УДК 517.9

# СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОПЕРАТОРА ДИРАКА В ЛЕБЕГОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ*

**Е. Ю. Романова**

*Воронежский государственный университет*

Поступила в редакцию 03.06.2014 г.

**Аннотация**: рассматривается пространство $\mathcal{F} = \mathcal{F}([0, 2\pi], \mathbb{C}^2)$, являющееся одним из следующих банаховых пространств $L_p([0, 2\pi], \mathbb{C}^2)$, $L_\infty([0, 2\pi], \mathbb{C}^2)$, $C_b([0, 2\pi], \mathbb{C}^2)$. Изучается оператор Дирака $L : D(L) \subset \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, заданный дифференциальным выражением $l(y) = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{dy}{dt} - vy$, где $v(t) = \begin{pmatrix} 0 & P(t) \\ Q(t) & 0 \end{pmatrix}, t \in [0, 2\pi]$, где $P, Q \in L_\infty([0, 2\pi], \mathbb{C}^1), \mathbb{C}^1 = \mathbb{C}$ - поле комплексных чисел. Область определения исследуемого оператора определяется периодическими краевыми условиями $y(0) = y(2\pi)$. Если $v = 0$ (нулевой потенциал), то оператор $L$ будет обозначаться символом $L^0$ и называться свободным оператором Дирака. При изучении оператора Дирака оператор $L^0$ будет играть роль невозмущенного оператора, а оператор умножения на потенциал $v$ - возмущения. Для исследования спектральных свойств оператора применяется метод подобных операторов. Найдены операторы, подобные заданному. Получены результаты об асимптотике спектра, а также установлена равносходимость спектральных разложений исходного и невозмущенного операторов.

**Ключевые слова**: спектр оператора, оператор Дирака, метод подобных операторов, асимптотика спектра, спектральные разложения, равносходимость спектральных разложений.

# SPECTRAL ANALYSIS OF DIRAC OPERATOR IN LEBESGUE SPACES

**E. Yu. Romanova**

**Abstract**: Consider the space $\mathcal{F} = \mathcal{F}([0, 2\pi], \mathbb{C}^2)$, which is one of the following Banach spaces $L_p([0, 2\pi], \mathbb{C}^2)$, $L_\infty([0, 2\pi], \mathbb{C}^2)$, $C_b([0, 2\pi], \mathbb{C}^2)$. We study Dirac operator $L : D(L) \subset \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, generated by differential expression $l(y) = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{dy}{dt} - vy$, где $v(t) = \begin{pmatrix} 0 & P(t) \\ Q(t) & 0 \end{pmatrix}, t \in [0, 2\pi]$, where $P, Q \in L_\infty([0, 2\pi], \mathbb{C}^1), \mathbb{C}^1 = \mathbb{C}$. Domain of investigated operator is determined by periodic boundary conditions $y(0) = y(2\pi)$. If $v = 0$ (zero potential), then operator $L$ operator will be denoted as $L^0$ and called as free operator Dirac. In the study of the Dirac operator $L^0$ plays the role of an unperturbed operator,and operator of multiplication by the potential $v$ is regarded as a perturbation. The method of similar operators is used to analyze the spectral properties of the operator.Found the operators are similar of investigated operator. The asymptotic of spectrum and the estimations for equiconvergence of spectral decomposition are obtained.

**Keywords**: Spectrum of operator, differential operator with involution, similar operators method, asymptotic of spectrum, spectral decomposition, equiconvergence of spectral decomposition.

* Работа поддержана грантом Российского Научного Фонда (проект 14-21-00066, выполняемый в Воронежском государственном университете), РФФИ (проекты 13-01-00378, 14-01-31196)

# 1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $L_p[0,2\pi]-$ банахово пространство суммируемых со степенью $p \in [1,\infty)$ на $[0,2\pi]$ функций.

Тогда определим через $L_p = L_p([0,2\pi],\mathbb{C}^2)$- банахово пространство (пространство Лебега) суммируемых со степенью $p \in [1,\infty)$ на $[0,2\pi]$ и со значениями в $\mathbb{C}^2$ функций, для которых конечна величина

$$\|y\|_p = (\int\limits_0^{2\pi} \|y(t)\|^p_{\mathbb{C}^2} dt)^{1/p}, t \in [0,2\pi].$$

Символ $L_\infty = L_\infty([0,2\pi],\mathbb{C}^2)$ обозначает банахово пространство существенно ограниченных измеримых функций с нормой

$$\|y\|_\infty = \mathrm{vrai}\sup_{t\in[0,2\pi]} \|y(t)\|_{\mathbb{C}^2}.$$

Через $C_b = C_b([0,2\pi],\mathbb{C}^2)$ обозначим банахово пространство непрерывных и ограниченных функций на отрезке $[0,2\pi]$ и со значениями в $\mathbb{C}^2$ с нормой

$$\|y\|_\infty = \sup_{t\in[0,2\pi]} \|y(t)\|_{\mathbb{C}^2}.$$

Символ $\mathcal{F} = \mathcal{F}([0,2\pi],\mathbb{C}^2)$ будем использовать для обозначения одного из введенных в рассмотрение пространств.

В случае, когда $\mathcal{F} = L_p$, определим пространство Соболева $W^1_p([0,2\pi],\mathbb{C}^2) = \{y \in L_p([0,2\pi],\mathbb{C}^2), p \geqslant 1 : y$ абсолютно непрерывна и $\dot{y} \in L_p([0,2\pi],\mathbb{C}^2)\}$.

Через $C^1([0,2\pi],\mathbb{C}^2) = \{y \in C_b([0,2\pi],\mathbb{C}^2) : \dot{y} \in C_b\}$ обозначим банахово пространство непрерывно дифференцируемых функций из $C_b$ в случае, когда $\mathcal{F} = C_b$.

Символ $\mathcal{F}^1 = \mathcal{F}^1([0,2\pi],\mathbb{C}^2)$ будем использовать для обозначения одного из введенных выше пространств.

Рассмотрим оператор Дирака $L : D(L) \subset \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, заданный дифференциальным выражением

$$l(y) = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{dy}{dt} - vy, \tag{1}$$

где

$$v(t) = \begin{pmatrix} 0 & P(t) \\ Q(t) & 0 \end{pmatrix}, t \in [0,2\pi], \tag{2}$$

где $P, Q \in L_\infty([0,2\pi],\mathbb{C}^1)$, $\mathbb{C}^1 = \mathbb{C}$ - поле комплексных чисел и $\mathcal{F} = \mathcal{F}([0,2\pi],\mathbb{C}^2)$.

Область определения оператора $L$ задается с помощью периодических краевых условий

$$y(0) = y(2\pi).$$

Для определения $D(L)$ рассмотрим дифференциальное уравнение

$$i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \dot{U}(t) = \begin{pmatrix} 0 & P(t) \\ Q(t) & 0 \end{pmatrix} U(t),$$

где $U(0) = I-$ тождественный оператор в $\mathbb{C}^2$. Данное уравнение эквивалентно уравнению

$$\dot{U}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -iP(t) \\ iQ(t) & 0 \end{pmatrix} U(t).$$

Согласно [1], операторнозначная функция $U$ обратима. Рассмотрим семейство эволюционных операторов

$$\mathcal{U}(t,s) = U(t)U^{-1}(s), t, s \in [0, 2\pi].$$

Функцию $y \in \mathcal{F}$ отнесем к области определения оператора Дирака

$$L = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} - v,$$

если существует функция $f \in \mathcal{F}$ такая, что имеет место равенство

$$y(t) = \mathcal{U}(t,0)y(0) + \int\limits_0^t \mathcal{U}(t,s)f(s)ds,$$

где $y$ удовлетворяет периодическому краевому условию, определенному выше.

Отметим, что функция $y$ по определению непрерывна.

В статье [2] спектр оператора $L$ не зависит от выбора пространства $\mathcal{F}$, в котором он действует. Поскольку метод подобных операторов относится к возмущениям, область определения которых содержит область определения невозмущенного оператора, то изучение оператора Дирака будем осуществлять в пространстве $\mathcal{F}$ при условии, что $P, Q \in \mathcal{F}$. И ввиду сказанного спектры таких операторов совпадают.

Заметим, что оператор Дирака, определенный выше, ранее не рассматривался (кроме как для $P, Q \in L_2[0, 2\pi]$).

Если $v = 0$ (нулевой потенциал), то оператор $L$ будет обозначаться символом $L^0$. Оператор $L^0$ будем называть *свободным оператором Дирака*, который при изучении оператора $L$ будет играть роль невозмущенного оператора, а оператор умножения на потенциал $v$ - возмущения.

Спектр $\sigma(L^0)$ и собственные функции для $L^0$ не зависят от выбора рассматриваемых пространств и легко определяются следующим образом:

$\sigma(L^0) = \mathbb{Z}$; каждое собственное значение $\lambda_n = n, n \in \mathbb{Z}$ и соответствующие собственные функции имеют вид:

$$e_n^1 = \begin{pmatrix} e^{-i\lambda_n t} \\ 0 \end{pmatrix}, e_n^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$

В данной статье для исследования спектральных свойств оператора Дирака используется метод подобных операторов. Суть метода состоит в преобразовании подобия исследуемого (возмущенного) оператора в оператор, спектральные свойства которого близки к спектральным свойствам невозмущенного оператора (в данном случае свободного оператора $L^0$).Тем самым существенно упрощается изучение исследуемого оператора $L$.

Именно методом подобных операторов исследовался оператор Дирака в статье [7] в гильбертовом пространстве $L_2([0, \pi], \mathbb{C}^2)$.

При попытке исследования оператора Дирака $L$ общими методами теории возмущений возникает несколько затруднений, связанных с наличием таких свойств, как:

(a) расстояние между собвственными значениями невозмущенного оператора $L^0$ не уходит в бесконечность;

(b) возмущение (оператор умножения на потенциал $v$) не является ограниченным оператором;

(c) рассматриваемые операторы действуют не в гильбертовом пространстве. Здесь мы не можем использовать свойство невозмущенности оператора $L$.

В отличии от [7], где существенно использовались методы гильбертовых пространств, в данной статье широко используются методы гармонического анализа.

Отметим статьи [8]-[10], где изучался оператор Дирака с потенциалом в пространстве $C[0,1]$, и была получена асимптотика собственных значений, а также построена асимптотика решений соответствующих параболических уравнений.

## 2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Основная идея метода подобных операторов [3]–[7], [11]–[12] состоит в следующем. Пусть $A$ — линейный хорошо изученный оператор, действующий в банаховом пространстве $\mathcal{X}$ (он обычно называется невозмущенным оператором), и $B$ — другой оператор, который в некотором смысле "мал" по сравнению с $A$. При определенных условиях естественно ожидать, что оператор $A-B$ подобен оператору $A-B_0$, где $B_0$ имеет несложную по отношению к $A$ структуру. Оказалось, что процедура построения оператора $B_0$ и оператора преобразования оператора $A-B$ в $A-B_0$ тесно связана с гармоническим анализом линейных операторов из некоторого пространства возмущений оператора $A$, которому принадлежит и $B$. Проверка условия подобия операторов $A-B$ и $A-B_0$ обычно приводит к вопросу разрешимости некоторых нелинейных уравнений в пространстве возмущений.

Применяя метод подобных операторов для исследования спектральных свойств оператора $L$, свободный оператор $L^0$ будем считать невозмущенным оператором. Он будет обозначаться также символом $A$. Таким образом, $L = A - B$, где $B$-оператор умножения на потенциал $v$.

Всюду в дальнейшем $\mathcal{X} = \mathcal{F}([0,2\pi],\mathbb{C}^2)$ будем отождествлять с банаховым пространством $\mathcal{F}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}^2)$ периодических периода $2\pi$ функций одного из пространств, включенных в $\mathcal{F}$.

Через $L_1^{2\pi}(\mathbb{R})$ обозначим банахову алгебру периодических периода $2\pi$ локально суммируемых функций. Тогда на $End\mathcal{X}$ введем структуру банахова $L_1^{2\pi}(\mathbb{R})$ - модуля, определенную следующим образом:

$$\varphi X = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \varphi(t)T(t)XT(-t)xdt, \tag{1}$$

где $\varphi \in L_1^{2\pi}(\mathbb{R}), X \in End\mathcal{X}, T(t) : \mathbb{R} \to End\mathcal{X}$ — периодическая периода $2\pi$ изометрическая сильно непрерывная группа операторов.

Заметим, что $\|\varphi X\| \leqslant \|\varphi\|_1\|X\|$.

Рассмотрим последовательности трансформаторов, входящих в допустимую тройку метода подобных операторов [3]:

$$J_mX = JX - J(f_mX) + f_mX = J(X - f_mX) + f_mX,$$
$$\Gamma_mX = \Gamma X - \Gamma(f_mX) = \Gamma(X - f_mX) = (f * (1 - f_m))X,$$

где

$$(JX)x = X_0x = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} T(t)XT(-t)x\,dt = \varphi X, \varphi \equiv 1,$$

$$(\Gamma X)x = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)T(t)XT(-t)x\;dt = fX,$$

$$f_m(t) = \sum_{n=-m}^{m}(1 - \frac{|n|}{m})e^{int}, \|f_m\| = 1, f(t) = i(t-\pi),$$
$$t \in [0,2\pi), \quad x \in \mathcal{X}, X \in End\mathcal{X}, m \in \mathbb{Z}_+.$$

Теперь, пользуясь формулами, определенными выше, выпишем представление операторов $JB$, $\Gamma B$ :

$$((JB)x)(s) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{4\pi} \begin{pmatrix} 0 & P(\frac{s+\tau}{2}) \\ Q(\frac{s+\tau}{2}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau, \tag{2}$$

$$((\Gamma B)x)(s) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{4\pi} \begin{pmatrix} 0 & f(\frac{s-\tau}{2})P(\frac{s+\tau}{2}) \\ f(\frac{\tau-s}{2})Q(\frac{s+\tau}{2}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau, \tag{3}$$

где $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{F}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2), p \geqslant 1, s \in [0, 2\pi], f(t) = i(t-\pi), t \in [0, \pi), f \in \mathcal{F}_{2\pi}(\mathbb{R})$.

Методом подобных операторов были получены следующие результаты.

**Теорема 1.** *Если число $m \in \mathbb{Z}_+$ таково, что $\|\Gamma_m B\|_1 < 1$, (т.е. оператор $I + \Gamma_m B$ обратим), то оператор $L = A - B$, где $A = L^0, B$- оператор умножения на $v$, подобен оператору $\widetilde{L} = L^0 - \widetilde{B}$, где*

$$\widetilde{B} = J_m B + (I + \Gamma_m B)^{-1}(B\Gamma_m B - (\Gamma_m B)J_m B),$$

*причем имеет место равенство*

$$(A - B)(I + \Gamma_m B) = (I + \Gamma_m B)(A - \widetilde{B}).$$

*Операторы $J_m B$, $\Gamma_m B$, $B\Gamma_m B$, $(\Gamma_m B)(J_m B)$, $\widetilde{B}$ являются компактными.*

**Теорема 2.** *Пусть число $m \in \mathbb{Z}_+$ таково, что $\|\Gamma_m B\|_1 < 1$. Тогда оператор $L = A - B$ подобен оператору вида*

$$A - J(\widetilde{X} - f_m\widetilde{X}) = A - J_m\widetilde{X} = A - B_0, \tag{4}$$

*где оператор $\widetilde{X}$ — решение уравнения $X = B\Gamma_m X - (\Gamma_m X)(J_m X) + B = \Phi(X)$, которое можно найти методом последовательных приближений.*

*Преобразование подобия оператора $A - B$ в оператор $A - B_0$ осуществляет оператор $I + \Gamma_m\widetilde{X}$.*

Непосредственно из теоремы 2 следует

**Теорема 3.** *Возмущенный оператор является оператором с компактной резольвентой и существует такая нумерация собственных значений,что $\sigma(L)$ представим в виде*

$$\sigma(L) = \sigma_{(m)} \bigcup ( \bigcup_{|n| \geqslant m+1} \sigma_n), \tag{5}$$

*где $\sigma_{(m)}$ — конечное множество, а*

$$\sigma_n = \{n + \beta_n^{\pm}\}, \lim_{n\to\infty} \beta_n^{\pm} = 0, |\ n\ | \geqslant m + 1.$$

*Также верно*

$$\lim_{n\to\infty} |\ \frac{\lambda_n' + \lambda_n''}{2} - 2n\ | = 0, n \in \mathbb{Z}, \tag{6}$$

*где $\lambda_n', \lambda_n''$ — собственные значения оператора $L$.*

Поскольку $P_n$ — проектор Рисса, построенный по одноточечному множеству $\{\lambda_n\} \subset \sigma(L^0), n \in \mathbb{N}$, тогда в следующей теореме $\widetilde{P}_{(m)}, \widetilde{P}_n, n \geqslant m + 1,$ — проекторы Рисса, построенные по оператору $L$ и множествам $\sigma_{(m)}, \sigma_n, n \geqslant m + 1$, соответственно.

**Теорема 4.** *Имеет место равносходимость спектральных разложений операторов $L$ и $L^0$ :*

$$\lim_{n\to\infty} \|\widetilde{P}_n - P_n\| = 0, \tag{7}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|\widetilde{P}_{(m)} + \sum_{|k|=m+1}^{n} (1 - \frac{|k|}{n})\widetilde{P}_k - P_{(m)} - \sum_{|k|=m+1}^{n} (1 - \frac{|k|}{n})P_k\| = 0. \tag{8}$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Далецкий Ю.Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн. — М: Наука, 1970. — 536 р.

[2] Диденко В.Б. О спектральных свойствах дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, определяемых линейным отношением / В.Б. Диденко // Математические заметки. — 2011. — Т. 89, № 2. — С. 226–240.

[3] Баскаков А.Г. Гармонический анализ линейных операторов / Воронеж: изд-во Воронежского государственного университета, 1987. — 165 с.

[4] Баскаков А.Г. Теория о расщеплении оператора и некоторые смежные вопросы аналитической теории возмущений / А.Г. Баскаков // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1986. — Т. 50, № 4. — С. 435–457.

[5] Баскаков А.Г. Спектральный анализ возмущённых неквазианалитических и спектральных операторов / А.Г. Баскаков // Известия Российской академии наук. Серия математическая. — 1994. — Т. 58, № 4. — С. 3–32.

[6] Баскаков А.Г. Метод подобных операторов и формулы и регуляризованных следов / А.Г. Баскаков // Изв. ВУЗов. Сер. матем. — 1984. — № 3. — С. 3–12.

[7] Баскаков А.Г. Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом / А.Г. Баскаков, А.В. Дербушев, А.О. Щербаков // Известия Российской академии наук. Серия математическая. — 2011. — Т. 75, № 3. — С. 4–28.

[8] Бурлуцкая М.Ш. Система Дирака с недифференцируемым потенциалом и периодическими краевыми условиями / М.Ш. Бурлуцкая, В.В. Корнев, А.П. Хромов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2012. — Т. 52, № 9. — С. 1621–1632.

[9] Бурлуцкая М.Ш. Уточненные асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций системы Дирака с недифференцируемым потенциалом / М.Ш. Бурлуцкая, В.П. Курдюмов, А.П. Хромов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2012. — № 12:3. — С. 22–30.

[10] Бурлуцкая М.Ш. Функционально-дифференциальные операторы с инволюцией и операторы Дирака с периодическими краевыми условиями / М.Ш. Бурлуцкая, А.П. Хромов // Доклады Академии наук. — 2014. — Т. 454, № 1. — С. 15–17.

[11] Романова Е.Ю. Метод подобных операторов в спектральном анализе дифференциального оператора с инволюцией / Е.Ю. Романова // Научные ведомости Белгородского государственного университета. — 2014. — Т. 176, № 5. — С. 73–78.

[12] Romanova E.Yu. Similar operators method in spectral analysis of Dirac's operator in the lebesgue spaces / E.Yu. Romanova // Spectral and evolution problems. — 2011. — Vol. 21, Iss. 2. — P. 185–186.

## REFERENCES

[1] Dalecky U., Krein M. Stability of solutions of differential equations in Banach spaces. [Daleckij Yu.L., Krejn M.G. Ustojchivost' reshenij differencial'nyx uravnenij v banaxovom prostranstve]. Moscow: Science, 1970, 536 p.

[2] Didenko V.B. The spectral properties of differential operators with unbounded operator coefficients determined by a linear relation. [Didenko V.B. O spektral'nyx svojstvax differencial'nyx operatorov s neogranichennymi operatornymi koe'fficientami, opredelyaemyx linejnym otnosheniem]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2011, vol. 89, iss. 2, pp. 226–240.

[3] Baskakov A.G. Harmonic analysis of linear operators. [Baskakov A.G. Garmonicheskij analiz linejnyx operatorov]. Voronezh, 1987, 165 p.

[4] Baskakov A.G. A theorem on splitting an operator, and some related questions in the analytic theory of perturbations. [Baskakov A.G. Teoriya o rasshheplenii operatora i nekotorye smezhnye voprosy analiticheskoj teorii vozmushhenij]. *Izv. AN SSSR. Ser. matem. — Math. USSR Izv.*, 1986, vol. 28, iss. 4, pp. 435–457.

[5] Baskakov A.G. Spectral analysis of perturbed nonquasianalytic and spectral operators. [Baskakov A.G. Spektral'nyj analiz vozmushhyonnyx nekvazianaliticheskix i spektral'nyx operatorov]. *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Seriya matematicheskaya — Izvestiya: Mathematics*, 1994, vol. 58, iss. 4, pp. 3–32.

[6] Baskakov A.G. The method of similar operators and formulas for regularized traces. [Baskakov A.G. Metod podobnyx operatorov i formuly i regulyarizovannyx sledov]. *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Seriya matematicheskaya — Izvestiya: Mathematics*, 1984, iss. 3, pp. 3–12.

[7] Baskakov A.G., Derbushev A.V., Shcherbakov A.O. The method of similar operators in the spectral analysis of non-self-adjoint Dirac operators with non-smooth potentials. [Baskakov A.G., Derbushev A.V., Shherbakov A.O. Metod podobnyx operatorov v spektral'nom analize nesamosopryazhennogo operatora Diraka s negladkim potencialom]. *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Seriya matematicheskaya — Izvestiya: Mathematics*, 2011, vol. 75, iss. 3, pp. 4–28.

[8] Burlutskaya M.S., Kornev V.V., Khromov A.P. Dirac system with non-differentiable potential and periodic boundary conditions. [Burluckaya M.Sh., Kornev V.V., Xromov A.P. Sistema Diraka s nedifferenciruemym potencialom i periodicheskimi kraevymi usloviyami]. *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki — Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2012, vol. 52, iss. 9, pp. 1621–1632.

[9] Burlutskaya M.S., Kurdyumov V.P., Khromov A.P. Refined asymptotic formulas for eigenvalues and eigenfunctions of the Dirac system with nondifferentiable potential. [Burluckaya M.Sh., Kurdyumov V.P., Xromov A.P. Utochnennye asimptoticheskie formuly dlya sobstvennyx znachenij i sobstvennyx funkcij sistemy Diraka s nedifferenciruemym potencialom]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika — Proceedings of the University of Saratov. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2012. vol. 12, iss. 3, pp. 22–30.

[10] Burlutskaya M.S., Khromov A.P. Functional-differential operators with involution and Dirac operators with periodic boundary conditions. [Burluckaya M.Sh., Xromov A.P. Funkcional'no-differencial'nye operatory s involyuciej i operatory Diraka s periodicheskimi kraevymi usloviyami]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2014, vol. 454, iss. 1, pp. 15–17.

[11] Romanova E. Yu. Method of similar operator in spectral analysis of differentional equation with involution. [Romanova E.Yu. Metod podobnyx operatorov v spektral'nom analize differencial'nogo operatora s involyuciej]. *Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta — Scientific statements of Belgorod State University*, 2014, vol. 176, iss. 5, pp. 73–78.

[12] Romanova E.Yu. Similar operators method in spectral analysis of Dirac's operator in the lebesgue spaces. Spectral and evolution problems, 2011, vol. 21, iss. 2, pp. 185–186.

*Романова Елена Юрьевна, аспирант кафедры Математических методов исследования операций факультета Прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия*
*E-mail: vsu.romanova@gmail.com*
*Тел.: +79092120452*

*Romanova Elena Yu., postgraduate student, subdepartment of Mathematical methods of operation research, department of Applied Mathematics, informatics and mechanics, Voronezh State University, Voronezh, Russia*
*E-mail: vsu.romanova@gmail.com*
*Tel.: +79092120452*