УДК 519.6

# О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ НЕСОБСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ЛП 1-ГО РОДА ПОСЛЕ МАТРИЧНОЙ КОРРЕКЦИИ ИХ ДОПУСТИМОЙ ОБЛАСТИ ПО МИНИМУМУ ВЗВЕШЕННОЙ ЕВКЛИДОВОЙ НОРМЫ С УЧЕТОМ СТРУКТУРНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ*

**М. Н. Хвостов**

*Борисоглебский филиал Воронежского государственного университета*

Поступила в редакцию 10.01.2015 г.

**Аннотация**: рассмотрена проблема матричной коррекции пары взаимно двойственных несобственных задач линейного программирования (ЛП) с прямой несобственной задачей 1-го рода по минимуму взвешенной евклидовой нормы в случае. Причем заданы позиции элементов с запретом коррекции. Сформулированы и доказаны достаточные условия существования решения указанной проблемы, которые позволяют последовательно свести её к задаче матричной коррекции системы ограничений прямой ЛП, вспомогательной задаче минимизации с условием неотрицательности аргумента и, окончательно, к задаче безусловной минимизации почти всюду непрерывной и дифференцируемой функции. Получены аналитические формулы для вычисления градиента указанной функции. Приведены результаты решения модельной задачи средней размерности с разреженной матрицей коэффициентов, иллюстрирующие сходимость по аргументу и целевой функции, а также распределение относительных поправок элементов.

**Ключевые слова**: несобственные задачи линейного программирования, матричная коррекция по минимуму взвешенной евклидовой нормы.

# ON SUFFICIENT CONDITIONS FOR THE SOLVABILITY OF IMPROPER LINEAR PROGRAMMING ONE OF THE FIRST KIND WITH MINIMAL WEIGHTED EUCLIDEAN NORM FOR STRUCTURAL MATRIX CORRECTION OF THE FEASIBLE REGION

**M. N. Khvostov**

**Abstract**: in this article the problem of matrix correction of mutually dual improper linear programming (LP) problems on a minimum of weighted Euclidean norm are considered. In discussed problem the correction of primal linear programming problem is improper problem of the 1st kind. Also extended matrix of problem constraints can contains uncorrectable elements. Sufficient conditions for the existence of solution of this problem are formulated. Its proofs are invented. These conditions can by used for reduction of original problem to the problem of unconstrained minimization. This reduction includes several steps. The original problem are reduced toproblem of matrix correction of limitations system of primal LP problem. The resulting problem is reduced to the problem of minimization with non-negative argument. Analytical formulas for the gradient of this function were obtained. As an example, the model problem with the medium-scale sparse matrix of coefficients was solved. Plots of convergence and diagrams of relative corrections of elements illustrates the solution.

**Keywords**: Improper linear programming, matrix correction with minimal weighted Euclidean norm.

---

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14-01-31318).

## ВВЕДЕНИЕ

Линейные оптимизационные модели широко применяются в экономике и технике, задачах помехоустойчивого анализа экспериментальных данных, гарантирующего оценивания параметров, распознавания образов и классификации. Однако на практике часто встречаются неразрешимые задачи линейного программирования. Основными причинами их возникновения являются погрешности (шум) в экспериментальных данных, ошибки округления, возникающие при вычислениях в арифметике с конечной разрядностью, а также нечеткость и противоречивость информации, использующейся при построении указанных моделей. Такие задачи принято называть противоречивыми или несобственными. В связи с тем, что несобственная задача линейного программирования не позволяет получить содержательную информацию об исследуемом процессе или явлении непосредственно, возникает необходимость в ее уточнении, изменении, в результате чего должна быть получена собственная задача, в некотором смысле «близкая» к исходной. Т.е. возникает задача предварительной обработки данных.

Под структурой матричной коррекцией будем понимать коррекцию расширенной матрицы ограничений задачи линейного программирования с заданным множеством неизменяемых элементов. Необходимость в фиксировании элементов чаще всего возникает при обработке разреженных матриц, нулевые значения элементов которых соответствуют аргументам, не влияющим на конкретное уравнение системы ограничений, и при решении задач линейного программирования с системами ограничений, содержащими освобожденные от коррекции элементы в связи с физическим смыслом задачи. Разреженные матрицы возникают при моделировании явлений и процессов, представляющих собой системы, состоящие из более мелких подсистем, слабо связанных между собой. Такая ситуация на практике возникает в случае наличия большого числа аргументов, связанных большим числом уравнений. Таким образом, задачи со структурной матричной коррекцией возникают чаще всего при изучении задач линейного программирования высокой размерности.

Большинство методов матричной коррекции, фактически сводятся к коррекции допустимой области задач линейного программирования. Но коррекция допустимой области задачи линейного программирования без обеспечения непустоты допустимой области соответствующей двойственной задачи, не гарантирует собственность скорректированной линейной оптимизационной модели [1], [2], [3]. Предпосылки к исследованию коррекции двойственной пары задач линейного программирования заложены Ватолиным А.А. [4]. А одним из первых трудов в области матричной коррекции двойственной пары задач линейного программирования является работа Ерохина В.И. [5]. В настоящее время работы в области матричной коррекции двойственной пары задач линейного программирования активно ведутся Ерохиным В.И., Красниковым А.С., Баркаловой О.С. не только по критерию евклидовой нормы, но и по минимуму полиэдральных норм.

Однако применение теории двойственности приводит как к увеличению размерности решаемой задачи (особенно в случае ее большой размерности), так и к усложнению алгоритма ее решения [6]. Применение взвешенной евклидовой нормы, в свою очередь, позволяет учитывать сведения о трудоемкости изменения как левых, так и правых частей коэффициентов систем ограничений. Что позволяет учитывать дополнительную оприорную информацию о изучаемых процессах и явлениях, используя линейные оптимизационные модели. Следует отметить, что применение весов приводит к усложнению расчетов, особенно в случае коррекции двойственной пары задач линейного программирования. Поэтому, важным аспектом является как можно более точное определение области применимости методов оптимизации, основанных на коррекции только прямой задачи линейного программирования.

# 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СТРУКТУРНОЙ ВЗВЕШЕННОЙ МАТРИЧНОЙ КОРРЕКЦИИ

Пусть

$$L(A,b,c):\ Ax=b,\ x\geqslant 0,\ c^\top x\to\max$$

– некоторая задача линейного программирования в канонической форме,

$$L^*(A,b,c):\ u^\top A\geqslant c^\top,\ b^\top u\to\min$$

– двойственная ей задача линейного программирования в стандартной форме, где $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $c,x\in\mathbb{R}^n$, $b,u\in\mathbb{R}^m$ . Символом $\mathcal{X}(A,b)\triangleq\{x\,|Ax=b,\ x\geqslant 0\}$ обозначим допустимое множество задачи $L(A,b,c)$, а символом $\mathcal{U}(A,c)\triangleq\left\{u\left|u^\top A\geqslant c^\top\right.\right\}$ – допустимое множество задачи $L^*(A,b,c)$. С несобственными задачами $L(A,b,c)$ и $L^*(A,b,c)$ будем связывать задачи $SwD^H$, $SwD^{[H\ \ -h]}$, $SwP^H$, $SwP^{[H\ \ -h]}$

$$SwD^H:\begin{cases}L(A+H,b,c):(A+H)x=b,\ x\geqslant 0,\ c^\top x\to\max,\\ L^*(A+H,b,c):u^\top(A+H)\geqslant c^\top,\ b^\top u\to\min,\end{cases}$$

$$SwD^{[H\ \ -h]}:\begin{cases}L(A+H,b+h,c):(A+H)x=b+h,\ x\geqslant 0,\ c^\top x\to\max,\\ L^*(A+H,b+h,c):u^\top(A+H)\geqslant c^\top,\ (b+h)^\top u\to\min,\end{cases}$$

$$SwP^H:\quad\begin{cases}\|\mathcal{W}\circ H\|\to\min,\\ \mathcal{X}\left(A+H,b\right)\neq\varnothing,\end{cases}$$

$$SwP^{[H\ \ -h]}:\quad\begin{cases}\|[\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}]\circ[H\ \ \ -h]\|\to\min,\\ \mathcal{X}\left(A+H,b+h\right)\neq\varnothing,\end{cases}$$

структурной взвешенной матричной коррекции, в которых матрице $H$ или расширенной матрице $[H\ \ \ -h]$ предписано иметь структуру нулевых и ненулевых элементов, задаваемую множествами индексов нулевых элементов $\mathbf{K}$ и $\mathbf{k}$, а также, весовые коэффициенты задаваемые матрицами $\mathcal{W}$ и $\mathfrak{w}$. Вес каждого элемента $H_{ij}$ и $h_i$ задается элементами $\mathcal{W}_{ij}$ и $\mathfrak{w}_i$ соответственно, где $\mathcal{W}$ – весовая матрица с размерами $m\times n$ и $\mathfrak{w}$ – весовая матрица с размерами $m\times 1$.

Критерий оптимальности матричной коррекции в данной форме при условии

$$\mathcal{W}=(\mathcal{W}_{ij}>0|\,i\in 1,\ldots,m,\ \ j\in 1,\ldots,n)\tag{1}$$

и

$$\mathfrak{w}=(\mathfrak{w}_i>0|\,i\in 1,\ldots,m)\tag{2}$$

обладает почти максимальной общностью при использовании евклидовой нормы и является существенным условием ряда теоретических выкладок [7]. Так, если некоторая прикладная задача может потребовать применения нулевых весов для отдельных элементов матриц $H$, $[H\ \ \ -h]$, то нулевые коэффициенты $\mathcal{W}$ и $\mathfrak{w}$ могут быть заменены некоторыми малыми (относительно данной задачи) положительными числами, уменьшение которых будет давать приближение к решению исходной задачи.

## 1.1. Объекты для реализации структурных требований и весовых коэффициентов

Как видно из представленных выше формул, матрица $\mathcal{H}$ и вектор $\mathfrak{h}$ – логические шаблоны для структуры нулевых и ненулевых элементов матрицы $H$ и вектора $h$.

Пусть

$$s\left(p,q\right)=\left(s_i\right)=\left|\begin{array}{l} p_j \text{ если } q_j\neq 0,\\ 0 \text{ в противном случае,}\end{array}\right.$$

где $s\left(p,q\right)\in\mathbb{R}^n$, $p=\left(p_j\right)\in\mathbb{R}^n$, $q=\left(q_j\right)\in\mathbb{R}^n$. Таким образом,

$$\hbar(H)=\begin{bmatrix} s\left(H_{1*}^\top,\mathcal{H}_{1*}^\top\right)\\ \vdots \\ s\left(H_{m*}^\top,\mathcal{H}_{m*}^\top\right)\end{bmatrix} - \tag{3}$$

вектор, составленный из элементов строк $H_{i*}$ в соответствии с шаблонами строк $\mathcal{H}_{i*}$,

$$\hbar([H \ \ -h])=\begin{bmatrix} s\left(\begin{bmatrix} H_{1*}^\top \\ -h_1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\mathcal{H}_{1*}^\top \\ \mathfrak{h}_1\end{bmatrix}\right)\\ \vdots \\ s\left(\begin{bmatrix} H_{m*}^\top \\ -h_m\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\mathcal{H}_{m*}^\top \\ \mathfrak{h}_m\end{bmatrix}\right)\end{bmatrix} - \tag{4}$$

вектор, составленный из элементов строк $[H_{i*} \ \ -h_i]$ в соответствии с шаблонами строк $[\mathcal{H}_{i*} \ \ \mathfrak{h}]$,

$$X(x)=\begin{bmatrix} s^\top\left(x,\mathcal{H}_{1*}^\top\right) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & s^\top\left(x,\mathcal{H}_{2*}^\top\right) & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & s^\top\left(x,\mathcal{H}_{m*}^\top\right)\end{bmatrix} - \tag{5}$$

матрица, $i$-я строка которой составлена из нулевых элементов и элементов вектора $x$ в соответствии с шаблоном $\mathcal{H}_{i*}$.

Выражения $H(\hbar)$, $[H(\hbar) \ \ -h(\hbar)]=[H \ \ -h]\,(\hbar)$, $x(X)$ – обращения формул (3), (4) и (5) соответственно. Так, например, $H(\hbar)$ – это матрица $H$, восстановленная по вектору $\hbar$ в соответствии с формулой (3).

Используя (3)-(5), несложно убедиться, что для матриц $H$ и $[H \ \ -h]$, подчиняющихся соответствующим структурным ограничениям, справедливы формулы

$$Hx=X(x)\cdot\hbar(H),\ [H \ \ -h]\cdot\begin{bmatrix}x\\1\end{bmatrix}=X\left(\begin{bmatrix}x\\1\end{bmatrix}\right)\cdot\hbar\left([H \ \ -h]\right).$$

Таким образом, если $H,\mathcal{H}$ – матрицы размера $m\times n$ и $x\in\mathbb{R}^n$, то размеры рассматриваемых объектов $X(x)\in\mathbb{R}^{m\times N}$, $\hbar(H)\in\mathbb{R}^N$, $X\left([x^\top \ 1]^\top\right)\in\mathbb{R}^{m\times N'}$, $\hbar\left([H \ \ -h]\right)\in\mathbb{R}^{N'}$, где $N=m\cdot n$, $N'=m\cdot(n+1)$.

Заметим, что для произвольного вектора $x\in\mathbb{R}^n$, по аналогии с псевдообращением матриц, символом $x^+$ будем обозначать его «псевдообращение» [8]:

$$x^+=\begin{cases}\left(x^\top x\right)^{-1}\cdot x^\top \text{ если } x\neq 0,\\ 0\in\mathbb{R}^{1\times n} \text{ в противном случае.}\end{cases} \tag{6}$$

При $x\neq 0$ несложно убедиться, что $x^+x=1$ и $\|x^+\|=1/\|x\|$, а если выполнено условие $\|x\|=1$, то $x^+=x^\top$.

Для последующих выкладок, связанные с рассматриваемыми задачами, на ряду с матрицей $X(x)$ потребуется матрица $X^+(x)\in\mathbb{R}^{N\times m}$ – псевдообратная к матрице $X(x)\in\mathbb{R}^{m\times N}$.

**Лемма 1.** *Матрица, псевдообратная к матрице* $X(x)$, *заданной формулой* (5), *имеет вид*

$$X^{+}(x) = \begin{bmatrix} s^{+^\top}\left(x, \mathcal{H}_{1*}^\top\right) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s^{+^\top}\left(x, \mathcal{H}_{2*}^\top\right) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & s^{+^\top}\left(x, \mathcal{H}_{m*}^\top\right) \end{bmatrix}, \tag{7}$$

*где векторы-строки* $s^{+}\left(x, \mathcal{H}_{i*}^\top\right)$ *вычисляются в соответствии с* (6).

*Доказательство.* Как известно, (см., например, [9]), вещественная матрица $Z$, псевдообратная к некоторой заданной вещественной матрице $A$, однозначно определяется следующими четырьмя уравнениями (называемыми уравнениями Пенроуза): $AZA = A$, $ZAZ = Z$, $(ZA)^\top = ZA$, $(AZ)^\top = AZ$. Таким образом, для обоснования формулы (7) необходимо выполнить проверку уравнений Пенроуза с использованием соотношений (6), (5) и (7). Рассмотрим два случая.

1. Матрица $X(x)$ не имеет нулевых строк. В этом случае проверка уравнений Пенроуза существенно облегчается, поскольку, как несложно убедиться (с использованием (5), (7) и (6)), выполняется условие

$$X(x) \cdot X^{+}(x) = I_m,$$

где $I_m$ – единичная матрица порядка $m$.

2. Матрица $X(x)$ имеет нулевые строки. Как следует их (6), (5) и (7), матрица $X^{+}(x)$ имеет нулевые столбцы с теми же номерами, в силу чего выполняется условие

$$X(x) \cdot X^{+}(x) = \widetilde{I}_m,$$

где $\widetilde{I}_m$ – единичная матрица порядка $m$ с нулевыми диагональными элементами, соответствующими нулевым строкам $X(x)$ (нулевым столбцам $X^{+}(x)$). Перестановкой строк в $X(x)$ и такой же перестановкой столбцов в $X^{+}(x)$ указанные матрицы можно привести к блочному виду, выделив блоки нулевых и ненулевых строк, нулевых и ненулевых столбцов. После этого с помощью техники перемножения блочных матриц убеждаемся в справедливости уравнений Пенроуза.

Для выкладок, связанный с задачами $SP^{[H\ -h]}$ и $SD^{[H\ -h]}$, потребуются модификации матриц $X(x)$ и $X^{+}(x)$:

$$X\left(\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}\right), \quad X^{+}\left(\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

Указанные объекты также могут быть «построены» по формулам (5) и (7), но уже из векторов

$$s\left(\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{i*}^\top \\ \mathfrak{h}_i \end{bmatrix}\right), \quad s^{+}\left(\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{i*}^\top \\ \mathfrak{h}_i \end{bmatrix}\right).$$

Как будет показано ниже, нулевые и ненулевые строки матриц $H$, $[H\ \ -h]$, $X(\cdot)$ а также нулевые и ненулевые столбцы $X^{+}(\cdot)$ отказываются тесно связанными с множеством индексов

$$\mathbf{L}(x) = \{i \,|\, (b - Ax)_i \neq 0\},$$

контекстом использования которого будут служить несовместная система $Ax = b$, $x \geqslant 0$ и совместные системы $(A + H)x = b$, $(A + H)x = b + h$.

Решения задач в общем случае (при произвольных матрицах $\mathcal{W}$ и $\mathfrak{w}$) не могут быть записаны в терминах собственных векторов матриц, построенных использованием матрицы $A$ и вектора $b$, так как произведением матриц по Адамару («$\circ$») в общем случае не сводится к классическому матричному умножению.

Пусть $\omega(\mathcal{W}) = [\mathcal{W}_{1*} \ \ldots \ \mathcal{W}_{m*}]^\top$ – вектор, составленный из элементов строк $\mathcal{W}_{i*}$, $\omega([\mathcal{W} \ \mathfrak{w}]) = [[\mathcal{W}_{1*} \ \mathfrak{w}_1] \ \ldots \ [\mathcal{W}_{m*} \ \mathfrak{w}_m]]^\top$ – вектор, составленный из элементов строк $[\mathcal{W}_{i*} \ \mathfrak{w}_i]$, где $\omega(\mathcal{W}) \in \mathbb{R}^N$, $\omega([\mathcal{W} \ \mathfrak{w}]) \in \mathbb{R}^{N'}$, $N = m \cdot n$, $N' = m \cdot (n+1)$.

Таким образом,

$$\Omega(\mathcal{W}) = (\Omega_{ij}(\mathcal{W})) = \left| \begin{array}{l} \omega_i(\mathcal{W}) \text{ если } i = j, \\ 0 \text{ в противном случае,} \end{array} \right. \tag{8}$$

$$\Omega([\mathcal{W} \ \mathfrak{w}]) = (\Omega_{ij}([\mathcal{W} \ \mathfrak{w}])) = \left| \begin{array}{l} \omega_i([\mathcal{W} \ \mathfrak{w}]) \text{ если } i = j, \\ 0 \text{ в противном случае,} \end{array} \right. \tag{9}$$

где $\Omega(\mathcal{W}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $\Omega([\mathcal{W} \ \mathfrak{w}]) \in \mathbb{R}^{N' \times N'}$.

Пусть, так же,

$$\Omega^i = \Omega^i(\mathcal{W}_{i*}) = \left(\Omega^i_{lk}(\mathcal{W}_{i*})\right) = \left| \begin{array}{l} (\mathcal{W}_{i*})_l \text{ если } l = k, \\ 0 \text{ в противном случае,} \end{array} \right. \tag{10}$$

$$\Omega'^i = \Omega^i([\mathcal{W}_{i*} \ \mathfrak{w}_i]) = \left(\Omega^i_{lk}([\mathcal{W}_{i*} \ \mathfrak{w}_i])\right) = \left| \begin{array}{l} [\mathcal{W}_{i*} \ \mathfrak{w}_i]_l \text{ если } l = k, \\ 0 \text{ в противном случае,} \end{array} \right. \tag{11}$$

где $\Omega^i(\mathcal{W}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\Omega^i([\mathcal{W} \ \mathfrak{w}]) \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$.

## 1.2. Применяемые классические результаты

Результаты данных лемм, являющихся классическими результатами, используются для доказательства нижеследующих теорем.

**Лемма 2.** *(Неравенство Коши-Буняковского)* [9] *Для любых векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство $\left|x^\top y\right| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$, которое обращается в равенство тогда и только тогда, когда справедливо представление $y = \gamma x$, где $\gamma$ – некоторое число.*

**Лемма 3.** *(Теорема двойственности* [2]*, классификация несобственных задач ЛП* [10]*) Задачи $L(A, b, c)$ и $L^*(A, b, c)$ разрешимы тогда и только тогда, когда одновременно выполнены условия $\mathcal{X}(A, b) \neq \varnothing$ и $\mathcal{U}(A, c) \neq \varnothing$. Если задачи $L(A, b, c)$ и $L^*(A, b, c)$ неразрешимы, возможны следующие три случая:*

*1. $\mathcal{X}(A, b) = \varnothing$, $\mathcal{U}(A, c) \neq \varnothing$, $L(A, b, c)$ – несобственная задача ЛП 1-го рода, $L^*(A, b, c)$ – несобственная задача ЛП 2-го рода.*

*2. $\mathcal{X}(A, b) \neq \varnothing$, $\mathcal{U}(A, c) = \varnothing$, $L(A, b, c)$ – несобственная задача ЛП 2-го рода, $L^*(A, b, c)$ – несобственная задача ЛП 1-го рода.*

*3. $\mathcal{X}(A, b) = \varnothing$, $\mathcal{U}(A, c) = \varnothing$, $L(A, b, c)$ и $L^*(A, b, c)$ – несобственные задачи ЛП 3-го рода.*

В дальнейшем неоднократно будет использоваться теорема Александрова – Фань-Цзи об альтернативной совместности системы линейных неравенств и смешанной системы линейных уравнений и неравенств ([1]) в следующей формулировке

**Теорема 1.** *(Александрова – Фань-Цзи) Либо совместна система $u^\top A \geqslant c^\top$, либо совместна система $Ax = 0, c^\top x > 0, x \geqslant 0$.*

Следствием данной теоремы является следующее утверждение

**Лемма 4.** *(Следствие условия $\mathcal{U}(A + H^*, c) = \varnothing$ при решении задач $D^H$, $D^{[H \ -h]}$, $SD^H$, $SD^{[H \ -h]}$ для несобственной задачи $L(A, b, c)$ 1-го рода)*

*Пусть $H^*$ – решение задачи $D^H$ или $SD^H$, $[H^* \ \ -h^*]$ – решение задачи $D^{[H \ -h]}$ или $SD^{[H \ -h]}$ для несобственной задачи $L(A, b, c)$ 1-го рода и выполнено условие $\mathcal{U}(A + H^*, c) = \varnothing$.*

*Тогда существует вектор $z \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющий условиям*

$$z \geqslant 0, \quad \|z\| = 1, \quad (A + H^*)z = 0, \quad c^\top z > 0, \tag{12}$$

$$Az \neq 0. \tag{13}$$

*Доказательство.* По определению $\mathcal{U}(\cdot)$ условие $\mathcal{U}(A + H^*, c) = \varnothing$ означает несовместность системы неравенств $u^\top (A + H^*) \geqslant c^\top$. В этом случае в силу теоремы Александрова – Фань-Цзи, совместна альтернативная система, имеющая вид $z \geqslant 0$, $(A + H^*)z = 0$, $c^\top z > 0$. В силу условия $c^\top z > 0$ вектор $z$ – не нулевой и может иметь произвольную (не нулевую) норму. В частности, может выполняться условие $\|z\| = 1$, что и соответствует (12).

Убедимся в выполнении условия (13). Действительно, предположив $Az = 0$, по теореме Александрова – Фань-Цзи имеем $\mathcal{U}(A, c) = \varnothing$, что противоречит условию леммы. □

## 1.3. Задача безусловной структурной матричной коррекции по минимуму взвешенной евклидовой нормы

**Лемма 5.** *Задача структурной взвешенной матричной коррекции $SwP^H$ эквивалентна задаче*

$$\|\Omega(\mathcal{W})\,\hbar\,(H)\| \to \min_{(X(x)\Omega^{-1}(\mathcal{W}))(\Omega(\mathcal{W})\hbar(H)) = b - Ax} \tag{14}$$

*Доказательство.* Используя (3), (5), (8), несложно убедиться, что для матрицы $H$, подчиняющейся соответствующим структурным ограничениям и имеющей заданные весовые коэффициенты, справедливы формулы

$$\left(X\,(x)\,\Omega^{-1}(\mathcal{W})\right)(\Omega(\mathcal{W})\hbar\,(H)) = X(x) \cdot \hbar(H) = H \cdot x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(X\,(x)\,\Omega^{-1}(\mathcal{W})\right)(\Omega(\mathcal{W})\hbar\,(H)) = b - Ax \Leftrightarrow \mathcal{X}(A + H, b) \neq \varnothing$$

и

$$\|\Omega(\mathcal{W})\,\hbar(H)\| = \|\mathcal{W} \circ H\|\,.$$

□

**Лемма 6.** *Задача структурной взвешенной матричной коррекции $SwP^{[H\ \ -h]}$ эквивалентна задаче*

$$\|\Omega([\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}])\,\hbar\,([H\ \ -h])\| \to \min_{\left(X\left(\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}\right)\Omega^{-1}([\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}])\right)(\Omega([\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}])\hbar([H\ \ -h])) = b - Ax} \tag{15}$$

*Доказательство.* Используя (4), (5), (9), несложно убедиться, что для матрицы $[H\ \ -h]$, подчиняющейся соответствующим структурным ограничениям и имеющей заданные весовые коэффициенты, справедливы формулы

$$\left(X\left(\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}\right)\Omega^{-1}([\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}])\right)(\Omega([\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}])\,\hbar\,([H\ \ -h])) =$$

$$= X\left(\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}\right) \cdot \hbar([H\ \ -h]) = [H\ \ -h] \cdot \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(X\left(\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}\right)\Omega^{-1}([\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}])\right)(\Omega([\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}])\,\hbar\,([H\ \ -h])) = b - Ax \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{X}(A + H, b + h) \neq \varnothing$$

и

$$\|\Omega([\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}])\,\hbar([H\quad -h])\| = \|[\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}]\circ[H\quad -h]\|\,.$$

$\square$

**Лемма 7.** *Пусть существуют матрица $H$ и вектор $x$ такие, что $H$ отвечает структурным ограничениям, задаваемым множеством $\mathbf{K}$, и имеет весовые коэффициенты задаваемые матрицей $\mathcal{W}$, система $(A+H)\,x=b$ – совместна.*

*Тогда матрица $\widehat{H}$, являющаяся решением указанной системы с минимальной взвешенной евклидовой нормой, существует, единственна и определяется формулой*

$$\widehat{H} = H(\widehat{\hbar}),$$

*где*

$$\widehat{\hbar} = \Omega^{-1}(\mathcal{W})\cdot\left(X\,(x)\,\Omega^{-1}(\mathcal{W})\right)^{+}\cdot(b-Ax). \tag{16}$$

*При этом*

$$\widehat{H}_{i*}\neq 0 \Leftrightarrow i\in\mathbf{L}(x), \tag{17}$$

$$\left\|\mathcal{W}\circ\widehat{H}\right\| = \left\|\Omega(\mathcal{W})\,\widehat{\hbar}\right\| = \sqrt{\sum_{i\in\mathbf{L}(x)}\frac{(b-Ax)_i^2}{\left\|s^{\top}\left(x,\mathcal{H}_{i*}^{\top}\right)\cdot(\Omega^i)^{-1}\right\|^2}}. \tag{18}$$

*Доказательство.*

$$(A+H)x=b \Leftrightarrow Hx=b-Ax \Leftrightarrow X(x)\hbar(H)=(b-Ax)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(X\,(x)\,\Omega^{-1}(\mathcal{W})\right)(\Omega(\mathcal{W})\hbar\,(H)) = b-Ax \Leftrightarrow$$

$$\hbar\,(H) = \Omega^{-1}(\mathcal{W})\cdot\left(X\,(x)\,\Omega^{-1}(\mathcal{W})\right)^{+}\cdot(b-Ax).$$

Заметим, что в силу исходных предположений все системы в указанной цепочке эквивалентных систем совместны, откуда, в силу хорошо известных свойств обратных и псевдообратных матриц [9], [8], получаем обоснование существования и единственности матрицы $\widehat{H}$, вектора $\widehat{\hbar}$ и справедливости формулы (16).

Для обоснования формул (17)-(18) заметим, что суммируемые в (18) величины являются квадратами взвешенных евклидовых норм строк матрицы $\widehat{H}$ (это можно показать с использованием (6), (3)), (5), (7) и (10)). Но в силу совместности системы $(A+\widehat{H})x=b$ и минимальности $\left\|\mathcal{W}\circ\widehat{H}\right\|$ при (1) множество номеров ненулевых строк матрицы $\widehat{H}$ совпадает с множеством $\mathbf{L}(x)$. $\square$

**Лемма 8.** *Пусть существуют матрица $[H\quad -h]$ и вектор $x$ такие, что $[H\quad -h]$ отвечает структурным ограничениям, задаваемым множествами $\mathbf{K}$, $\mathbf{k}$ и имеет весовые коэффициенты задаваемые матрицей $[\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}]$, система $(A+H)\,x=b+h$ – совместна.*

*Тогда матрица $\left[\widehat{H}\quad -\widehat{h}\right]$, являющаяся решением указанной системы с минимальной взвешенной евклидовой нормой, существует, единственна и определяется формулой*

$$\left[\widehat{H}\quad -\widehat{h}\right] = \left[H(\widehat{\hbar})\quad -h(\widehat{\hbar})\right],$$

*где*

$$\widehat{\hbar} = \Omega^{-1}([\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}])\cdot\left(X\left(\begin{bmatrix}x\\1\end{bmatrix}\right)\Omega^{-1}([\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}])\right)^{+}\cdot(b-Ax). \tag{19}$$

*При этом*

$$\left[\widehat{H}_{i*} \quad -\widehat{h}_i\right] \neq 0 \Leftrightarrow i \in \mathbf{L}(x), \tag{20}$$

$$\|[\mathcal{W} \;\; \mathfrak{w}]\circ[\widehat{H} \quad -\widehat{h}]\| = \left\|\Omega\left([\mathcal{W} \;\; \mathfrak{w}]\right)\widehat{\hbar}\right\| = \sqrt{\sum_{i\in\mathbf{L}(x)} \frac{(b-Ax)_i^2}{\left\|s^\top\left(\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{i*}^\top \\ \mathfrak{h}_i \end{bmatrix}\right)\cdot(\Omega'^i)^{-1}\right\|^2}}. \tag{21}$$

*Доказательство.*

$$(A+H)x = b+h \Leftrightarrow [H(\hbar) \quad -h(\hbar)]\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}^\top = b-Ax \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X\left(\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}\right)\hbar([H \quad -h]) = b-Ax \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(X\left(\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}\right)\Omega^{-1}([\mathcal{W} \;\; \mathfrak{w}])\right)\left(\Omega([\mathcal{W} \;\; \mathfrak{w}])\,\hbar\left([H \quad -h]\right)\right) = b-Ax \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \hbar\left([H \quad -h]\right) = \Omega^{-1}([\mathcal{W} \;\; \mathfrak{w}])\cdot\left(X\left(\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}\right)\Omega^{-1}([\mathcal{W} \;\; \mathfrak{w}])\right)^+\cdot(b-Ax).$$

Поскольку все системы в указанной цепочке эквивалентных систем совместны, из хорошо известных свойств обратных и псевдообратных матриц [9], [8] вытекает существование и единственность матрицы $[\widehat{H} \quad -\widehat{h}]$, вектора $\widehat{\hbar}$ и справедливость формулы (19).

Для обоснования формул (20)-(21) заметим, что суммируемые в (21) величины являются квадратами взвешенных евклидовых норм строк матрицы $[\widehat{H} \quad -\widehat{h}]$, что следует из (6), (4)), (5), (7) и (11). Но в силу совместности системы $(A+\widehat{H})x = b+\widehat{h}$ и минимальности $\left\|[\mathcal{W} \;\; \mathfrak{w}]\circ\left[\widehat{H} \quad -\widehat{h}\right]\right\|$ множество номеров ненулевых строк матрицы $[\widehat{H} \quad -\widehat{h}]$ совпадает с множеством $\mathbf{L}(x)$. □

Леммы 7 и 8 позволяют свести задачи $SwP^H$ и $SwP^{[H\ -h]}$ к задачам условной минимизации по вектору $x \geqslant 0$ целевых функций вида (18) и (21) соответственно. Очевидно, что существование минимума в указанных задачах эквивалентно разрешимости задач $SwP^H$ и $SwP^{[H\ -h]}$, что является обоснованием приводимых ниже лемм, дающих конструктивное описание решений задач $SwP^H$ и $SwP^{[H\ -h]}$.

**Лемма 9.** *Если решение задачи $SwP^H$ существует, то оно имеет вид*

$$H^* = H\left(\Omega^{-1}(\mathcal{W})\cdot\left(X\left(x\right)\Omega^{-1}(\mathcal{W})\right)^+\cdot(b-Ax)\right),$$

*где*

$$x^* \in \operatorname*{Argmin}_{x\geqslant 0}\sum_{i\in\mathbf{L}(x)} \frac{(b-Ax)_i^2}{\left\|s^\top\left(x,\mathcal{H}_{i*}^\top\right)\cdot(\Omega^i)^{-1}\right\|^2}.$$

*При этом*

$$\|\mathcal{W}\circ H^*\| = \sqrt{\sum_{i\in\mathbf{L}(x)} \frac{(b-Ax)_i^2}{\left\|s^\top\left(x,\mathcal{H}_{i*}^\top\right)\cdot(\Omega^i)^{-1}\right\|^2}}. \tag{22}$$

**Лемма 10.** *Если решение задачи $SwP^{[H\ -h]}$ существует, то оно имеет вид*

$$[H^*\ \ -h^*] = [H(\hbar^*)\ \ -h(\hbar^*)],$$

*где*

$$\hbar^* = \Omega^{-1}([\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}]) \cdot \left(X\left(\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}\right)\Omega^{-1}([\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}])\right)^+ \cdot (b - Ax),$$

$$x^* \in \operatorname*{Argmin}_{x \geqslant 0} \sum_{i \in \mathbf{L}(x^*)} \frac{(b - Ax)_i^2}{\left\| s^\top \left( \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{i*}^\top \\ \mathfrak{h}_i \end{bmatrix} \right) \cdot (\Omega'^i)^{-1} \right\|^2}.$$

*При этом*

$$\|[\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}] \circ [H^*\ \ -h^*]\| = \|\Omega([\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}]) \cdot \hbar^*\| = \sqrt{\sum_{i \in \mathbf{L}(x)} \frac{(b - Ax)_i^2}{\left\| s^\top \left( \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{i*}^\top \\ \mathfrak{h}_i \end{bmatrix} \right) \cdot (\Omega'^i)^{-1} \right\|^2}}. \quad (23)$$

Для перехода от от задачи условной минимизации ($x \geqslant 0$) к задаче безусловной минимизации вводится замена, задающая параметрическую зависимость вектора $x$ от некоторого вспомогательного вектора $\widetilde{x}$:

$$x = x(\widetilde{x}) = \left[\widetilde{x}_1^2 \ldots \widetilde{x}_n^2\right]^\top = diag(\widetilde{x})\,\widetilde{x}.$$

## 2. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ НЕСОБСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ЛП 1-ГО РОДА ПОСЛЕ МАТРИЧНОЙ КОРРЕКЦИИ ИХ ДОПУСТИМОЙ ОБЛАСТИ ПО МИНИМУМУ ВЗВЕШЕННОЙ ЕВКЛИДОВОЙ НОРМЫ С УЧЕТОМ СТРУКТУРНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ

**Теорема 2.** *(О достаточных условиях существования решения задачи $SwD^H$) Если $\mathcal{X}(A,b) = \varnothing, \mathcal{U}(A,c) \neq \varnothing$ (т.е. $L(A,b,c)$ — несобственная задача ЛП 1-го рода), $b \neq 0$, задача $SwP^H$ разрешима и матрица $H^*$ является её решением, то задача $SwD^H$ также разрешима и матрица $H^*$ является её решением.*

*Доказательство.* 1. Покажем, что матрица $H^*$ принадлежит допустимой области задачи $SwD^H$. Предположим противное: пусть $H^* \notin \mathbf{FS}(SwD^H)$. Поскольку $H^* \in \mathbf{FS}(SwP^H) \Leftrightarrow \mathcal{X}(A+H, b) \neq \varnothing$, в силу леммы 3 $\mathcal{U}(A+H^*, c) = \varnothing$. Следовательно, в силу леммы 4, существует вектор $z$, удовлетворяющий условиям (12)-(13).

$$(12), (13) \Rightarrow H^*z = -Az \Leftrightarrow X(z) \cdot \hbar(H^*) = -Az \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(X(z)\,\Omega^{-1}(\mathcal{W})\right) \cdot (\Omega(\mathcal{W})\hbar(H^*)) = -Az \Rightarrow$$

$$\left(X(z)\,\Omega^{-1}(\mathcal{W})\right) \cdot \left(X(x^*)\,\Omega^{-1}(\mathcal{W})\right)^+ \cdot (b - Ax^*) = -Az \neq 0. \quad (24)$$

Пусть $D = (d_{ij}) = \left(X(z)\,\Omega^{-1}(\mathcal{W})\right) \cdot \left(X(x^*)\,\Omega^{-1}(\mathcal{W})\right)^+$, $u_i = \left(\Omega^i\right)^{-1} \cdot s(x^*, \mathcal{H}_{i*}^\top)$, $v_i = \left(\Omega^i\right)^{-1} \cdot s(z, \mathcal{H}_{i*}^\top)$, тогда в силу (6), (5) и (7)

$$d_{ij} = \begin{cases} u_i^+ v_i & \text{если } i = j \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом,

$$(24) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} u_i^{+} v_i \cdot (b - Ax^*)_i = -(Az)_i \;\; \forall i \in \mathbf{L}(x^*), \\ (Az)_i = 0 \;\; \forall i \notin \mathbf{L}(x^*), \end{array} \right. \tag{25}$$

Заметим, что условие (17) эквивалентно условию $(b - Ax^*)_i \cdot u_i^{+} \neq 0$, откуда в силу (6) и (2) имеем

$$u_i \neq 0 \;\; \forall i \in \mathbf{L}(x^*). \tag{26}$$

Разобьем множество $\mathbf{L}(x^*)$ на три подмножества: $\mathbf{L}_1(x^*) = \left\{ i \in \mathbf{L}(x^*) |\, u_i^{\top} v_i \neq 0 \right\}$, $\mathbf{L}_2(x^*) = \left\{ i \in \mathbf{L}(x^*) |\, u_i^{\top} v_i = 0, v_i \neq 0 \right\}$ и $\mathbf{L}_3(x^*) = \left\{ i \in \mathbf{L}(x^*) |\, u_i^{\top} v_i = 0, v_i = 0 \right\}$. В силу (6), (25) и (26)

$$\frac{|(b - Ax^*)_i|}{\|u_i\|^2} = \frac{|(Az)_i|}{|u_i^{\top} v_i|} \neq 0 \quad \forall i \in \mathbf{L}_1(x^*), \;\; (Az)_i = 0 \;\; \forall i \in \mathbf{L}_2(x^*) \cup \mathbf{L}_3(x^*).$$

Заметим, что вектор $u_i$ не представим в виде $u_i = \lambda v_i$ для всех $i \in \mathbf{L}_1(x^*)$, где $\lambda$ – некоторое число, поскольку в противном случае получаем $b = 0$, что противоречит условиям теоремы.

Таким образом, в силу леммы 2,

$$|u_i^{\top} v_i| \leqslant \|u_i\| \cdot \|v_i\| \quad \forall i \in \mathbf{L}_1(x^*), \;\; \exists i \in \mathbf{L}_1(x^*) \Big| |u_i^{\top} v_i| < \|u_i\| \cdot \|v_i\|$$

откуда, в свою очередь, $\forall i \in \mathbf{L}_1(x^*)$

$$\frac{|(b - Ax^*)_i|}{\|u_i\|^2} \geqslant \frac{|(Az)_i|}{\|u_i\| \cdot \|v_i\|}, \quad \frac{|(b - Ax^*)_i|}{\|u_i\|} \geqslant \frac{|(Az)_i|}{\|v_i\|},$$

причем в приведенной цепочке неравенств обязательно присутствуют строгие неравенства.

Следовательно, в силу (22),

$$\|\mathcal{W} \circ H^*\| = \sqrt{\sum_{i \in \mathbf{L}(x^*)} \frac{(b - Ax^*)_i^2}{\|u_i\|^2}} > \sqrt{\sum_{i \in \mathbf{L}_1(x^*)} \frac{(Az)_i^2}{\|v_i\|^2} + \sum_{i \in \mathbf{L}_2(x^*) \cup \mathbf{L}_3(x^*)} \frac{(b - Ax^*)_i^2}{\|u_i\|^2}}.$$

Рассмотрим

$$H_{\gamma,z} = H(\Omega^{-1}(\mathcal{W}) \cdot \left( X\left(x^* + \gamma z\right) \Omega^{-1}(\mathcal{W}) \right)^{+} \cdot (b - Ax^* - \gamma Az)).$$

Очевидно, что $H_{z,\gamma}$ – допустимое решение задачи $SwP^H$, поскольку $(x^* + \gamma z) \in \mathcal{X}\left(A + H_{z,\gamma}, b\right)$. Кроме того, в силу (6) и (7)

$$\left\| (\mathcal{W} \circ H_{z,\gamma})_{i*} \right\| = \frac{|(b - Ax^* - \gamma Az)_i|}{\left\| \Omega^{-1}(\mathcal{W}) \cdot s\left(x^* + \gamma z, \mathcal{H}_{i*}^{\top}\right) \right\|},$$

причем

$$\left\| (\mathcal{W} \circ H_{z,\gamma})_{i*} \right\| = 0 \;\; \forall \gamma \text{ при } i \notin \mathbf{L}(x^*),$$
$$\lim_{\gamma \to +\infty} \left\| (\mathcal{W} \circ H_{z,\gamma})_{i*} \right\| =$$
$$= \left\{ \frac{|(Az)_i|}{\|v_i\|} \;\; \forall i \in \mathbf{L}_1(x^*), \; 0 \;\; \forall i \in \mathbf{L}_2(x^*), \; \frac{|(b - Ax^*)_i|}{\|u_i\|} \;\; \forall i \in \mathbf{L}_3(x^*) \right\}.$$

Следовательно, для $H_{z,\gamma}^* = \lim\limits_{\gamma \to +\infty} H_{z,\gamma}$ имеем

$$\left\| \mathcal{W} \circ H_{z,\gamma}^* \right\| = \lim_{\gamma \to +\infty} \|\mathcal{W} \circ H_{\gamma,z}\| = \sqrt{\sum_{i \in \mathbf{L}_1(x^*)} \frac{(Az)_i^2}{\|v_i\|^2} + \sum_{i \in \mathbf{L}_3(x^*)} \frac{(b - Ax^*)_i^2}{\|u_i\|^2}}.$$

Таким образом,

$$\left\|\mathcal{W} \circ H^*_{z,\gamma}\right\| < \left\|\mathcal{W} \circ H^*\right\|.$$

Но это означает, что при достаточно большом, но конечном $\gamma > 0$ существует матрица

$$H_{\gamma,z} = H(\Omega^{-1}(\mathcal{W}) \cdot \left(X\left(x^* + \gamma z\right)\Omega^{-1}(\mathcal{W})\right)^+ \cdot (b - Ax^* - \gamma Az)),$$

являющаяся допустимым решением задачи $SwP^H$ и такая, что $\|\mathcal{W} \circ H_{z,\gamma}\| < \|\mathcal{W} \circ H^*\|$, что противоречит предположению об оптимальности матрицы $H^*$ в задаче $SwP^H$.

2. Оптимальность $H^*$ в задаче $SwD^H$ покажем от противного: пусть существует матрица $H^{**} \in \mathbf{FS}(SwD^H)$ такая, что $\|\mathcal{W} \circ H^{**}\| < \|\mathcal{W} \circ H^*\|$. В то же время $\mathbf{FS}(SwD^H) \subset \mathbf{FS}(SwP^H)$, в силу чего существование матрицы $H^{**}$ противоречит предположению об оптимальности матрицы $H^*$ в задаче $SwP^H$. □

**Теорема 3.** *(О достаточных условиях существования решения задачи $SwD^{[H\ \ -h]}$) Если $\mathcal{X}(A,b) = \varnothing, \mathcal{U}(A,c) \neq \varnothing$ (т.е. $L(A,b,c)$ – несобственная задача ЛП 1-го рода), задача $SwP^{[H\ \ -h]}$ (с параметром $\mathfrak{h} \neq 0$) разрешима и матрица $[H^*\ \ -h^*]$ является её решением, то задача $SwD^{[H\ \ -h]}$ также разрешима и матрица $[H^*\ \ -h^*]$ является её решением.*

*Доказательство.* 1. Покажем, что матрица $[H\ \ -h]$ принадлежит допустимой области задачи $SwD^{[H\ \ -h]}$. Предположим противное: пусть $[H\ \ -h] \notin \mathbf{FS}(SwD^{[H\ \ -h]})$. Поскольку $[H\ \ -h] \in \mathbf{FS}(SwP^{[H\ \ -h]})$, в силу леммы 3 $\mathcal{U}(A+H^*, c) = \varnothing$. Следовательно, в силу леммы 4 существует вектор $z$, удовлетворяющий условиям (12)-(13).

$$(12),(13) \Rightarrow [H^*\ \ -h^*]\begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix} = -Az \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X\left(\begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix}\right) \cdot \hbar\left([H^*\ \ -h^*]\right) = -Az \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(X\left(\begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix}\right)\Omega^{-1}([\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}])\right) \cdot \left(\Omega([\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}])\,\hbar\left([H^*\ \ -h^*]\right)\right) = -Az \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(X\left(\begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix}\right)\Omega^{-1}([\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}])\right) \cdot \left(X\left(\begin{bmatrix} x^* \\ 1 \end{bmatrix}\right)\Omega^{-1}([\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}])\right)^+ \cdot (b - Ax^*) = -Az \neq 0. \qquad (27)$$

Пусть

$$D = (d_{ij}) = \left(X\left(\begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix}\right)\Omega^{-1}([\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}])\right) \cdot \left(X\left(\begin{bmatrix} x^* \\ 1 \end{bmatrix}\right)\Omega^{-1}([\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}])\right)^+,$$

$\widetilde{u}_i = \left(\Omega'^i\right)^{-1} \cdot s\left(\begin{bmatrix} x^* \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathcal{H}^\top_{i*} \\ \mathfrak{h}_i \end{bmatrix}\right)$, $\widetilde{v}_i = \left(\Omega'^i\right)^{-1} \cdot s\left(\begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathcal{H}^\top_{i*} \\ \mathfrak{h}_i \end{bmatrix}\right)$, векторы $u_i$, $v_i$ и множества $\mathbf{L}_1(\cdot)$, $\mathbf{L}_3(\cdot)$ и $\mathbf{L}_2(\cdot)$ определены также, как в доказательстве теоремы 2. В силу (6), (5) и (7)

$$d_{ij} = \begin{cases} \widetilde{u}_i^+ \widetilde{v}_i & \text{если } i = j, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом,

$$(27) \Rightarrow \begin{cases} \widetilde{u}_i^+ \widetilde{v}_i \cdot (b - Ax^*)_i = -(Az)_i \ \ \forall i \in \mathbf{L}(x^*), \\ (Az)_i = 0 \ \ \forall i \notin \mathbf{L}(x^*), \end{cases} \qquad (28)$$

Заметим, что условие (20) эквивалентно условию $(b - Ax^*)_i \cdot \widetilde{u}_i^+ \neq 0$, откуда имеем

$$\widetilde{u}_i^+ \neq 0 \ \ \forall i \in \mathbf{L}(x^*). \qquad (29)$$

В силу (6), (28) и (29)

$$\frac{|(b-Ax^*)_i|}{\|\widetilde{u}_i\|^2} = \frac{|(Az)_i|}{|u_i^\top v_i|} \quad \forall i \in \mathbf{L}_1(x^*), \;\; (Az)_i = 0 \;\; \forall i \in \mathbf{L}_2(x^*) \cup \mathbf{L}_3(x^*).$$

В силу леммы 2,

$$\left|u_i^\top v_i\right| \leqslant \|u_i\| \cdot \|v_i\| \quad \forall i \in \mathbf{L}_1(x^*),$$

откуда, с учетом (23), $\forall i \in \mathbf{L}_1(x^*)$

$$\frac{|(b-Ax^*)_i|}{\|\widetilde{u}_i\|^2} \geqslant \frac{|(Az)_i|}{\|u_i\| \cdot \|v_i\|}, \;\; \frac{|(b-Ax^*)_i|}{\|\widetilde{u}_i\|} \geqslant \zeta_i \cdot \frac{|(Az)_i|}{\|v_i\|} \geqslant \frac{|(Az)_i|}{\|v_i\|},$$

причем в неравенствах, замыкающих приведённую выше цепочку неравенств, обязательно есть строгие, поскольку в силу $\mathfrak{h} \neq 0$ выполняются условия

$$\zeta_i = \|\widetilde{u}_i\| / \|u_i\| \geqslant 1 \;\; \forall i \in \mathbf{L}_1(x^*), \;\; \exists i \in \mathbf{L}_1(x^*) |\, \zeta_i > 1.$$

Следовательно,

$$\|[\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}] \circ [H^*\ \ -h^*]\| = \sqrt{\sum_{i \in \mathbf{L}(x^*)} \frac{|(b-Ax^*)_i|^2}{\|\widetilde{u}_i\|^2}} >$$

$$> \sqrt{\sum_{i \in \mathbf{L}_1(x^*)} \frac{(Az)_i^2}{\|v_i\|^2} + \sum_{i \in \mathbf{L}_2(x^*) \cup \mathbf{L}_3(x^*)} \frac{(b-Ax^*)_i^2}{\|\widetilde{u}_i\|^2}}.$$

Пусть

$$[H\ \ -h]_{z,\gamma} = [H(\hbar_{z,\gamma})\ \ -h(\hbar_{z,\gamma})],$$

где

$$\hbar_{z,\gamma} = \Omega^{-1}([\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}]) \cdot \left( X\left( \begin{bmatrix} x^* + \gamma z \\ 1 \end{bmatrix} \right) \Omega^{-1}([\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}]) \right)^+ \cdot (b - Ax^* - \gamma A z).$$

Как несложно показать,

$$(x^* + \gamma z) \in \mathcal{X}(A + H_{z,\gamma}, b + h_{z,\gamma}) \Rightarrow [H\ \ -h]_{z,\gamma} \in \mathbf{FS}(SP^{[H\ \ -h]}).$$

Кроме того, в силу (6) и (7)

$$\left\|([\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}] \circ [H\ \ -h]_{z,\gamma})_{i*}\right\| = \frac{|b - Ax^* - \gamma A z|_i}{\left\|\Omega'^i \cdot s\left( \begin{bmatrix} x^* + \gamma z \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{i*}^\top \\ \mathfrak{h}_i \end{bmatrix} \right)\right\|},$$

причем

$$\left\|([\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}] \circ [H\ \ -h]_{z,\gamma})_{i*}\right\| = 0 \;\; \forall \gamma \text{ при } i \notin \mathbf{L}(x^*),$$

$$\lim_{\gamma \to +\infty} \left\|([\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}] \circ [H\ \ -h]_{z,\gamma})_{i*}\right\| =$$

$$= \left\{ \frac{|(Az)_i|}{\|v_i\|} \;\; \forall i \in \mathbf{L}_1(x^*), \; 0 \;\; \forall i \in \mathbf{L}_2(x^*), \; \frac{|(b-Ax^*)_i|}{\|\widetilde{u}_i\|} \;\; \forall i \in \mathbf{L}_3(x^*) \right\}.$$

Следовательно, для $[H\ \ -h]^*_{z,\gamma} = \lim\limits_{\gamma \to +\infty} [H\ \ -h]_{z,\gamma}$ имеем

$$\left\|[\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}] \circ [H\ \ -h]^*_{z,\gamma}\right\| = \lim_{\gamma \to +\infty} \left\|[\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}] \circ [H\ \ -h]_{z,\gamma}\right\| =$$

$$= \sqrt{\sum_{i\in \mathbf{L}_1(x^*)} \frac{(Az)_i^2}{\|v_i\|^2} + \sum_{i\in \mathbf{L}_3(x^*)} \frac{(b-Ax^*)_i^2}{\|\widetilde{u}_i\|^2}} < \|[\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}]\circ[H^*\ \ -h^*]\|\,.$$

Но последнее неравенство означает, что при достаточно большом, но конечном $\gamma > 0$ существует матрица $[H\ \ -h]_{z,\gamma}$ , являющаяся допустимым решением задачи $SP^{[H\ -h]}$ и такая, что $\left\|[\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}]\circ[H\ \ -h]_{z,\gamma}\right\| < \left\|[\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}]\circ[H^*\ \ -h^*]\right\|$, что противоречит предположению об оптимальности матрицы $[H^*\ \ -h^*]$. в задаче $SP^{[H\ -h]}$.

2. Оптимальность $[H^*\ \ -h^*]$ в задаче $SwD^{[H\ -h]}$ покажем от противного. Действительно, пусть существует матрица $[H^{**}\ \ -h^{**}] \in \mathbf{FS}(SwD^{[H\ -h]})$ такая, что $\|[\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}]\circ[H^{**}\ \ -h^{**}]\| <$ $< \|[\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}]\circ[H^*\ \ -h^*]\|$. Но $\mathbf{FS}(SwD^{[H\ -h]}) \subset \mathbf{FS}(SwP^{[H\ -h]})$, следовательно, существование матрицы $H^{**}$ противоречит предположению об оптимальности матрицы $[H^*\ \ -h^*]$ в задаче $SwP^{[H\ -h]}$. □

## 3. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

В качестве примера рассмотрим задачу mondou2 из репозитория несобственных задач ЛП Netlib (http:// www.netlib.org/lp/infeas/). Левая часть данной задачи представляет собой матрицу размером 312x604, содер- жащую 1623 ненулевых элементов. В качестве начального приближения выбран

$$\widetilde{x}^0 = \left(\widetilde{x}_i^0\right) \left|\widetilde{x}_i^0 = 100 \ \ \forall i \in 1, 2, \ldots 604\right. .$$

Коррекция выполнялась только для ненулевых элементов расширенной матрицы [A b]. Ее структура приведена на рисунке 1 (красными точками выделены положительные элементы, синими – отрицательные)

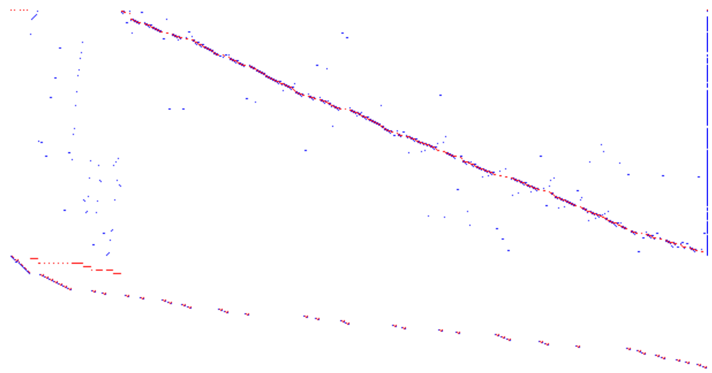

Рис. 1. *Структура расширенной матрицы ограничений задачи mondou2*

Весовые коэффициенты $[\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}]$ заданы следующим образом:

$$\mathcal{W} = (\mathcal{W}_{i,j}) \left| \begin{array}{l} \mathcal{W}_{i,j} = \dfrac{1}{(A_{ij})^2} \text{ если } A_{ij} \neq 0, \\ \mathcal{W}_{i,j} = 1 \text{ в противном случае,} \end{array} \right.$$

$$\mathfrak{w} = (\mathfrak{w}_i) \left| \begin{array}{l} \mathfrak{w}_i = \dfrac{1}{(b_i)^2} \text{ если } b_i \neq 0, \\ \mathfrak{w}_i = 1 \text{ в противном случае.} \end{array} \right.$$

В качестве алгоритма минимизации использовался метод Бройдена-Флетчера-Гольдфарба-Шенно (БФГШ). На нижеследующих графиках представлены: сходимость по аргументу

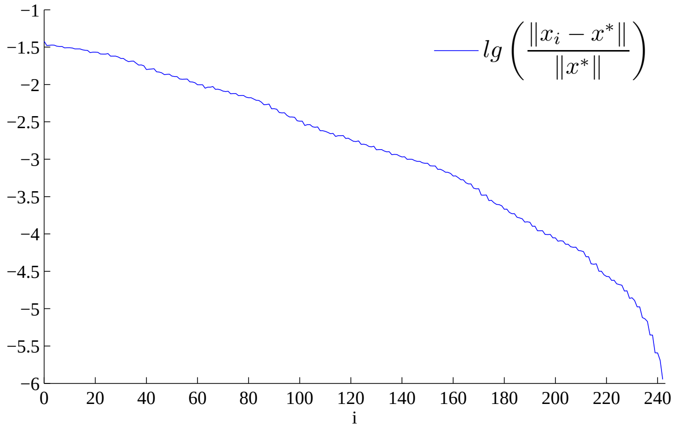


Рис. 2. *Иллюстрация сходимости алгоритма минимизации по аргументу для задачи mondou2*

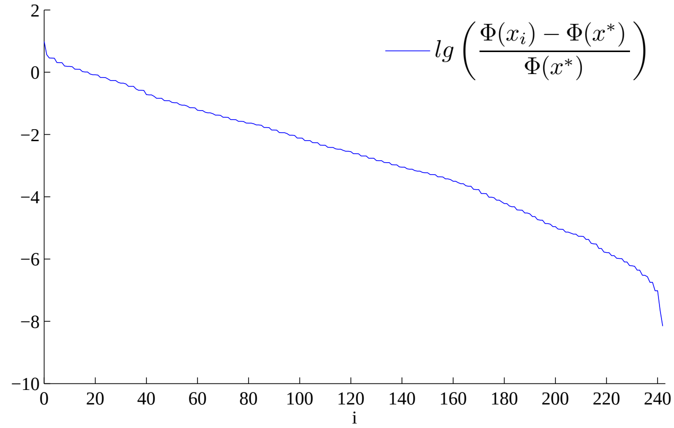


Рис. 3. *Иллюстрация сходимости алгоритма минимизации по целевой функции задачи mondou2*

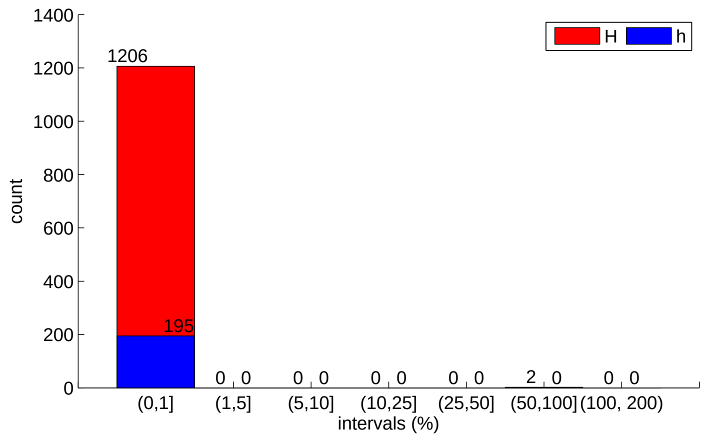


Рис. 4. *Интервальный ряд распределения значений элементов расширенной матрицы коррекции для задачи mondou2*

(рисунок 2), сходимость по взвешенной целевой функции (рисунок 3), гистограмма распределения модуля относительной величины поправки на элементы матрицы коэффициентов и правой части системы (рисунок 4).

Алгоритм выполнил 245 итераций. Значение величины целевой функции 2.000029805006946. Евклидова норма расширенной матрицы коррекции $\|[H\ -h]\| = 1.147791392970291e + 003$.

Отметим, что интересные результаты получены в работах [11]–[15].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ашманов С.А. Теория оптимизации в задачах и упражнениях / С.А. Ашманов, А.В. Тимохов. — М.: Наука, 1991. — 448 с.

[2] Васильев Ф.П. Линейное программирование / Ф.П. Васильев, А.Ю. Иваницкий. — М.: Изд-во «Факториал Пресс», 2003. — 352 с.

[3] Еремин И.И. Введение в теорию линейного и выпуклого программирования / И.И. Еремин, Н.Н. Астафьев. — М.: Наука, 1976. — 192 с.

[4] Ватолин А.А. Апроксимация несобственных задач линейного программирования по критерию евклидовой нормы / А.А. Ватолин // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1984. — Т. 24, № 12. — С. 1907–1908.

[5] Ерохин В.И. Матричная коррекция двойственной пары несобственных задач линейного программирования / В.И. Ерохин // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2007. — Т. 47, № 4. — С. 587–601.

[6] Ерохин В.И. О достаточных условиях разрешимости задач линейного программирования при матричной коррекции их ограничений / В.И. Ерохин, А.С. Красников, М.Н. Хвостов // Труды института математики и механики УрО РАН. — 2013. — Т. 19, № 2. — С. 144–156.

[7] Ерохин В.И. Оптимальная матричная коррекция несовместных систем линейных алгебраических уравнений и несобственных задач линейного программирования: дисс.... д-ра физ.-мат. наук. — Москва, 2005. — 346 с.

[8] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. — М.: Наука, 1988. — 552 с.

[9] Воеводин В.В. Матрицы и вычисления / В.В. Воеводин, Ю.А. Кузнецов. — М.: Наука, 1984. — 320 с.

[10] Еремин И.И. Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования / И.И. Еремин, В.Д. Мазуров, Н.Н. Астафьев. — М.: Наука, 1983. — 336 с.

[11] Скороходов В.А. Задача Дирихле на графах с нестандартной достижимостью / В.А. Скороходов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 210–221.

[12] Пуолокайнен Т.М. Классификация и покрытие многогранников класса D / Т.М. Пуолокайнен // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2011. — № 2. — С. 129–132.

[13] Вахитова Е.В. Приложение метода весового решета к коротким интервалам арифметической прогрессии / Е.В. Вахитова, С.Р. Вахитова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2012. — № 2. — С. 86–92.

[14] Гельман Б.Д. Об одном классе вырожденных дифференциальных включений / Б.Д. Гельман, А.В. Завьялова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 136–145.

[15] Астахов А.Т. Одно свойство нормалей к граням n–мерного симплекса / А.Т. Астахов, В.З. Мешков // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 4. — С. 91–93.

## REFERENCES

[1] Ashmanov S.A., Timokhov A.V. Optimization theory in problems and exercises. [Ashmanov S.A., Timokhov A.V. Teoriya optimizatsii v zadachakh i uprazhneniyakh]. Moscow: Nauka, 1991, 448 p.

[2] Vasil'ev F.P., Ivanitskii A.Yu. Linear programming. [Vasil'ev F.P., Ivanitskii A.Yu. Linejnoe programmirovanie]. Moscow: Faktorial Press, 2003, 352 p.

[3] Eremin I.I., Astaf'ev N.N. Introduction to the theory of linear and convex programming. [Eremin I.I., Astaf'ev N.N. Vvedenie v teoriyu linejnogo i vypuklogo programmirovaniya]. Moscow: Nauka, 1976, 192 p.

[4] Vatolin A.A. Approximation of non-eigen problems of linear programming using the Euclidean norm criterion. [Vatolin A.A. Aproksimatsiya nesobstvennykh zadach linejnogo programmirovaniya po kriteriyu evklidovoj normy]. *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki — Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1984, vol. 24, no. 6, pp. 1907–1908.

[5] Erokhin V.I. Matrix correction of a dual pair of improper linear programming problems. [Erokhin V.I. Matrichnaya korrektsiya dvojstvennoj pary nesobstvennykh zadach linejnogo programmirovaniya]. *Zhurnal vychslitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki — Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2007, vol. 47, no. 4, pp. 587–601.

[6] Erokhin V.I., Krasnikova A.S., Hvostov M.N. On sufficient conditions for the solvability of linear programming for matrix correction of the system of constraints. [Erokhin V.I., Krasnikova A.S., Hvostov M.N. O dostatochnykh usloviyakh razreshimosti zadach linejnogo programmirovaniya pri matrichnoj korrektsii ikh ogranichenij]. *Trudy instituta matematiki i mexaniki UrO RAN — Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences*, 2013, vol. 19, no. 2, pp. 144–156.

[7] Erokhin V.I. Optimal matrix correction of incompatible systems of linear algebraic equations and improper linear programming problems. [Erokhin V.I. Optimal'naya matrichnaya korrektsiya nesovmestnykh sistem linejnykh algebraicheskikh uravnenij i nesobstvennykh zadach linejnogo programmirovaniya]. dis.... doc. phys. math. sciences, Moscow, 2005, 346 p.

[8] Gantmakher F.R. Theory of matrices. [Gantmakher F.R. Teoriya matrits]. Moscow: Nauka, 1988, 552 p.

[9] Voevodin V.V., Kuznetsov A.Yu. Matrix and computing. [Voevodin V.V., Kuznetsov A.Yu. Matritsy i vychisleniya]. Moscow: Nauka, 1984, 320 p.

[10] Eremin I.I., Mazurov V.D., Astaf'ev N.N. Improper linear and convex mathematical programs. [Eremin I.I., Mazurov V.D., Astaf'ev N.N. Nesobstvennye zadachi linejnogo i vypuklogo programmirovaniya]. Moscow: Nauka, 1983, 336 p.

[11] Skorokhodov V.A. The Dirichlet Problem on Digraphs with Nonstandard Reachability. [Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika]. *Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics — Skoroxodov V.A. Zadacha Dirixle na grafax s nestandartnoj dostizhimost'yu*, 2013, no. 1, pp. 210–221.

[12] Puolokainen T.M. Classification and Covering of Polyhedrons of Class D. [Puolokajnen T.M. Klassifikaciya i pokrytie mnogogrannikov klassa D]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2011, no. 2, pp. 129–132.

[13] Vakhitova E.V., Vakhitova S.R. Apply Method Sieve Weights to Short Intervals Arithmetic Progression. [Vaxitova E.V., Vaxitova S.R. Prilozhenie metoda vesovogo resheta k korotkim intervalam arifmeticheskoj progressii]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 2, pp. 86–92.

[14] Gelman B.D., Zavyalova A.V. A Class of Degenerate Differential Inclusions. [Gel'man B.D., Zav'yalova A.V. Ob odnom klasse vyrozhdennyx differencial'nyx vklyuchenij]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 1, pp. 136–145.

[15] Astahov A.T., Meshkov V.Z. One Property of the Normals to the Faces of the n–dimensional

Simplex. [Astaxov A.T., Meshkov V.Z. Odno svojstvo normalej k granyam n–mernogo simpleksa]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 4, pp. 91–93.

*Хвостов Михаил Николаевич, младший научный сотрудник, Борисоглебский филиал Воронежского государственного университета, Борисоглебск, Российская Федерация*
*E-mail: khvostov@bsk.vsu.ru*

*Khvostov Mikhail Nikolaevich, associate scientist, Borisoglebsk branch of Voronezh State University, Borisoglebsk, Russian Federation*
*E-mail: khvostov@bsk.vsu.ru*