}$ и $\{\tau_n\}$ сходятся; обозначим их пределы соответственно через x_0, s_0 и τ_0.

Переходя в (11) к пределу при $n\to\infty$ (в силу непрерывности $g(x,s)$, $\varphi_1(x)$ и $\varphi_3(x)$), мы делаем вывод, что (x_0,s_0) не может являться внутренней точкой квадрата $[0;\ell]\times[0;\ell]$, другими словами, x_0 и/или s_0 совпадает или с 0 или с ℓ.

Рассмотрим случай $x_0=0$. Предположим, что $s_0\in(0;\ell)$. Тогда (11) принимает вид (так как $x_n<s_n$ начиная с некоторого n)

$$0\leqslant\frac{\psi_1(s_n)}{a}+\frac{\varphi_2(x_n)}{\varphi_1(x_n)}\cdot\frac{\psi_2(s_n)}{a}\leqslant\frac{1}{n}\varphi_3(x_n)g(\tau_n,s_n). \tag{12}$$

Отсюда, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\varphi_2(x_n)}{\varphi_1(x_n)}=0$ (это следует из леммы об аналоге правила Лопиталя), вытекает равенство $\psi_1(s_0)=0$, которое означает, что наше предположение $s_0\in(0;\ell)$ неверно, т.е. $s_0=0$ или $s_0=\ell$.

Если $s_0=0$, то для бесконечного числа индексов справедливо одно из неравенств (или оба) $x_n\leqslant s_n$ или $s_n<x_n$.

Переходя к подпоследовательностям, в первом случае ($x_n\leqslant s_n$), неравенство (12) перепишем в виде

$$\frac{\psi_1(s_{n_m})-\psi_1(0)}{a\cdot s_{n_m}}+\frac{1}{a}\cdot\frac{\varphi_2(x_{n_m})\cdot\psi_2(s_{n_m})}{\varphi_1(x_{n_m})s_{n_m}}\leqslant\frac{1}{n}\varphi_3(x_{n_m})\frac{g(\tau_{n_m},s_{n_m})-g(\tau_{n_m},0)}{s_{n_m}} \tag{13}$$

Так как оба слагаемые в первой части последнего неравенства положительны, то в случае существования предела каждого слагаемого, они непременно неотрицательны. С другой стороны, предел правой части (13) равен $\varphi_3(0)G'_s(\tau_0,0)=0$. Поэтому

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\psi_1(s_{n_m})-\psi_1(0)}{a\cdot s_{n_m}}=0 \quad \text{и} \quad \lim_{m\to\infty}\frac{\varphi_2(x_{n_m})\psi_2(s_{n_m})}{a\cdot\varphi_1(x_{n_m})s_{n_m}}=0.$$

Но первый предел равен $\dfrac{1}{a}\cdot\psi'_1(+0)>0$. Таким образом в этом случае мы приходим к противоречию.

В случае $s_n<x_n$ неравенство (11) принимает вид

$$\frac{1}{a}(\varphi_1(s_{n_m})\psi_1(x_{n_m})+\varphi_2(s_{n_m})\psi_2(x_{n_m}))\leqslant\frac{1}{n_m}\varphi_1(x_{n_m})\varphi_3(x_{n_m})g(\tau_{n_m},s_{n_m}),$$

или

$$\frac{\psi_1(x_{n_m})}{a\cdot x_{n_m}}+\frac{1}{a}\cdot\frac{\varphi_2(s_{n_m})\psi_2(x_{n_m})}{x_{n_m}\varphi_1(s_{n_m})}\leqslant\frac{1}{n_m}\frac{\varphi_1(x_{n_m})}{x_{n_m}}\varphi_3(x_{n_m})\frac{g(\tau_{n_m},s_{n_m})}{\varphi_1(s_{n_m})}.$$

Предел первого слагаемого в левой части последнего равенства равен $\dfrac{1}{a}\times\psi'_1(+0)=1$. Предел второго слагаемого, если он существует, то он неотрицателен и конечен (ограничен единицей). В самом деле, из неравенства $\dfrac{\varphi_2(s_{n_m})}{x_{n_m}\varphi_1(s_{n_m})}\leqslant\dfrac{\varphi_2(s_{n_m})}{s_{n_m}\varphi_1(s_{n_m})}\leqslant 1$ (последнее следует из определения $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$) и существования предела $\psi_2(x_{n_m})$ при $m\to\infty$. Правая часть в пределе дает нуль: $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{\varphi_1(x_{n_m})}{x_{n_m}}=\varphi'_1(0)=0$, $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{g(\tau_{n_m},s_{n_m})}{\varphi_1(s_{n_m})}=g''_{s\mu(s)}(\tau_0;0)$. И мы снова приходим к противоречию: $0=\psi_1(0)=\Delta>0$.

Аналогично рассматривается случаи. Лемма доказана. $\square$

Из доказанной леммы вытекает существование функции $u_0(x)=C\varphi_1(x)\varphi_3(x)$ такой, что неравенство

$$G(x,s)\geqslant u_0(x)G(\tau,s)$$

справедливо для всех x,s и τ, принадлежащих $[0;\ell]$.

Из леммы 3 и равенства (8) вытекает

Теорема 4. *Пусть однородное уравнение $Lu=0$ не осциллирует на $\overline{[0;\ell]}_\sigma$; $G(x,s)$ — функция влияния математической модели* (1)*. Тогда существует положительная константа C такая, что неравенство*

$$G(x,s)\geqslant C\varphi_1(x)\varphi_3(x)G(\tau,s) \tag{14}$$

справедливо для всех $x,s,\tau\in[0;\ell]$.

Вводя обозначение $u_0(x)=C\varphi_1(x)\varphi_3(x)$ неравенство (14) можно записать в виде $G(x,s)\geqslant u_0(x)G(\tau,s)$, которое показывает, что интегральный оператор $(GF)(x)=\int\limits_0^\ell G(x,s)F'_\sigma(s)\,d\sigma(s)$, действующий из пространства $AB_\sigma[0;\ell]$ — σ-абсолютно непрерывных на $\overline{[0;\ell]}_S$ функций в $C[0;\ell]$, конус K_{AB_σ} — неотрицательных на $[0;\ell]$ функций преобразует в конус

$$K(u_0)=\{u(x)\in C[0;\ell]|u(x)\geqslant u_0(x)\cdot\|u\|_C, 0\leqslant x\leqslant\ell\},$$

где $\|u\|=\max\limits_{x\in[0;\ell]}|u(x)|$ — норма в $C[0;\ell]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Покорный Ю.В. Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю.В. Покорный // Доклады РАН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С. 167–169.

[2] Покорный Ю.В. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач / Ю.В. Покорный, М.Б. Зверева, С.А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, № 1. — С. 111–154.

[3] Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л. и др. — М.: Физматлит, 2004. — 272 с.

[4] Осцилляционный метод Штурма в спектральных задач / Ю.В. Покорный, Ж.И. Бахтина, М.Б. Зверева, С.А. Шабров. — М.: Физматлит, 2009. — 192 с.

[5] Pokornyi, Yu.V. Toward a Sturm-Liouville theory for an equation with generalized coefficients / Yu.V. Pokornyi, S.A. Shabrov // Journal of Mathematical Sciences. — 2004. — Vol. 119, № 6. — P. 769–787.

[6] О нерегулярном расширении осцилляционной теории спектральной задачи Штурма-Лиувилля / Ю.В. Покорный, М.Б. Зверева, А.С. Ищенко, С.А. Шабров // Математические заметки. — 2007. — Т. 82, № 4. — С. 578–582.

[7] Pokornyi Yu.V. On Extension of the Sturm-Liouville Oscillation Theory to Problems with Pulse Parameters / Yu.V. Pokornyi, M.B. Zvereva, S.A. Shabrov // Ukrainian Mathematical Journal. — 2008. — Vol. 60, iss. 1. — C. 108–113.

[8] Давыдова М.Б. О числе решений нелинейной краевой задачи с интегралом Стилтьеса / М.Б. Давыдова, С.А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2011. — Т. 11. № 4. — С. 13–17.

[9] Давыдова М.Б. О нелинейных теоремах сравнения для дифференциальных уравнений второго порядка с производными Радона-Никодима / М.Б. Давыдова, С.А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 155–160.

[10] Дифференциал Стилтьеса в импульсных задачах с разрывными решениями / М.Б. Давыдова, Ю.В. Покорный, М.Б. Зверева, С.А. Шабров // Доклады Академии наук. — 2009. — Т. 428, № 5. — С. 595–597.

[11] Зверева М.Б. Дифференциальные уравнения с разрывными решениями: качественная теория / М.Б. Зверева. — Саарбрюккен, 2012. — 112 с.

[12] Покорный Ю.В. О задаче Штурма–Лиувилля для разрывной струны / Покорный Ю. В., Зверева М. Б., Шабров С. А. // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Математика и механика сплошных сред. Спецвыпуск. Ростов-на-Дону. — 2004. — С. 186–190.

[13] Шабров С.А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С.А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 232–250.

[14] Функция влияния дифференциальной модели четвертого порядка / А.Д. Баев, С.А. Шабров, Ф.В. Голованёва, Меач Мон // Вестник Воронежского института ГПС МЧС России. — 2014. — № 3 (12). — С. 65–73.

[15] Баев А.Д. О единственности решения математической модели вынужденных колебаний струны с особенностями / А.Д. Баев, С.А. Шабров, Меач Мон // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 50–55.

[16] О единственности классического решения математической модели вынужденных колебаний стержневой системы с особенностями / А.Д. Баев, С.А. Шабров, Ф.В. Голованёва, Меач Мон // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 74–80.

[17] Щеглова Ю.Д. Об упругопластическом кручении полого цилиндрического стержня из неоднородного материала с поперечным сечением в виде кругового кольца / Ю.Д. Щеглова

// Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2012. — № 1. — С. 213–219.

[18] Поляков Д.М. Спектральные свойства дифференциального оператора четвертого порядка / Д.М. Поляков // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2012. — № 1. — С. 179–181.

[19] Артемов М.А. Математическое моделирование механического поведения вращающегося диска / М.А. Артемов, А.П. Якубенко // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 30–38.

[20] Абдурагимов Г.Э. О существовании и единственности положительного решения краевой задачи типа Штурма-Лиувилля для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения второго порядка / Г.Э. Абдурагимов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2012. — № 1. — С. 77–80.

[21] Юлдашев Т.К. Смешанная задача для нелинейного уравнения с псевдопараболическим оператором высокой степени / Т.К. Юлдашев // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 2. — С. 277–295.

[22] Юлдашев Т.К. Об обратной задаче для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений высшего порядка / Т.К. Юлдашев // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 153–163.

REFERENCES

[1] Pokorny Yu. V. The Stieltjes integral and derivatives at least in ordinary differential equations. [Pokornyj Yu. V. Integral Stilt'esa i proizvodnye po mere v obyknovennyx differencial'nyx uravneniyax]. *Doklady akademii nauk — Reports of Academy of Sciences*, 1999, Vol. 364, no 2, P. 167–169.

[2] Pokorny Yu. V., Zvereva M. B., Shabrov S. A. Oscillation theory of the Sturm-Liouville problem for impulsive problems. [Pokornyj Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnaya teoriya Shturma–Liuvillya dlya impul'snyx zadach]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 2008, vol. 63, iss. 1, pp. 111–154.

[3] Pokorny Yu.V., Penkin O.M., Pryadiev B.L. et al. Differential equations for geometric graphs. [Pokornyj Yu.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L. i dr. Differencial'nye uravneniya na geometricheskix grafax]. Moscow: Phizmatlit, 2004, 272 p.

[4] Pokorny Yu.V., Bakhtina G.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Sturm oscillation method in spectral problems. [Pokornyj Yu.V., Baxtina Zh.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnyj metod Shturma v spektral'nyx zadach]. Moscow: Phizmatlit, 2009, 192 p.

[5] Pokornyi Yu.V., Shabrov S.A. Toward a Sturm-Liouville theory for an equation with generalized coefficients. Journal of Mathematical Sciences, 2004, vol. 119, no. 6, pp. 769–787.

[6] Pokorny Yu.V., Zvereva M.B., Ishchenko A.S., Shabrov S.A. Irregular Extension of oscillation theory of spectral problem Sturm-Liouville. [Pokornyj Yu.V., Zvereva M.B., Ishhenko A.S., Shabrov S.A. O neregulyarnom rasshirenii oscillyacionnoj teorii spektral'noj zadachi Shturma-Liuvillya]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2007, Vol. 82, no. 4, pp. 578–582.

[7] Pokornyi Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. On Extension of the Sturm-Liouville Oscillation Theory to Problems with Pulse Parameters. Ukrainian Mathematical Journal, 2008, vol. 60, iss. 1, pp. 108–113.

[8] Davydova M. B., Shabrov S. A. On the number of solutions of a nonlinear boundary value problem with a Stieltjes integral. [Davydova M. B., Shabrov S. A. O chisle reshenij nelinejnoj kraevoj zadachi s integralom Stilt'esa]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika — Proceedings of the University of Saratov. New series. Series: Mathematics. Mechanic. Computer*, 2011, Vol. 11, no. 4, pp. 13–17.

[9] Davydova M. B., Shabrov S. A. Nonlinear comparison theorems for differential equations second-order derivatives of the Radon-Nikodym. [Davydova M. B., Shabrov S. A. O nelinejnyx teoremax sravneniya dlya differencial'nyx uravnenij vtorogo poryadka s proizvodnymi Radona-

Nikodima]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 1, pp. 155–160.

[10] Pokornyi Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A., Davydova M.B. Stieltjes differential pulsed problems with discontinuous solutions. [Pokornyi Yu. V., Zvereva M. B., Shabrov S. A., Davydova M. B. Differencial Stilt'esa v impul'snyx zadachax s razryvnymi resheniyami]. *Doklady Akademii nauk — Reports of Academy of Sciences*, 2009, Vol. 428, no. 5, pp. 595–597.

[11] Zvereva M.B. Differential equations with discontinuous solutions: qualitative theory. [Zvereva M.B. Differencial'nye uravneniya s razryvnymi resheniyami: kachestvennaya teoriya]. Saarbruecken, 2012, 112 p.

[12] Pokorny Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. About problem of Sturm - Liouville for discontinuous strings. [Pokornyj Yu.V., M.B. Zvereva, S.A. Shabrov O zadache Shturma–Liuvillya dlya razryvnoj struny]. *Izvestiya VUZov. Severo-Kavkazskij region. Matematika i mexanika sploshnyx sred. Specvypusk. Rostov-na-Donu — Proceedings of the universities. North Caucasus region. Mathematics and mechanics of continuous media. Special Issue. Rostov-on-Don*, 2004, pp. 186–190.

[13] Shabrov S. A. Mathematical model for small deformations of the rod system with internal features. [Shabrov S. A. Ob odnoj matematicheskoj modeli malyx deformacij sterzhnevoj sistemy s vnutrennimi osobennostyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University*, 2013, no. 1, pp. 232–250.

[14] Baev A.D., Shabrov S.A., Golovaneva F.V., Meach Mon The Function Of The Differential Impact Model Fourth Order. [Baev A.D., Shabrov S.A., Golovanyova F.V., Meach Mon Funkciya vliyaniya differencial'noj modeli chetvertogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo instituta GPS MChS Rossii — Herald of the Voronezh Institute of Russian Ministry for Emergency Situations*, 2014, iss. 3 (12), pp. 65–73.

[15] Baev A.D., Shabrov S.A., Meach Mon Uniqueness Of The Solution Mathematical Model Of Forced String Oscillation Singularities. [Baev A.D., Shabrov S.A., Meach Mon O edinstvennosti resheniya matematicheskoj modeli vynuzhdennyx kolebanij struny s osobennostyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, iss. 1, pp. 50–55.

[16] Baev A.D., Shabrov S.A., Golovaneva F.V., Meach Mon About Unique Classical Solution Mathematical Model Of Forced Vibrations Rod System With Singularities. [Baev A.D., Shabrov S.A., Golovanyova F.V., Meach Mon O edinstvennosti klassicheskogo resheniya matematicheskoj modeli vynuzhdennyx kolebanij sterzhnevoj sistemy s osobennostyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 2, pp. 74–80.

[17] Shcheglova Yu.D. On the Elastoplastic Torsion of Hollow Cylindrical Inhomogeneous Rod with a Cross-Section in the Form of a Circular Ring. [Shheglova Yu.D. Ob uprugoplasticheskom kruchenii pologo cilindricheskogo sterzhnya iz neodnorodnogo materiala s poperechnym secheniem v vide krugovogo kol'ca]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 1, pp. 213–219.

[18] Polyakov D.M. Spectral Properties of the Differential Operator of Fourth Order. [Polyakov D.M. Spektral'nye svojstva differencial'nogo operatora chetvertogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 1, pp. 179–181.

[19] Artemov M.A., Yakubenko A.P. Rotating Disc Mechanical Behaviour Mathematical Modelling. [Artemov M.A., Yakubenko A.P. Matematicheskoe modelirovanie mexanicheskogo povedeniya vrashhayushhegosya diska]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics.*

Mathematics, 2014, no. 1, pp. 30–38.

[20] Abduragimov G.E. About Existence and Uniqueness of Positive Solution of Boundary Value Problem of Sturm-Liouville Type for One Nonlinear Functional Differebtial Equation of the Second Order. [Abduragimov G.E'. O sushhestvovanii i edinstvennosti polozhitel'nogo resheniya kraevoj zadachi tipa Shturma-Liuvillya dlya odnogo nelinejnogo funkcional'no-differencial'nogo uravneniya vtorogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 1, pp. 77–80.

[21] Yuldashev T.K. Mixed Value Problem for Nonlinear Equation with Pseudoparabolic Operator of Higher Power. [Yuldashev T.K. Smeshannaya zadacha dlya nelinejnogo uravneniya s psevdoparabolicheskim operatorom vysokoj stepeni]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 2, pp. 277–295.

[22] Yuldashev T.K. On Inverse Problem for Nonlinear Integro-Differential Equations of the Higher Order. [Yuldashev T.K. Ob obratnoj zadache dlya nelinejnyx integro-differencial'nyx uravnenij vysshego poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 1, pp. 153–163.

Шабров Сергей Александрович, доцент кафедры математического анализа математического факультета Воронежского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: shabrov_s_a@math.vsu.ru

Shabrov Sergey Alexandrovich, Associate Professor, Department of Mathematical Analysis, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Candidate of physico-mathematical sciences, docent, Voronezh, Russian Federation
E-mail: shabrov_s_a@math.vsu.ru