УДК 517.929.8

О ПРИЧИННОЙ ОБРАТИМОСТИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИМИСЯ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ЯДРАМИ

В. И. Кузнецова, В. Г. Курбатов

*Воронежский государственный технический университет,
Российская академия народного хозяйства и государственной службы
при Президенте Российской Федерации*

Поступила в редакцию 28.02.2014 г.

Аннотация: пусть $\mathbb{S}$ — фиксированный конус в $\mathbb{R}^n$. Оператор T, действующий в пространстве функций, заданных на $\mathbb{R}^n$, называют *причинным* (относительно конуса $\mathbb{S}$), если $(Tu)(x)$ определяется ограничением u на $x-\mathbb{S}$ для всех функций u и точек $x \in \mathbb{R}^n$. В случае, когда $\mathbb{S}$ — световой конус специальной теории относительности, свойство оператора T быть причинным означает, что поведение Tu в настоящем зависит только от поведения u в прошлом. Причинные операторы часто возникают в представлениях решений гиперболических уравнений в частных производных. Причинный оператор называют *причинно обратимым*, если обратный оператор существует и является причинным.

Пусть K — линейный причинный интегральный оператор. Доказано, что оператор $\mathbf{1}+K$ причинно обратим, если ядро K медленно меняется и операторы с ядрами, замороженными при достаточно больших значениях одного из аргументов, причинно обратимы.

Ключевые слова: причинный оператор, интегральный оператор, обратимость, банахова алгебра, световой конус.

ON CAUSAL INVERTIBILITY OF INTEGRAL OPERATORS WITH SLOWLY VARYING AT INFINITY KERNELS

V. I. Kuznetsova, V. G. Kurbatov

Abstract: let $\mathbb{S}$ be a fixed cone in $\mathbb{R}^n$. An operator T acting in a space of functions on $\mathbb{R}^n$ is called *causal* (with respect to the cone $\mathbb{S}$) if $(Tu)(x)$ is defined by the restriction of u to $x-\mathbb{S}$ for all functions u and points $x \in \mathbb{R}^n$. If $\mathbb{S}$ is the light cone of the special relativity theory then the property of an operator T to be causal means that the behaviour of Tu at the present depends only on the behaviour of u in the past. Causal operators often arise in the representations of solutions of hyperbolic partial differential equations. A causal operator is called *causally invertible* if the inverse operator exists and is causal.

Let K be a linear causal integral operator. It is proved that the operator $\mathbf{1}+K$ is causally invertible if the kernel of K varies slowly and the operators with kernels frozen at large values of one of its arguments are causally invertible.

Keywords: causal operator, integral operator, invertibility, Banach algebra, light cone.

Причинность означает, что прошлое не может зависеть от будущего. Это обстоятельство естественно учитывать при описании различных явлений, происходящих во времени. Оператор T называют причинным, если поведение Tu в любой текущий момент времени полностью определяется поведением u в прошлом. Настоящая статья посвящена многомерной причинности [1], [2], [3], [4], [5], порожденной некоторым замкнутым воспроизводящим конусом $\mathbb{S}$ в

$\mathbb{R}^n$. Многомерные причинные операторы возникают в ходе решения гиперболических уравнений в частных производных (в частности, причинность, проявляющаяся при использовании уравнений Максвелла, приводит к специальной теории относительности); при моделировании нелинейных одномерных причинных операторов с помощью рядов Вольтерры [6], [7], [8]; при исследовании смешанных функционально-дифференциальных уравнений [9], [10]; в теории уравнений с частными интегралами [11].

В статье рассматривается интегральный оператор вида

$$\big(Tu\big)(x) = u(x) + \int\limits_{x-\mathbb{S}} k(x,\xi)u(\xi)\,d\xi$$

в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$. Ядро k предполагается измеримым и допускающим суммируемую оценку (1), см. ниже. Символ $\mathbb{S}$ означает конус в $\mathbb{R}^n$. Предполагается, что ядро k медленно меняется. Это позволяет свести исследование некоторых свойств оператора T к проверке аналогичных свойств сверточных операторов, ядра которых получаются в результате “замораживания” ядра k. В случае дифференциальных уравнений эта идея является классической [12], [13], [14], [15]. Для интегральных операторов Фредгольма идея замораживания эксплуатировалась ранее в [16], а для разностных — в [17], [18]. По сравнению с [16] в настоящей статье рассматривается случай, когда функции принимают значения в бесконечномерном пространстве, и доказывается (теорема 4), что для причинной обратимости оператора T достаточно, чтобы причинно обратимыми были не все операторы с замороженными ядрами, а лишь операторы, соответствующие достаточно большим значениям x или ξ. Отметим также один специальный тип медленного изменения на бесконечности — стационарность на бесконечности [19], [20].

Близкие вопросы, связанные с причинной обратимостью, в одномерном случае ($n = 1$) изучались в [21], [22], [23], [24], [25], [26], [27]. Отметим также связь методов настоящей статьи с теорией предельных операторов [28], [29], [30].

1. КОНУСЫ В $\mathbb{R}^n$

Символами $\overline{E}$, E^0, $\mu(E)$ и χ_E обозначаются замыкание, внутренность, мера и характеристическая функция множества $E \subseteq \mathbb{R}^n$ соответственно.

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Замкнутое (в обычной топологии $\mathbb{R}^n$) подмножество $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{R}^n$ называют *конусом*, если $x_1 + x_2 \in \mathbb{S}$ для всех $x_1, x_2 \in \mathbb{S}$, и $\lambda x \in \mathbb{S}$ для всех $x \in \mathbb{S}$ и $\lambda \geqslant 0$, а также $\mathbb{S} \cap (-\mathbb{S}) = \{0\}$. Конус $\mathbb{S}$ называют *воспроизводящим*, если $\mathbb{S} - \mathbb{S} = \mathbb{R}^n$. *Сопряженным* (относительно стандартного скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в $\mathbb{R}^n$) к конусу $\mathbb{S}$ называют множество

$$\mathbb{S}^* = \{\, y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle \geqslant 0 \text{ для всех } x \in \mathbb{S} \,\}.$$

Пример 1. (a) Очевидно, $\mathbb{S} = [0, +\infty)$ — воспроизводящий конус в $\mathbb{R}$, при этом $\mathbb{S}^* = \mathbb{S}$.

(b) Аналогичным образом, $\mathbb{S} = \{\, (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n : t_1, t_2, \dots, t_n \geqslant 0 \,\}$ — воспроизводящий конус в $\mathbb{R}^n$, при этом $\mathbb{S}^* = \mathbb{S}$.

(c) Световой конус $\mathbb{S} = \{\, (t_0, t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^4 : t_0 \geqslant \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2} \,\}$ в $\mathbb{R}^4$ является воспроизводящим, при этом $\mathbb{S}^* = \mathbb{S}$.

Предложение 1.

(a) *Конус в $\mathbb{R}^n$ является воспроизводящим тогда и только тогда, когда он имеет непустую внутренность.*

(b) *Если конус $\mathbb{S}$ — воспроизводящий, то множество $\mathbb{S}^*$ является конусом.*

(c) $\mathbb{S}^{**}$ *совпадает с* $\mathbb{S}$. *В частности,* $\mathbb{S}^*$ *состоит не только из нуля.*

(d) *Пересечение конусов является конусом. Если* $\mathbb{S}_1 \subset \mathbb{S}_2$, *то* $\mathbb{S}_2^* \subset \mathbb{S}_1^*$.

(e) *Сопряженный к конусу является воспроизводящим.*

Доказательство. (a) Предположим, что конус $\mathbb{S}$ является воспроизводящим. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — базис в $\mathbb{R}^n$. Поскольку $\mathbb{S} - \mathbb{S} = \mathbb{R}^n$, элементы базиса можно представить в виде

$$e_i = e_i' - e_i'', \qquad i = 1, \dots, n,$$

где $e_i', e_i'' \in \mathbb{S}$. Нетрудно видеть, что векторы

$$g_0 = e_1'' + \dots + e_n'',$$
$$g_i = g_0 + e_i' - e_i'', \qquad i = 1, \dots, n,$$

лежат в конусе, а их выпуклая оболочка имеет непустую внутренность.

Обратно. Если конус содержит множество $x + U$, где U — симметричная (т.е. $U = -U$) окрестность нуля, то $\mathbb{S} - \mathbb{S}$ содержит $\lambda(x+U) - \lambda(x+U) = 2\lambda U$ для любого $\lambda > 0$. Очевидно, множества $2\lambda U$ покрывают $\mathbb{R}^n$. Тем самым $\mathbb{S} - \mathbb{S}$ покрывает $\mathbb{R}^n$.

(b) Очевидно, что $x + y \in \mathbb{S}^*$ для всех $x, y \in \mathbb{S}^*$, и $\lambda x \in \mathbb{S}^*$ для всех $x \in \mathbb{S}^*$ и $\lambda \geqslant 0$.

Покажем, что $\mathbb{S}^* \cap (-\mathbb{S}^*) = \{0\}$. Предположим противное: пусть существует $y \neq 0$ такой, что как $\langle x, y\rangle \geqslant 0$, так и $\langle x, -y\rangle \geqslant 0$ для всех $x \in \mathbb{S}$. В этом случае $\langle x, y\rangle = 0$ для всех $x \in \mathbb{S}$. Следовательно, конус $\mathbb{S}$ содержится в некотором собственном подпространстве пространства $\mathbb{R}^n$ и поэтому в силу (a) не может быть воспроизводящим.

(c) Очевидно, $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{S}^{**}$. Возьмем произвольный вектор $x_0 \in \mathbb{R}^n$, не принадлежащий конусу $\mathbb{S}$. По теореме Хана–Банаха [31, теорема 3.4] существует вектор $z \in \mathbb{R}^n$ такой, что $\langle x_0, z\rangle < 0$, и $\langle x, z\rangle \geqslant 0$ для всех $x \in \mathbb{S}$. Очевидно, $z \in \mathbb{S}^*$. Следовательно, $x_0 \notin \mathbb{S}^{**}$. Отсюда $\mathbb{S}^{**} \subseteq \mathbb{S}$.

(d) Очевидно.

(e) В силу (b) множество $\mathbb{S}^* - \mathbb{S}^*$ является подпространством. Предположим, что оно не совпадает с $\mathbb{R}^n$. Тогда по другому варианту теоремы Хана–Банаха [31, теорема 3.5] существует ненулевой вектор $x_0 \in \mathbb{R}^n$ такой, что $\langle x_0, y\rangle = 0$ для всех $y \in \mathbb{S}^*$. Но тогда в силу (c) как x_0, так и $-x_0$ принадлежат $\mathbb{S}$. Это противоречит условию $\mathbb{S} \cap (-\mathbb{S}) = \{0\}$. $\square$

2. ПРИЧИННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Пусть X и Y — банаховы пространства. Символом $\mathbf{B}(X, Y)$ будем обозначать множество всех линейных ограниченных операторов, действующих из X в Y. Если $X = Y$, будем использовать сокращенное обозначение $\mathbf{B}(X)$, а символом $\mathbf{1}$ обозначать тождественный оператор.

Пусть $\mathbb{E}$ — банахово пространство с нормой $|\cdot|$, а $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ — измеримое подмножество. Будем обозначать через $L_p(\Omega, \mathbb{E})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, банахово пространство классов совпадающих почти всюду измеримых функций $u : \Omega \to \mathbb{E}$, ограниченных по обычным нормам [32]. Символом $L_0(\Omega, \mathbb{E})$ обозначим подпространство пространства $L_\infty(\Omega, \mathbb{E})$, состоящее из функций u, обладающих свойством: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое компактное множество $K \subset \mathbb{R}^n$, что $\operatorname{ess\,sup}_{x \notin K} \|u(x)\| < \varepsilon$. Пространство $L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{E})$ будем сокращенно обозначать символом L_p. Ниже нам потребуется следующая лемма, описывающая важное свойство измеримых множеств.

Лемма 2 ([33, гл. 1, § 2, предложение 1]). *Пусть* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ — *измеримое подмножество. Тогда почти во всех точках* $\xi \in E$ *выполняется равенство*

$$\lim_{r \to +0} \frac{\mu\big(B(\xi, r) \cap E\big)}{\mu\big(B(\xi, r)\big)} = 1,$$

где $B(\xi, r)$ — *шар радиуса* r *с центром в* ξ.

Точки ξ, обладающие описанным в лемме 2 свойством, называют *точками плотности* множества E.

Предположим, что в $\mathbb{R}^n$ фиксирован (замкнутый) воспроизводящий конус $\mathbb{S}$. Для $a,b \in \mathbb{R}^n$ условимся писать $a \leqslant b$, если $b - a \in \mathbb{S}$. Обозначим через $\overline{\mathbb{R}}^n$ расширение $\mathbb{R}^n$ двумя несобственными элементами $+\infty$ и $-\infty$. Будем считать, что $-\infty \leqslant x \leqslant +\infty$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. В частности, $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$.

Оператор $T \in \mathbf{B}(L_p)$ называют *причинным* (*относительно конуса* $\mathbb{S}$), если для любых $u \in L_p$ и $x \in \mathbb{R}^n$

$$u(\xi) = 0, \quad \xi \in x - \mathbb{S}, \qquad \Rightarrow \qquad \big(Tu\big)(\xi) = 0, \quad \xi \in x - \mathbb{S}.$$

Причинность соответствует тому, что “настоящее” может зависеть только от “прошлого”. Множество всех причинных операторов $T \in \mathbf{B}(L_p)$ обозначим символом $\mathbf{B}^{\mathbb{S}}(L_p)$.

Для каждого $x \in \mathbb{R}^n$ обозначим через $(L_p)_x$ подпространство

$$(L_p)_x = \{\, u \in L_p : \, u(\xi) = 0 \text{ при почти всех } \xi \in x - \mathbb{S} \,\}.$$

Отметим, что $(L_p)_x$ изометрически изоморфно пространству $L_p\big(\mathbb{R}^n \setminus (x - \mathbb{S})\big)$. Положим $(L_p)_{-\infty} = L_p$ и $(L_p)_{+\infty} = \{0\}$. Подчеркнем, что

$$(L_p)_a \supseteq (L_p)_b \qquad \text{для всех } a \leqslant b. \tag{1}$$

Очевидно, причинность оператора $T \in \mathbf{B}(L_p)$ можно определить как выполнение условия

$$T(L_p)_x \subseteq (L_p)_x \qquad \text{для всех } x \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Отметим, что для $x = +\infty$ и $x = -\infty$ условие (2) выполнено для любого $T \in \mathbf{B}(L_p)$.

Понятие причинного оператора переносится на операторы, действующие в произвольном банаховом пространстве X, в котором выделено семейство $\{\, X_x \subseteq X : \, x \in \mathbb{R}^n \,\}$ замкнутых подпространств, обладающее свойством $X_a \subseteq X_b$ при $a \leqslant b$, называемое ниже *направлением*. Положим $X_{-\infty} = X$ и $X_{+\infty} = \{0\}$. Если X и Y — пара пространств с направлениями, то оператор $T \in \mathbf{B}(X,Y)$ называют *причинным*, если

$$TX_x \subseteq Y_x \qquad \text{для всех } x \in \mathbb{R}^n.$$

Множество всех причинных операторов $T \in \mathbf{B}(X,Y)$ обозначим символом $\mathbf{B}^{\mathbb{S}}(X,Y)$. Если $X = Y$, будем использовать сокращение $\mathbf{B}^{\mathbb{S}}(X)$.

Банаховы пространства X и X_1 с направлениями назовем *причинно изоморфными*, если существует ограниченный обратимый $\Theta : X \to X_1$, который отображает X_x на $(X_1)_x$ при всех $x \in \overline{\mathbb{R}}^n$. Пусть X, Y, X_1 и Y_1 — пространства с направлениями. Операторы $T : X \to Y$ и $T_1 : X_1 \to Y_1$ будем называть *причинно подобными*, если существуют причинные изоморфизмы $\Theta_X : X \to X_1$ и $\Theta_Y : Y \to Y_1$ такие, что $\Theta_Y T = T_1 \Theta_X$, т.е. диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\Theta_X"'] & Y \arrow[d, "\Theta_Y"] \\ X_1 \arrow[r, "T_1"] & Y_1 \end{tikzcd}$$

коммутативна. Как правило, мы не будем различать причинно изоморфные пространства, а также причинно подобные операторы.

Пусть X — банахово пространство с направлением. Для каждого подмножества $A \subseteq \mathbb{R}^n$ рассмотрим подпространство

$$X_A = \{\, u \in X :\, u \in X_x \text{ для всех } x \in A \,\}. \tag{3}$$

Иными словами, $X_A = \cap_{x \in A} X_x$. Поэтому подпространство X_A замкнуто. Очевидно, для каждого оператора $T \in \mathbf{B}^{\mathbb{S}}(X, Y)$

$$TX_A \subseteq Y_A \qquad \text{для всех } A \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Отметим, что $(L_p)_{\{x\}} = (L_p)_x$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, а также $(L_p)_\varnothing = L_p$ и $(L_p)_{\mathbb{R}^n} = \{0\}$.

Предложение 3. *Пусть $A \subseteq \mathbb{R}^n$ — произвольное подмножество. Тогда замыкание $\overline{A + \mathbb{S}}$ множества $A+\mathbb{S}$ (множества $A-\mathbb{S}$) отличается от внутренности $(A+\mathbb{S})^0$ множества $A+\mathbb{S}$ (множества $A-\mathbb{S}$) на множество меры ноль. В частности, множество $A+\mathbb{S}$ (множество $A-\mathbb{S}$) измеримо.*

Доказательство. Зафиксируем x_0, принадлежащий внутренности $\mathbb{S}^0$ конуса $\mathbb{S}$. Это значит, что $x_0 + U \subseteq \mathbb{S}$ для некоторой открытой окрестности U нуля.

Покажем, что внутренность множества $-x_0 + A + \mathbb{S}$ содержит замыкание множества $A + \mathbb{S}$. Возьмем произвольный $x \in A + \mathbb{S}$ и покажем вначале, что $x + U \subseteq -x_0 + A + \mathbb{S}$. Для любого $u \in U$ имеем тождество $x + u = -x_0 + x + x_0 + u$. По предположению $-x_0 + x \in -x_0 + A + \mathbb{S}$, а $x_0 + u \in \mathbb{S}$. Отсюда следует, что $x + u = (-x_0 + x) + (x_0 + u) \in -x_0 + A + \mathbb{S} + \mathbb{S} = -x_0 + A + \mathbb{S}$. Итак, каждая точка $x \in A+\mathbb{S}$ содержится в $-x_0 + A + \mathbb{S}$ вместе с окрестностью $x + U$, причем U не зависит от x. Отсюда вытекает, что замыкание $A + \mathbb{S}$ включено в $-x_0 + A + \mathbb{S}$. В качестве следствий отметим, что множества $-tx_0 + A + \mathbb{S}$, $t \in \mathbb{R}$, монотонно зависят от $t \in \mathbb{R}$ и что замыкание $\overline{A + \mathbb{S}}$ множества $A + \mathbb{S}$ содержится в $\bigcap_{t>0} (-tx_0 + A + \mathbb{S})^0 = \bigcap_{t>0} \big[-tx_0 + (A + \mathbb{S})^0\big]$.

Пусть $K \subseteq \mathbb{R}^n$ — произвольное компактное множество. Рассмотрим функцию

$$h(t) = \mu\big[\big(-tx_0 + (A + \mathbb{S})^0\big) \cap K\big], \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Представим функцию h в виде

$$h(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \chi_{-tx_0 + (A+\mathbb{S})^0}(x) \chi_K(x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \chi_{(A+\mathbb{S})^0}(x + tx_0) \chi_K(x)\, dx, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Поскольку свертка функции $\chi_{(A+\mathbb{S})^0} \in L_\infty$ с функцией $\chi_K \in L_1$ является непрерывной функцией, функция h непрерывна. Из доказанного выше включения $\overline{A + \mathbb{S}} \subseteq (-tx_0 + A + \mathbb{S})^0$ при $t > 0$ имеем неравенство

$$\mu\big((\overline{A + \mathbb{S}}) \cap K\big) \leqslant \mu\big((-tx_0 + A + \mathbb{S})^0 \cap K\big).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $t \to +0$, получаем

$$\mu\big((\overline{A + \mathbb{S}}) \cap K\big) \leqslant \mu\big((A + \mathbb{S})^0 \cap K\big).$$

В силу произвольности K отсюда следует, что $\mu\big(\overline{A + \mathbb{S}} \setminus (A + \mathbb{S})^0\big) = 0$. $\square$

Следствие 4. *Для любого $A \subseteq \mathbb{R}^n$ имеем*

$$\begin{aligned}(L_p)_A &= \{\, u \in L_p :\, u(\xi) = 0 \text{ при почти всех } \xi \in A - \mathbb{S} \,\} = \\ &= \{\, u \in L_p :\, u(\xi) = 0 \text{ при почти всех } \xi \in (A - \mathbb{S})^0 \,\} = \\ &= \{\, u \in L_p :\, u(\xi) = 0 \text{ при почти всех } \xi \in \overline{A - \mathbb{S}} \,\}.\end{aligned}$$

Доказательство. Три множества, перечисленные в формулировке, совпадают в силу предложения 3.

Очевидно, если $u(\xi)=0$ для почти всех $\xi\in A-\mathbb{S}$, то u принадлежит $(L_p)_A$ в смысле определения (3).

Обратно, пусть u принадлежит $(L_p)_A$ в смысле определения (3), т.е. при любом $x\in A$ имеем $u(\xi)=0$ при почти всех $\xi\in x-\mathbb{S}$. Покажем, что $u(\xi)=0$ для почти всех $\xi\in A-\mathbb{S}$. Предположим противное: пусть множество E тех точек $\xi\in A-\mathbb{S}$, в которых $u(\xi)\neq 0$, имеет ненулевую меру. Пусть $\xi_0\in E$ — точка плотности множества E. По предположению $\xi_0\in x_0-\mathbb{S}$, где $x_0\in A$. Поскольку $\mathbb{S}$ — конус, из $\xi_0\in x_0-\mathbb{S}$ следует, что $\xi_0-\mathbb{S}\subseteq x_0-\mathbb{S}$. В то же время, поскольку $\mathbb{S}$ имеет непустую внутренность (предложение 1(a)),

$$\lim_{r\to+0}\frac{\mu\big(B(\xi_0,r)\cap(\xi_0-\mathbb{S})\big)}{\mu\big(B(\xi_0,r)\big)}\neq 0.$$

Следовательно, пересечение множеств E и $\xi_0-\mathbb{S}$ имеет ненулевую меру. Тогда и пересечение множеств E и $x_0-\mathbb{S}$ имеет ненулевую меру. Но по предположению $u(\xi)=0$ при почти всех $\xi\in x_0-\mathbb{S}$. Это противоречит определению E. $\square$

Предложение 5. *Пусть $g\in\mathbb{S}^*$, $g\neq 0$. Для каждого $\tau\in\mathbb{R}$ множество*

$$(L_p)_{[\tau,+\infty]_g}=\{\,u\in L_p:\ u(x)=0 \text{ для почти всех } x \text{ таких, что } \langle x,g\rangle\leqslant\tau\,\}$$

совпадает с $(L_p)_{\widetilde{A}}$, где $\widetilde{A}=\{\,y\in\mathbb{R}^n:\ \langle y,g\rangle=\tau\,\}$ — гиперплоскость, а также с $(L_p)_A$, где $A=\{\,y\in\mathbb{R}^n:\ \langle y,g\rangle\leqslant\tau\,\}$ — полупространство.

Доказательство. Покажем, что множество x таких, что $\langle x,g\rangle\leqslant\tau$ совпадает с множествами $\widetilde{A}-\mathbb{S}$ и $A-\mathbb{S}$.

Пусть $x\in A-\mathbb{S}$. Это значит, что для некоторого y, обладающего свойством $\langle y,g\rangle\leqslant\tau$, имеет место включение $x\in y-\mathbb{S}$. Тогда в силу определения сопряженного конуса $\langle x,g\rangle\leqslant\langle y,g\rangle\leqslant\tau$.

Пусть x удовлетворяет неравенству $\langle x,g\rangle\leqslant\tau$. Возьмем произвольный $s\in\mathbb{S}$ такой, что $\langle s,g\rangle=\tau-\langle x,g\rangle$ (если таких s нет, то конус $\mathbb{S}$ содержится в подпространстве $\{\,z\colon\langle z,g\rangle=0\,\}$ и, следовательно, не может быть воспроизводящим). Положим $y=x+s$ и представим x в виде $x=y-s$. Очевидно, что $\langle y,g\rangle=\langle x,g\rangle+\langle s,g\rangle=\tau$, т.е. $y\in\widetilde{A}$. Следовательно, $x\in\widetilde{A}-\mathbb{S}$.

Вложение $\widetilde{A}-\mathbb{S}\subseteq A-\mathbb{S}$ очевидно. $\square$

Пусть X — банахово пространство с направлением. Для каждого подмножества $B\subseteq\mathbb{R}^n$ обозначим через $X_{[\varnothing,B]}$ фактор-пространство X/X_B, а через $Q_B:\ X\to X_{[\varnothing,B]}$ — каноническую проекцию. Далее, для любых $A\subseteq B\subseteq\mathbb{R}^n$ обозначим через $X_{[A,B]}$ фактор-пространство X_A/X_B. Очевидно, $X_{[A,B]}$ канонически изоморфно образу подпространства $X_A\subseteq X$ в $X_{[\varnothing,B]}$ при действии канонической проекции Q_B. Пространство $X_{[A,\mathbb{R}^n]}=X_A/X_{\mathbb{R}^n}=X_A/\{0\}$ отождествим с X_A.

Для $g\in\mathbb{S}^*$, $g\neq 0$, и $\alpha\leqslant\beta$, $\alpha,\beta\in\overline{\mathbb{R}}$, вместо $X_{[A,B]}$ с $A=\{\,s\in\mathbb{R}^n:\ \langle s,g\rangle\leqslant\alpha\,\}$ и $B=\{\,s\in\mathbb{R}^n:\ \langle s,g\rangle\leqslant\beta\,\}$ (см. предложение 5) будем использовать обозначение $X_{[\alpha,\beta]_g}$.

Предложение 6. *Для любых $A\subseteq B\subseteq\mathbb{R}^n$ существует изометрический причинный изоморфизм*

$$\Theta_A^B:\ (L_p)_{[A,B]}\to(L_p)_A^B$$

пространств $(L_p)_{[A,B]}=(L_p)_A/(L_p)_B$ и

$$(L_p)_A^B=\{\,u\in L_p:\ u(x)=0 \text{ для почти всех } x\notin(B-\mathbb{S})\setminus(A-\mathbb{S})\,\}.$$

Доказательство. Как уже отмечалось в следствии 4,

$$(L_p)_A = \{\, u \in L_p : u(x) = 0 \text{ для почти всех } x \in A - \mathbb{S} \,\}.$$

Очевидно,

$$L_p = (L_p)_A \oplus (L_p)^A,$$

где

$$(L_p)^A = \{\, u \in L_p : u(x) = 0 \text{ для почти всех } x \notin A - \mathbb{S} \,\}.$$

Поскольку $A - \mathbb{S} \subseteq B - \mathbb{S}$, подпространство $(L_p)_A$ можно разложить в прямую сумму

$$(L_p)_A = (L_p)_B \oplus (L_p)_A^B.$$

Поэтому $(L_p)_{[A,B]}$ канонически (изометрически и причинно) изоморфно $(L_p)_A^B$. □

Пусть X и Y — банаховы пространства с направлениями. Пусть $T \in \mathbf{B}^{\mathbb{S}}(X,Y)$, а $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n$ — произвольные подмножества. Обозначим через $T_A : X_A \to Y_A$ ограничение T на X_A; через $T_{[\varnothing,B]} : X_{[\varnothing,B]} \to Y_{[\varnothing,B]}$ — фактор-оператор $T_{[\varnothing,B]}(u + X_B) = Tu + Y_B$, $u \in X$, порожденный T; а через $T_{[A,B]} : X_{[A,B]} \to Y_{[A,B]}$ — фактор-оператор $T_{[A,B]}(u + X_B) = T_A u + (X)_B$, $u \in X_A$, порожденный $T_A : X_A \to Y_A$. Оператор $T_{[A,B]}$ будем называть *ограничением T на $[A,B]$*.

Обозначения типа $T_{[\alpha,\beta]_g} : X_{[\alpha,\beta]_g} \to Y_{[\alpha,\beta]_g}$ для $\alpha \leqslant \beta$, $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$ и $g \in \mathbb{S}^*$, $g \neq 0$, имеют очевидный смысл.

Предложение 7. *Пусть X и Y — банаховы пространства с направлениями, $T \in \mathbf{B}^{\mathbb{S}}(X,Y)$, а $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n$ — произвольные подмножества. Тогда*

$$\|T_{[A,B]}\| \leqslant \|T\|.$$

Доказательство. Это известное свойство фактор-оператора. □

Предложение 8 ([24, предложение 5])**.** *Пусть $A \subseteq C \subseteq D \subseteq B$; $A, B, C, D \subseteq \mathbb{R}^n$.*

(a) *Пусть X — пространство с направлением. Тогда пространства $(X_{[A,B]})_{[C,D]}$ и $X_{[C,D]}$ причинно изоморфны.*

(b) *Пусть X и Y — банаховы пространства с направлениями, а $T \in \mathbf{B}^{\mathbb{S}}(X,Y)$. Тогда операторы $(T_{[A,B]})_{[C,D]}$ и $T_{[C,D]}$ причинно подобны.*

Очевидно, для фиксированного $A \subseteq \mathbb{R}^n$ семейство подпространств $\{\, X_x \cap X_A : x \in \overline{\mathbb{R}}^n \,\}$ образует направление в пространстве X_A. Аналогичным образом естественные проекции подпространств X_x в $X_{[\varnothing,B]}$ (при условии, что они замкнуты) образуют направление в $X_{[\varnothing,B]}$. Наконец, естественные проекции подпространств $X_x \cap X_A$ в $X_{[A,B]} = X_A / X_B$ образуют направление в $X_{[A,B]}$.

Пусть $T \in \mathbf{B}^{\mathbb{S}}(X)$, а $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n$. Очевидно,

$$T_{[A,B]}\,(X_{[A,B]})_x \subseteq (X_{[A,B]})_x, \qquad x \in \overline{\mathbb{R}}^n.$$

Иными словами, $T_{[A,B]}$ также является причинным.

Предложение 9 ([24, предложение 4])**.** *Пусть X, Y и Z — банаховы пространства с направлениями, а $T \in \mathbf{B}^{\mathbb{S}}(X,Y)$ и $R \in \mathbf{B}^{\mathbb{S}}(Y,Z)$. Тогда $RT \in \mathbf{B}^{\mathbb{S}}(X,Z)$, причем*

$$(RT)_{[A,B]} = R_{[A,B]}\,T_{[A,B]} \qquad \text{для любых } A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n.$$

3. ПРИЧИННАЯ ОБРАТИМОСТЬ

Пусть X и Y — банаховы пространства с направлениями. Оператор $T \in \mathbf{B}^{\mathbb{S}}(X,Y)$ назовем *причинно обратимым*, если оператор T^{-1} существует и также является причинным. Если X и Y — нулевые пространства, будем считать, что (единственный) оператор $0 \in \mathbf{B}^{\mathbb{S}}(X,Y)$ причинно обратим. Естественным образом определим одностороннюю причинную обратимость.

Отметим, что согласно определению пространства X и X_1 с направлениями причинно изоморфны тогда и только тогда, когда связывающий их изоморфизм $\Theta : X \to X_1$ является причинно обратимым оператором.

Множество $\mathbf{B}^{\mathbb{S}}(X)$ всех причинных операторов образует замкнутую подалгебру в алгебре $\mathbf{B}(X)$ всех линейных ограниченных операторов, действующих в X. В этом случае причинная обратимость — это обратимость в алгебре $\mathbf{B}^{\mathbb{S}}(X)$. Причинная обратимость не совпадает с обычной. Действительно, пусть $h \in \mathbb{S}$, но $-h \notin \mathbb{S}$; тогда оператор сдвига $\big(Sx\big)(t) = x(t-h)$ обратим, но обратный к нему $\big(S^{-1}x\big)(t) = x(t+h)$ причинным уже не является. Причинная обратимость оператора T тесно связана [21], [22], [23], [24] с устойчивостью уравнения $Tx = f$.

Пусть $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n$. Будем говорить, что оператор $T \in \mathbf{B}^{\mathbb{S}}(X,Y)$ *причинно обратим на* $[A,B]$, если причинно обратим оператор $T_{[A,B]} : X_{[A,B]} \to Y_{[A,B]}$.

Для $g \in \mathbb{S}^*$, $g \neq 0$, и $\alpha \leqslant \beta$, $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$, будем говорить, что оператор $T \in \mathbf{B}^{\mathbb{S}}(X,Y)$ *причинно обратим на* $[\alpha,\beta]_g$, если причинно обратим оператор $T_{[\alpha,\beta]_g} : X_{[\alpha,\beta]_g} \to Y_{[\alpha,\beta]_g}$.

Предложение 10. *Пусть $A \subseteq C \subseteq D \subseteq B$; $A,B,C,D \subseteq \mathbb{R}^n$. Пусть X и Y — банаховы пространства с направлениями, а $T \in \mathbf{B}^{\mathbb{S}}(X,Y)$. Тогда из причинной обратимости оператора T на $[A,B]$ слева (справа) следует причинная обратимость оператора T на $[C,D]$ слева (справа). При этом $\|(T_{[C,D]})^{-1}\| \leqslant \|(T_{[A,B]})^{-1}\|$.*

Доказательство. Вытекает из предложений 9 и 7. □

Теорема 1 ([2, теорема 12]). *Пусть $T : X \to Y$ — причинный оператор, а множества $A, B, E_k \subseteq \mathbb{R}^n$, $k = 0,1,\dots,m$, удовлетворяют условию $A = E_0 \subseteq E_1 \subseteq \dots \subseteq E_m = B$. В этом случае оператор T причинно обратим на $[A,B]$ тогда и только тогда, когда он причинно обратим на каждом $[E_{k-1}, E_k]$, $k = 1,2,\dots,m$.*

Предложение 11. *Пусть X — банахово пространство с направлением и $T \in \mathbf{B}^{\mathbb{S}}(X)$. Если*

$$\|T\| < 1,$$

то оператора $\mathbf{1} - T$ причинно обратим.

Доказательство. Доказательство вытекает из формулы К. Неймана

$$(\mathbf{1} - T)^{-1} = \mathbf{1} + T + T^2 + \dots . \quad \square$$

4. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРИЧИННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Основной пример причинного оператора, рассматриваемого в настоящей статье, — интегральный оператор (4). Интегральные причинные операторы (по большей части в случае $n = 1$) обычно называют интегральными операторами Вольтерра.

Предложение 12. *Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$ или $p = 0$.*

(a) ([24, предложение 5.4.3]) *Пусть $k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbf{B}(\mathbb{E})$ — измеримая функция и для некоторой $\beta_k \in L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ выполнена оценка*

$$\|k(x,\xi)\| \leqslant \beta_k(x - \xi) \qquad \text{для почти всех } (x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Тогда для любого $u \in L_p$ интеграл

$$\big(Ku\big)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} k(x,\xi)\, u(\xi)\, d\xi, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

существует при почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ и определяет функцию $Ku \in L_p$. При этом

$$\|K:\, L_p \to L_p\| \leqslant \|\beta_k\|_{L_1}. \tag{3}$$

(b) *Для того чтобы оператор* (2) *был причинным, необходимо и достаточно, чтобы $\beta_k(y) = 0$ при $y \notin \mathbb{S}$ или, что равносильно, $k(x,\xi) = 0$ при почти всех (x,ξ) таких, что $x - \xi \notin \mathbb{S}$. При этом формула* (2)*, определяющая K, приобретает вид*

$$\big(Ku\big)(x) = \int\limits_{x-\mathbb{S}} k(x,\xi)\, u(\xi)\, d\xi, \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

(c) *Обратимость* (*причинная обратимость*) *оператора $\mathbf{1} + K$, где K задан формулой* (2) (*формулой* (4)) *не зависит от p.*

Доказательство. (b) Предположим, что оператор K является причинным. Покажем, что $k(x,\xi) = 0$ при п.в. $x - \xi \notin \mathbb{S}$.

Прежде всего заметим, что множество пар (x,ξ), для которых $x-\xi \notin \mathbb{S}$, открыто, поскольку оно является прообразом открытого множества $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{S}$ при непрерывном отображении $(x,\xi) \mapsto x-\xi$. Возьмем произвольные точки x и ξ, удовлетворяющие условию $x - \xi \notin \mathbb{S}$, и выберем их компактные окрестности W и V соответственно так, чтобы $(W - V) \cap \mathbb{S} = \varnothing$.

Покажем, что $(W-\mathbb{S}) \cap V = \varnothing$. Действительно, в противном случае для некоторых $w \in W$, $s \in \mathbb{S}$ и $v \in V$ выполнялось бы равенство $w - s = v$ или $w - v = s$, что противоречит предположению $(W - V) \cap \mathbb{S} = \varnothing$.

Пусть функция $u \in L_p$ равна нулю п.в. вне V. Тогда по доказанному она тем более равна нулю п.в. на $W-\mathbb{S}$. Отсюда в силу причинности оператора K функция Ku также равна нулю п.в. на $W - \mathbb{S}$. В частности, Ku равна нулю п.в. на W.

Обозначим через $\mathbb{E}^*$ сопряженное к $\mathbb{E}$ пространство. По доказанному для любых ограниченных измеримых функций $u:\, \mathbb{R}^n \to \mathbb{E}$ и $z:\, \mathbb{R}^n \to \mathbb{E}^*$, равных нулю вне V и W соответственно, имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \big\langle \big(Ku\big)(x), z(x) \big\rangle\, dx = 0,$$

где символ $\langle e, e^* \rangle$ означает результат применения функционала $e^* \in \mathbb{E}^*$ к вектору $e \in \mathbb{E}$. Отсюда

$$\int\limits_W \int\limits_V \big\langle k(x,\xi) u(\xi), z(x) \big\rangle\, d\xi\, dx = 0$$

для любых ограниченных измеримых функций $u:\, V \to \mathbb{E}$ и $z:\, W \to \mathbb{E}^*$.

Возьмем произвольные $e \in \mathbb{E}$ и $e^* \in \mathbb{E}^*$. Очевидно, из последнего равенства вытекает, что

$$\iint\limits_{W \times V} \big\langle k(x,\xi)e, e^* \big\rangle u(\xi) z(x)\, d\xi\, dx = 0$$

для любых ограниченных измеримых функций $u:\, V \to \mathbb{C}$ и $z:\, W \to \mathbb{C}$. Как следствие, для любых последовательностей $u_i:\, V \to \mathbb{C}$ и $z_i:\, W \to \mathbb{C}$ имеем

$$\iint\limits_{W \times V} \big\langle k(x,\xi)e, e^* \big\rangle \sum_{i=1}^{\infty} u_i(\xi) z_i(x)\, d\xi\, dx = 0$$

при условии, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty}\|\langle k(\cdot,\cdot)e,e^*\rangle u_i(\cdot)z_i(\cdot)\|_{L_1}$ сходится. Нам потребуется только один частный случай этой формулы. Пусть B — открытый шар радиуса r с центром в точке (x_0,ξ_0), а χ_B — его характеристическая функция. Очевидно, B можно представить в виде объединения счетного числа прямоугольных (т.е. имеющих вид $[a_1,b_1]\times\dots\times[a_{2n},b_{2n}]$) множеств, пересечения которых друг с другом имеют меру ноль. Поэтому из предыдущей формулы вытекает, что

$$\iint\limits_{W\times V}\big\langle k(x,\xi)e,e^*\big\rangle\chi_B(x,\xi)\,d\xi\,dx=0.$$

Покажем, что функция k п.в. на $W\times V$ равна нулю. Предположим противное: пусть

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in W,\,\xi\in V}\|k(x,\xi)\|=C>0.$$

Возьмем произвольное $\varepsilon>0$. По определению существенного супремума множество N_1 точек $(x,\xi)\in W\times V$, в которых $\|k(x,\xi)\|\geqslant C-\varepsilon$, имеет некоторую ненулевую меру $\delta>0$. С другой стороны, в силу критерия измеримости Лузина [32, гл. 4, § 5, предложение 1] найдется компактное множество $N_2\subseteq W\times V$ такое, что сужение функции k на N_2 непрерывно, а мера N_2 отличается от меры $W\times V$ не более, чем на $\delta/2$. Положим $N_3=N_1\cap N_2$. Очевидно, N_3 — множество ненулевой меры.

Пусть $(x_0,\xi_0)\in N_3$ — точка плотности множества N_3. Выберем $e\in\mathbb{E}$ и $e^*\in\mathbb{E}^*$ так, чтобы

$$\big\langle k(x_0,\xi_0)e,e^*\big\rangle\geqslant C-2\varepsilon.$$

Обозначим через $B=B(x_0,\xi_0;r)$ шар с центром в точке (x_0,ξ_0) настолько малого радиуса r, что

$$\operatorname{Re}\big\langle k(x,\xi)e,e^*\big\rangle\geqslant C-3\varepsilon,\qquad (x,\xi)\in B\cap N_3.$$

Пусть $\chi_B: V\times W\to\mathbb{C}$ — характеристическая функция B. Тогда

$$\begin{aligned}0&=\Bigg|\iint\limits_{W\times V}\big\langle k(x,\xi)e,e^*\big\rangle\chi_B(x,\xi)\,d\xi\,dx\Bigg|=\Bigg|\iint\limits_{B}\big\langle k(x,\xi)e,e^*\big\rangle\,d\xi\,dx\Bigg|\geqslant\\&\geqslant\iint\limits_{B\cap N_3}\operatorname{Re}\big\langle k(x,\xi)e,e^*\big\rangle\,d\xi\,dx-\Bigg|\iint\limits_{B\setminus N_3}\big\langle k(x,\xi)e,e^*\big\rangle\,d\xi\,dx\Bigg|\geqslant\\&\geqslant(C-3\varepsilon)\mu(B\cap N_3)-C\mu(B\setminus N_3).\end{aligned}$$

В силу леммы 2 отношение $\frac{\mu(B\setminus N_3)}{\mu(B\cap N_3)}$ при $r\to0$ стремится к нулю. Поэтому при достаточно малых r и ε правая часть последней оценки строго больше нуля. Это противоречие показывает, что функция k п.в. на $W\times V$ равна нулю.

В силу выбора W и V отсюда следует, что $k(x,\xi)=0$ при п.в. $x-\xi\notin\mathbb{S}$.

Обратное утверждение (о том, что из $\beta_k(y)=0$ при $y\notin\mathbb{S}$ следует причинность оператора K) очевидно.

(c) Для обычной обратимости утверждение вытекает из теоремы 1.1 и предложения 2.1 статьи [34]. Для перехода к причинной обратимости следует воспользоваться утверждением (b). □

Предложение 13. *Пусть причинный оператор K задан формулой* (2). *Изоморфизм Θ_A^B из предложения 6 устанавливает причинное изометрическое подобие оператора $K_{[A,B]}$ оператору*

$$\big(K_A^B\,u\big)(x)=\int\limits_{(B-\mathbb{S})\setminus(A-\mathbb{S})}k(x,\xi)\,u(\xi)\,d\xi,\qquad x\in(B-\mathbb{S})\setminus(A-\mathbb{S}),$$

действующему в $(L_p)_A^B$ *(см. определение* $(L_p)_A^B$ *в предложении 6). При этом*

$$\|K_{[A,B]}\| = \|K_A^B\| \leqslant \int\limits_{\big[(B-\mathbb{S})\setminus(A-\mathbb{S})\big]-\big[(B-\mathbb{S})\setminus(A-\mathbb{S})\big]} \beta_k(s)\,ds. \tag{5}$$

Доказательство. Оператор $K_A^B : (L_p)_A^B \to (L_p)_A^B$ определим как дополняющий диаграмму

$$\begin{tikzcd}
(L_p)_{[A,B]} \arrow[r, "K_{[A,B]}"] \arrow[d, "\Theta_A^B"'] & (L_p)_{[A,B]} \arrow[d, "\Theta_A^B"] \\
(L_p)_A^B \arrow[r, "K_A^B"] & (L_p)_A^B
\end{tikzcd}$$

до коммутативной. Очевидно, K_A^B можно представить в виде

$$\big(K_A^B\,u\big)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \chi_{(B-\mathbb{S})\setminus(A-\mathbb{S})}(x) k(x,\xi) \chi_{(B-\mathbb{S})\setminus(A-\mathbb{S})}(\xi)\, u(\xi)\, d\xi, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Поэтому функцию β_k в оценке (1) можно переопределить как ноль на дополнении к множеству $\big[(B-\mathbb{S})\setminus(A-\mathbb{S})\big]-\big[(B-\mathbb{S})\setminus(A-\mathbb{S})\big]$. Отсюда в силу оценки (3) получаем оценку (5). $\square$

Следствие 14. *Пусть оператор* K *задан формулой* (4). *Пусть* $g \in \mathbb{S}^*$, $g \neq 0$. *Тогда для любых* $\alpha \leqslant \beta$, $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$ *оператор* $K_{[\alpha,\beta]_g}$ *причинно подобен оператору*

$$\big(K_\alpha^\beta\, u\big)(x) = \int\limits_{\alpha \leqslant \langle \xi, g\rangle < \beta} k(x,\xi)\, u(\xi)\, d\xi, \qquad \alpha \leqslant \langle x, g\rangle < \beta,$$

действующему в $(L_p)_\alpha^\beta = \{\, u \in L_p : u(x) = 0$ *для почти всех* $\alpha \leqslant \langle x, g\rangle < \beta \,\}$.

Следствие 15. *Пусть оператор* K *задан формулой* (4). *Пусть* $g \in \mathbb{S}^*$, $g \neq 0$. *Тогда для любых* $\alpha \leqslant \beta$, $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$,

$$\|K_{[\alpha,\beta]_g}\| \leqslant \int\limits_{\{\, s:\, -(\beta-\alpha) < \langle s, g\rangle < \beta-\alpha \,\}} \beta_k(s)\, ds.$$

Доказательство. В силу следствия 14 имеем

$$\|K_{[\alpha,\beta]_g}\| \leqslant \int\limits_{\{\, s:\, \alpha \leqslant \langle s,g\rangle < \beta \,\} - \{\, s:\, \alpha \leqslant \langle s,g\rangle < \beta \,\}} \beta_k(s)\, ds = \int\limits_{\{\, s:\, -(\beta-\alpha) < \langle s, g\rangle < \beta-\alpha \,\}} \beta_k(s)\, ds. \quad \square$$

Предложение 16. *Пусть оператор* K *задан формулой* (4). *Пусть* $g \in \mathbb{S}^*$, $g \neq 0$. *Тогда для любых* $\alpha \leqslant \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *оператор* $\mathbf{1} + K$ *причинно обратим на* $[\alpha, \beta]_g$.

Доказательство. Возьмем некоторое $\delta > 0$ и рассмотрим разбиение $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_m = \beta$ отрезка $[\alpha, \beta]$, в котором $t_i - t_{i-1} < \delta$ для всех $i = 1, 2, \dots, m$. В силу следствия 15 имеем

$$\|K_{[t_{i-1},t_i]_g}\| \leqslant \int\limits_{\{\, s:\, -\delta < \langle s,g\rangle < \delta \,\}} \beta_k(s)\, ds.$$

В силу [32, гл. IV, § 4, п. 5, следствие предложения 7] интеграл $\int_{\{\, s:\, -\delta < \langle s,g\rangle < \delta \,\}} \beta_k(s)\, ds$ стремится к нулю при $\delta \to 0$. Тем самым можно выбрать $\delta > 0$ так, чтобы

$$\|K_{[t_{i-1},t_i]_g}\| < 1, \qquad i = 1, 2, \dots, m.$$

В силу предложения 11 оператор $\mathbf{1}+K$ причинно обратим на $[t_{i-1}, t_i]_g$ при всех $i = 1, 2, \dots, m$. Отсюда по теореме 1 следует причинная обратимость на $[\alpha, \beta]_g$. $\square$

Лемма 17.

(a) *Если линейный оператор T имеет двусторонний обратный, то любой его односторонний обратный совпадает с T^{-1}.*

(b) *Если оператор $T \in \mathbf{B}(X)$, где X — банахово пространство, обратим слева, то его образ замкнут.*

Доказательство. (a) Пусть T_l^{-1} — левый обратный. Тогда, умножая тождество $T_l^{-1}T = \mathbf{1}$ справа на T^{-1}, получаем $T_l^{-1} = T^{-1}$. Случай правосторонней обратимости разбирается аналогично.

(b) Пусть T_l^{-1} — левый обратный. Из тождества $T_l^{-1}T = \mathbf{1}$ имеем оценку $\|x\| = \|T_l^{-1}Tx\| \leqslant \|T_l^{-1}\| \cdot \|Tx\|$, откуда $\|Tx\| \geqslant \frac{\|x\|}{\|T_l^{-1}\|}$. Последнее неравенство влечет замкнутость образа оператора T. □

Теорема 2. *Пусть оператор K задан формулой (4), $g \in \mathbb{S}^*$, $g \neq 0$, и $\gamma \in \mathbb{R}$. Если оператор $T = \mathbf{1} + K$ односторонне причинно обратим на $[-\infty, \gamma]_g$ (на $[\gamma, +\infty]_g$), то он и двусторонне причинно обратим на $[-\infty, \gamma]_g$ (на $[\gamma, +\infty]_g$).*

Доказательство. Рассмотрим, к примеру, случай $[-\infty, \gamma]_g$. Возьмем произвольные $\alpha < \beta \leqslant \gamma$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. В силу условия и предложения 10 оператор $\mathbf{1} + K$ односторонне причинно обратим на $[\alpha, \beta]_g$, причем нормы односторонних обратных к $(\mathbf{1} + K)_{[\alpha,\beta]_g}$ равномерно по α и β ограничены. Но согласно предложению 16 оператор $(\mathbf{1} + K)_{[\alpha,\beta]_g}$ двусторонне причинно обратим на $[\alpha, \beta]_g$. Поэтому в силу леммы 17(a) *нормы двусторонних обратных к $(\mathbf{1}+K)_{[\alpha,\beta]_g}$ равномерно по $\alpha < \beta \leqslant \gamma$ ограничены.* Аналогичное утверждение справедливо и в случае $[\gamma, +\infty]_g$.

Пусть $p \neq \infty$ и оператор $\mathbf{1} + K$ обратим слева на $[-\infty, \gamma]_g$. Тогда в силу леммы 17(b) образ оператора $(\mathbf{1} + K)_{[-\infty,\gamma]_g}$ замкнут. Возьмем произвольное $f \in (L_p)_{[-\infty,\gamma]_g}$, $f \neq 0$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем $\delta \in (-\infty, \gamma)$ так, чтобы $\|f - \chi_{[\delta,\gamma]_g} f\| \leqslant \varepsilon$, где $\chi_{[\delta,\gamma]_g}(x) = 1$ при $\delta \leqslant \langle x, g\rangle < \gamma$ и $\chi_{[\delta,\gamma]_g}(x) = 0$ при остальных x. По доказанному в первом абзаце $\chi_{[\delta,\gamma]_g} f$ имеет прообраз. Значит, образ $(\mathbf{1} + K)_{[-\infty,\gamma]_g}$ всюду плотен и поэтому (в силу замкнутости) совпадает со всем $(L_p)_{[-\infty,\gamma]_g}$.

Пусть $p \neq \infty$ и оператор $\mathbf{1} + K$ обратим справа на $[-\infty, \gamma]_g$. Тогда образ оператора $(\mathbf{1}+K)_{[-\infty,\gamma]_g}$ совпадает со всем пространством $(L_p)_{[-\infty,\gamma]_g}$. Покажем, что $(\mathbf{1}+K)_{[-\infty,\gamma]_g}$ имеет нулевое ядро. По доказанному в первом абзаце для любого $\delta \in (-\infty, \gamma)$ выполняется оценка $\|(\mathbf{1}+K)_{[\delta,\gamma]_g} u\| \geqslant C\|u\|$, $u \in (L_p)_{[\delta,\gamma]_g}$, где C не зависит от δ. Поскольку $\bigcup_{\delta \in (-\infty,\gamma)} (L_p)_{[\delta,\gamma]_g}$ всюду плотно в $(L_p)_{[-\infty,\gamma]_g}$, та же оценка выполняется для всех $u \in (L_p)_{[-\infty,\gamma]_g}$. Следовательно, $(\mathbf{1} + K)_{[-\infty,\gamma]_g}$ имеет нулевое ядро.

Пусть $p \neq 0$ и оператор $\mathbf{1} + K$ обратим слева на $[\gamma, +\infty]_g$. Тогда ядро оператора $(\mathbf{1} + K)_{[\gamma,+\infty]_g}$ состоит из нуля. Покажем, что его образ совпадает со всем пространством. Возьмем произвольную возрастающую последовательность $\delta_m \to +\infty$ и для произвольной $f \in (L_p)_{[\gamma,+\infty]_g}$ рассмотрим функции $f_m = \chi_{[\gamma,\delta_m]_g} f$. По доказанному в первом абзаце уравнения $(\mathbf{1}+K)_{[\gamma,\delta_m]_g} u_m = f_m$ имеют единственные решения u_m, причем нормы u_m равномерно по m ограничены. В силу причинности оператора K имеем $u_m(x) = u_{m+1}(x)$ при $\gamma \leqslant \langle x, g\rangle < \delta_m$. Таким образом, u_m сходится к некоторой функции $u \in (L_p)_{[\gamma,+\infty]_g}$. Нетрудно видеть, что $(\mathbf{1} + K)_{[\gamma,+\infty]_g} u = f$.

Пусть оператор $\mathbf{1} + K$ обратим справа на $[\gamma, +\infty]_g$. Тогда образ $(\mathbf{1} + K)_{[\gamma,+\infty]_g}$ совпадает со всем пространством $(L_p)_{[\gamma,+\infty]_g}$. Покажем, что его ядро состоит из нуля. Предположим противное: пусть $(\mathbf{1} + K)_{[\gamma,+\infty]_g} u = 0$ для некоторого $u \in (L_p)_{[\gamma,+\infty]_g}$, $u \neq 0$. Выберем $\delta \in (\gamma, +\infty)$ так, чтобы $\chi_{[\gamma,\delta]_g} u \neq 0$. В силу причинности оператора $\mathbf{1} + K$ из $(\mathbf{1} + K)_{[\gamma,+\infty]_g} u = 0$ имеем $(\mathbf{1} + K)_{[\gamma,\delta]_g}(\chi_{[\gamma,\delta]_g} u) = 0$, что противоречит утверждению первого абзаца.

Во всех случаях в силу леммы 17(a), поскольку двусторонний обратный существует, а односторонний обратный является причинным, двусторонний обратный также является причинным.

Докажем теперь, что причинная обратимость в L_∞ равносильна причинной обратимости в L_0. Рассмотрим, к примеру, случай $[-\infty, \gamma]_g$. Переопределим $k(x,\xi)$ нулем при $\gamma \leqslant \langle x, g\rangle$. Тогда в силу предложения 11 оператор $\mathbf{1}+K$ будет заведомо причинно обратим на $[\gamma, +\infty]_g$. Теперь из теоремы 1 следует его причинная обратимость на $[-\infty, +\infty]_g$. Далее сошлемся на [24, теорема 5.2.7], где доказана равносильность его обычной обратимости в L_∞ и в L_0, причем обратный в L_0 является сужением обратного в L_∞, а обратный в L_∞ может быть получен посредством предельного перехода $(\mathbf{1}+K)^{-1}f = \lim_{n\to\infty}(\mathbf{1}+K)^{-1}(\chi_{[-n,n]_g}f)$. □

5. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИМИСЯ ЯДРАМИ

Напомним, что если интегральный оператор (4) является сверточным, то условия его причинной обратимости выписываются явно.

Теорема 3 ([3])**.** *Пусть $k \in L_1\big(\mathbb{R}^n, \mathbf{B}(\mathbb{E})\big)$. Тогда причинный спектр оператора свертки*

$$\big(Ku\big)(x) = \int\limits_{x-\mathbb{S}} k(x-\xi)\, u(\xi)\, d\xi = \int\limits_{\mathbb{S}} k(\xi)\, u(x-\xi)\, d\xi \tag{1}$$

в алгебре $\mathbf{B}^{\mathbb{S}}(L_p)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ или $p=0$, совпадает с множеством

$$\bigcup \Big\{ \sigma\big(\Psi_K(y,\omega)\big) : y \in \mathbb{S}^*,\ \omega \in \mathbb{R}^n \Big\} \cup \{0\},$$

где $\sigma(a)$ — спектра оператора a, а

$$\Psi_K(y,\omega) = \int\limits_{\mathbb{S}} e^{\langle -y+i\omega,\, \xi\rangle} k(\xi)\, d\xi.$$

Рассмотрим вначале произвольный интегральный оператор (2). Предположим, что ядро $k(x,\xi)$ интегрального оператора (2) меняется медленно с изменением $x-\xi$. В этом случае естественно попытаться заменить локально ядро $k(x,\xi)$ замороженным ядром, зависящим только от разности аргументов $x-\xi$, превратив тем самым оператор в сверточный.

Рассмотрим [16] два типа операторов с замороженными ядрами, порожденные оператором K. Первый — это семейство операторов

$$\big(K_{x_0}u\big)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} k(x_0, x_0 - x + \xi) u(\xi)\, d\xi$$

с замороженными ядрами $k_{x_0}(\xi) = k(x_0, x_0-\xi)$, зависящее от параметра $x_0 \in \mathbb{R}^n$; и второй — семейство операторов

$$\big(K^{\xi_0}u\big)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} k(\xi_0 - \xi + x, \xi_0) u(\xi)\, d\xi$$

с замороженными ядрами $k^{\xi_0}(x) = k(\xi_0 + x, \xi_0)$, зависящее от параметра $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$. Очевидно, операторы K_{x_0} и K^{ξ_0} являются операторами свертки.

Предложение 18 ([16, предложение 2])**.**

(a) *Для почти всех* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *ядро* $k_{x_0}(\xi) = k(x_0, x_0 - \xi)$ *определено при почти всех* $\xi \in \mathbb{R}^n$ *и при почти всех* $\xi \in \mathbb{R}^n$ *удовлетворяет оценке* $\|k_{x_0}(\xi)\| \leqslant \beta_k(\xi)$. *Таким образом, оператор* K_{x_0} *определен при почти всех* $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

(b) *Для почти всех* $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ *ядро* $k^{\xi_0}(x) = k(\xi_0 + x, \xi_0)$ *определено при почти всех* $x \in \mathbb{R}^n$ *и при почти всех* $x \in \mathbb{R}^n$ *удовлетворяет оценке* $\|k_{\xi_0}(x)\| \leqslant \beta_k(x)$. *Таким образом, оператор* K^{ξ_0} *определен при почти всех* $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$.

Предположим, что для некоторого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ядро $k_{x_0}(\xi) = k(x_0, x_0 - \xi)$ оператора K_{x_0} принадлежит $L_1\big(\mathbb{R}^n, \mathbf{B}(\mathbb{E})\big)$ и оператор $\mathbf{1}+K_{x_0}$ обратим. Известно (см., например, [24, теорема 4.5.5(f)]), что в этом случае обратный оператор имеет вид $\mathbf{1}-N_{x_0}$, где N_{x_0} — оператор свертки с некоторой функцией из $L_1\big(\mathbb{R}^n, \mathbf{B}(\mathbb{E})\big)$. Из технических соображений удобно представить ядро оператора N_{x_0} в виде

$$\big(N_{x_0}u\big)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} n(x_0, x_0 - x + \xi)u(\xi)\, d\xi.$$

Предположим теперь, что оператор $\mathbf{1} + K_{x_0}$ обратим для почти всех $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и, кроме того, при почти всех $(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ выполняется оценка

$$\|n(x, \xi)\| \leqslant \beta_n(x - \xi) \tag{2}$$

для некоторой функции $\beta_n \in L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. В этом случае рассмотрим оператор

$$\big(Nu\big)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} n(x, \xi)u(\xi)\, d\xi. \tag{3}$$

Аналогичным образом предста́вим обратный к оператору $\mathbf{1} + K^{\xi_0}$ (в предположении, что он существует) в виде $\mathbf{1} - M^{\xi_0}$, где

$$\big(M^{\xi_0}u\big)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} m(\xi_0 - \xi + x, \xi_0)u(\xi)\, d\xi.$$

В случае, когда операторы $\mathbf{1} + K^{\xi_0}$ обратимы при почти всех $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ и при почти всех $(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ выполняется оценка

$$\|m(t, \xi)\| \leqslant \beta^m(t - \xi) \tag{4}$$

для некоторой функции $\beta^m \in L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, рассмотрим оператор

$$\big(Mu\big)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} m(x, \xi)u(\xi)\, d\xi. \tag{5}$$

Предложение 19 ([16, предложение 3])**.**

(a) *Пусть оператор* $\mathbf{1} + K_{t_0}$ *обратим при почти всех* $x_0 \in \mathbb{R}^n$. *Тогда функция* $n : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbf{B}(\mathbb{E})$ *может быть выбрана измеримой. Таким образом, если в этом случае выполнена оценка* (2), *то формула* (3) *определяет линейный ограниченный оператор, действующий в* L_p *при всех* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *и* $p = 0$.

(b) *Пусть оператор* $\mathbf{1} + K^{\xi_0}$ *обратим при почти всех* $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$. *Тогда функция* $m : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbf{B}(\mathbb{E})$ *может быть выбрана измеримой. Таким образом, если в этом случае выполнена оценка* (4), *то формула* (5) *определяет линейный ограниченный оператор, действующий в* L_p *при всех* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *и* $p = 0$.

Будем описывать скорость изменения ядер операторов K, N и M в терминах измеримых функций $\alpha_k, \alpha_n, \alpha^k, \alpha^m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Предположим, что при почти всех $(x,h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ выполняются оценки

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \|k(x,\xi) - k(x+h,\xi+h)\|\, d\xi \leqslant \alpha_k(h), \tag{6}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \|n(x,\xi) - n(x+h,\xi+h)\|\, d\xi \leqslant \alpha_n(h) \tag{7}$$

и при почти всех $(\xi,h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ выполняются оценки

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \|k(x,\xi) - k(x+h,\xi+h)\|\, dx \leqslant \alpha^k(h), \tag{8}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \|m(x,\xi) - m(x+h,\xi+h)\|\, dx \leqslant \alpha^m(h). \tag{9}$$

Очевидно, функции α_k, α_n, α^k и α^m без ограничения общности можно считать четными.

Основным результатом настоящей статьи является следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *или* $p = 0$. *Пусть* K *— причинный интегральный оператор* (4), *причем выполнена оценка* (1).

(a) *Пусть операторы* $\mathbf{1} + K_{x_0}$ *причинно обратимы в* L_p *при почти всех достаточно больших* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *и выполнены оценки* (2) *и* (7), *а также оценка*

$$\int\limits_{\mathbb{S}} \beta_k(h)\alpha_n(h)\, dh < 1.$$

Тогда оператор $\mathbf{1} + K$ *причинно обратим в* L_p.

(b) *Пусть операторы* $\mathbf{1} + K_{x_0}$ *причинно обратимы в* L_p *при почти всех достаточно больших* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *и выполнены оценки* (2) *и* (6), *а также оценка*

$$\int\limits_{\mathbb{S}} \beta_n(h)\alpha_k(h)\, dh < 1.$$

Тогда оператор $\mathbf{1} + K$ *причинно обратим в* L_p.

(c) *Пусть операторы* $\mathbf{1} + K^{\xi_0}$ *причинно обратимы в* L_p *при почти всех достаточно больших* $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ *и выполнены оценки* (4) *и* (9), *а также оценка*

$$\int\limits_{\mathbb{S}} \beta_k(h)\alpha^m(h)\, dh < 1.$$

Тогда оператор $\mathbf{1} + K$ *причинно обратим в* L_p.

(d) *Пусть операторы* $\mathbf{1} + K^{\xi_0}$ *причинно обратимы в* L_p *при почти всех достаточно больших* $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ *и выполнены оценки* (4) *и* (8), *а также оценка*

$$\int\limits_{\mathbb{S}} \beta^m(h)\alpha^k(h)\, dh < 1.$$

Тогда оператор $\mathbf{1} + K$ *причинно обратим в* L_p.

Доказательство. Разбор всех случаев одинаков. Ограничимся поэтому утверждением (a). В силу предложения 12(c) можно считать, что операторы $\mathbf{1}+K_{x_0}$ причинно обратимы в L_∞.

Возьмем $g\in\mathbb{S}$, $g\neq 0$. Выберем достаточно малое $\alpha\in\mathbb{R}$ так, чтобы

$$\begin{aligned}
\|k(x,\xi)\| &\leqslant \beta_k(x-\xi), && \langle x,g\rangle<\alpha, \quad \xi\in\mathbb{R}^n,\\
\int\limits_{\mathbb{R}^n}\|n(x,\xi)-n(x+h,\xi+h)\|\,d\xi &\leqslant \alpha_n(h), && \langle x,g\rangle<\alpha, \quad \langle x+h,g\rangle<\alpha.
\end{aligned}$$

И выберем достаточно большое $\beta\in\mathbb{R}$ так, чтобы аналогичные оценки выполнялись для множества $\beta\leqslant\langle x,g\rangle$.

Покажем, что оператор $\mathbf{1}+K$ причинно обратим справа в L_∞ как на $[-\infty,\alpha]_g$, так и на $[\beta,+\infty]_g$. Доказательство этого факта в существенном повторяет доказательство теоремы 1 из [16]. Рассмотрим оператор

$$K_N=\mathbf{1}-(\mathbf{1}+K)(\mathbf{1}-N)=KN-K+N.$$

Далее так же, как и в [16], с использованием предложения 11 легко доказывается, что оператор $\mathbf{1}+K$ причинно обратим справа в L_∞ как на $[-\infty,\alpha]_g$, так и на $[\beta,+\infty]_g$ при условии, что $\|(K_N)_{[-\infty,\alpha]_g}\|<1$ и $\|(K_N)_{[\beta,+\infty]_g}\|<1$.

Нетрудно видеть (подробнее см. [16]), что оператор K_N является интегральным с ядром

$$\begin{aligned}
k_n(x,\xi)&=\int\limits_{\mathbb{R}^n}k(x,\sigma)\big(n(\sigma,\xi)-n(x,x-\sigma+\xi)\big)\,d\sigma=\\
&=\int\limits_{(x-\mathbb{S})\cap(\xi+\mathbb{S})}k(x,\sigma)\big(n(\sigma,\xi)-n(x,x-\sigma+\xi)\big)\,d\sigma.
\end{aligned}$$

Оценим норму оператора $(K_N)_{[-\infty,\alpha]_g}:\ (L_\infty)_{[-\infty,\alpha]_g}\to(L_\infty)_{[-\infty,\alpha]_g}$. В силу следствия 14 и известной формулы для нормы интегрального оператора в L_∞ имеем

$$\begin{aligned}
\|(K_N)_{[-\infty,\alpha]_g}\| &= \operatorname*{ess\,sup}_{\langle x,g\rangle<\alpha}\int\limits_{\langle\xi,g\rangle<\alpha}\|k_n(x,\xi)\|\,d\xi\leqslant\\
&\leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{\langle x,g\rangle<\alpha}\int\limits_{\langle\xi,g\rangle<\alpha}\left[\int\limits_{(x-\mathbb{S})\cap(\xi+\mathbb{S})}\|k(x,\sigma)\|\cdot\big\|n(\sigma,\xi)-n(x,x-\sigma+\xi)\big\|\,d\sigma\right]d\xi\leqslant\\
&\leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{\langle x,g\rangle<\alpha}\int\limits_{\langle\xi,g\rangle<\alpha}\left[\int\limits_{\langle\sigma,g\rangle<\alpha}\beta_k(x-\sigma)\cdot\big\|n(\sigma,\xi)-n(x,x-\sigma+\xi)\big\|\,d\sigma\right]d\xi\leqslant\\
&\leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{\langle x,g\rangle<\alpha}\int\limits_{\langle\sigma,g\rangle<\alpha}\beta_k(x-\sigma)\left[\int\limits_{\langle\xi,g\rangle<\alpha}\big\|n(\sigma,\xi)-n(x,x-\sigma+\xi)\big\|\,d\xi\right]d\sigma\leqslant\\
&\leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{\langle x,g\rangle<\alpha}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\beta_k(x-\sigma)\left[\int\limits_{\mathbb{R}^n}\big\|n(\sigma,\xi)-n\big(\sigma+(x-\sigma),\xi+(x-\sigma)\big)\big\|\,d\xi\right]d\sigma\leqslant\\
&\leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{\langle x,g\rangle<\alpha}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\beta_k(x-\sigma)\alpha_n(x-\sigma)\,d\sigma<1.
\end{aligned}$$

Аналогично оценивается норма оператора $(K_N)_{[\beta,+\infty]_g}:\ (L_\infty)_{[\beta,+\infty]_g}\to(L_\infty)_{[\beta,+\infty]_g}$.

Таким образом, оператор $\mathbf{1}+K$ причинно обратим справа в L_∞ как на $[-\infty,\alpha]_g$, так и на $[\beta,+\infty]_g$. Из теорем 2 и 1, а также предложения 16 следует, что он причинно обратим во всем пространстве. Остается сослаться на предложение 12(c).

При разборе случаев (c) и (d) удобно в качестве основного пространства взять L_1. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике / В.С. Владимиров. — М.: Наука, 1979. — 320 с.

[2] Kurbatov V.G. The causal invertibility with respect to a cone / V.G. Kurbatov, A.A. Studenikin // Functional Differential Equations. — 1997. — Vol. 4, № 3–4. — P. 295–327.

[3] Курбатов В.Г. О причинной обратимости относительно конуса разностно-интегральных операторов в пространствах вектор-функций / В.Г. Курбатов // Функциональный анализ и его приложения. — 2005. — Т. 39, № 3. — С. 233–235.

[4] Скопин В.А. Об эквивалентности причинной и обычной обратимости для интегральных операторов свертки / В.А. Скопин // Дифференциальные уравнения. — 2001. — Т. 37, № 9.— С. 1265–1272.

[5] Скопин В.А. О наполненности подалгебры абсолютно непрерывных мер, сосредоточенных в конусе / В.А. Скопин // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2003. — № 2. — С. 216–219.

[6] Пупков К.А. Функциональные ряды в теории нелинейных систем / К.А. Пупков, В.И. Капалин, А.С. Ющенко. — М.: Наука, 1976. — 448 с.

[7] Суворов С.Г. Аппроксимация нелинейных операторов рядами Вольтерра в многомерном случае / С.Г. Суворов // Український математичний вiсник (Донецк). — 2005. — Т. 2, № 3. — С. 418–441.

[8] Бобрешов А.М. Влияние обратной связи на радиус сходимости рядов Вольтерры / А.М. Бобрешов, Н.Н. Мымрикова // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. — 2013. — Т. 16, № 1. — С. 42–47.

[9] Kamenskii G.A. Mixed functional-differential equations / G.A. Kamenskii, A.D. Myshkis // Nonlin. Anal. TMA. — 1998. — V. 34, № 2. — P. 283–287.

[10] Мышкис А.Д. Смешанные функционально-дифференциальные уравнения / А.Д. Мышкис // Новые проблемы теории функционально-дифференциальных уравнений. Современная математика. Фундаментальные направления. — М. МАИ. — 2003. — Т. 4. — С. 5–120.

[11] Калинвин А.С. Линейные уравнения с частными интегралами. C-теория / А.С. Калинвин, Е.В. Фролова. — Липецк: ЛГПУ, 2004. — 195 с.

[12] Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения / А.М. Ляпунов. — М.-Л.: Гостехиздат. — 1950. — 472 с.

[13] Красовский Н.Н. О применении 2-го метода Ляпунова для уравнений с запаздыванием времени / Н.Н. Красовский // Прикладная математика и механика. — 1956. — Т. 20, вып. 2. — С. 314–327.

[14] Крупнова Н.И. Признак устойчивости линейных систем с переменными коэффициентами и запаздыванием времени / Н.И. Крупнова, С.Н. Шиманов // Прикладная математика и механика. — 1972. — Т. 36. Вып. 3. — С. 533–536.

[15] Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений / Д. Хенри. — М.: Мир, 1985. — 376 с.

[16] Кузнецова В.И. Об устойчивости линейных систем, описываемых интегральными уравнениями с медленно меняющимися ядрами / В.И. Кузнецова, В.Г. Курбатов // Автоматика и телемеханика. — 2000. — № 6. — С. 48–60.

[17] Кузнецова В.И. О дискретных линейных системах с медленно меняющимися параметрами / В.И. Кузнецова // Автоматика и телемеханика. — 1990. — № 7. — С. 43–48.

[18] Кузнецова В.И. Об устойчивости одного класса разностных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами / В.И. Кузнецова // Дифференциальные уравнения. — 2003. — Т. 39, № 8. — С. 1108–1114.

[19] Баскаков А.Г. Теорема Берлинга для функций с существенным спектром из однородных пространств и стабилизация решений параболических уравнений / А.Г. Баскаков, Н.С. Калужина // Математические заметки. — 2012. — Т. 92, № 5. — С. 643–661.

[20] Кузнецова В.И. Об обратимости разностно-интегрального оператора в пространстве медленно меняющихся функций / В.И. Кузнецова, В.Г. Курбатов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 2. — С. 219–229.

[21] Willems J.C. The Analysis of Feedback Systems / J.C. Willems. — Cambridge: MIT Press, 1971. — 188 p.

[22] Курбатов В.Г. Линейные функционально-дифференциальные уравнения и запаздывающий спектр / В.Г. Курбатов // Сибирский математический журнал. — 1975. — Т. 14, № 3. — С. 538–550.

[23] Курбатов В.Г. Об обратимости запаздывающих операторов / В.Г. Курбатов // Теория операторных уравнений. — Воронеж: ВГУ. — 1979. — С. 43–52.

[24] Kurbatov V.G. Functional differential operators and equations / V.G. Kurbatov. — Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 1999. — 433 p.

[25] Криштал И.А. О критериях обратимости в алгебре каузальных операторов / И.А. Криштал // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2002. — № 1. — С. 143–150.

[26] Баскаков А.Г. Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства / А.Г. Баскаков, И.А. Криштал // Изв. РАН. Сер. матем. — 2005. — Т. 69, № 3. — С. 3–54.

[27] Баскаков А.Г. О гармоническом анализе каузальных операторов / А.Г. Баскаков, И.А. Криштал // Функциональный анализ и его приложения. — 2006. — Т. 40, № 1. — С. 65–68.

[28] Ланге Б.В. Псевдодифференциальные операторы на $\mathbf{R}^n$ и предельные операторы / Б.В. Ланге, В.С. Рабинович // Матем. сб. — 1986. — Т. 129(171), № 2. — С. 175–185.

[29] Курбатов В.Г. Замечание о предельных операторах / В.Г. Курбатов // Функциональный анализ и его приложения. — 1996. — Т. 30, № 1. — С. 73–75.

[30] Chandler-Wilde S.N. Limit operators, collective compactness, and the spectral theory of infinite matrices / S.N. Chandler-Wilde, M. Lindner. — Memoirs Amer. Math. Soc. — 2011. — Vol. 210, № 989. — 111 p.

[31] Рудин У. Функциональный анализ / У. Рудин. — М.: Мир, 1975. — 443 с.

[32] Бурбаки Н. Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах / Н. Бурбаки. — М.: Наука, 1977. — 601 с.

[33] Стейн И.М. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций / И.М. Стейн. — М.: Мир, 1973. — 342 с.

[34] Kurbatov V.G. Some algebras of operators majorized by a convolution / V.G. Kurbatov // Functional Differential Equations. — 2002. — Vol. 8, № 3–4. — P. 323–333.

REFERENCES

[1] Vladimirov V.S. Generalized functions in mathematical physics. [Vladimirov V.S. Obobshhennye funkcii v matematicheskoj fizike]. Moscow: Nauka, 1979, 320 p.

[2] Kurbatov V.G., Studenikin A.A. The causal invertibility with respect to a cone. Functional Differential Equations. 1997, vol. 4, no 3–4, pp. 295–327.

[3] Kurbatov V.G. On Causal reversibility relative to the cone of Integral-Difference operators in spaces of vector-valued functions. [Kurbatov V.G. O prichinnoj obratimosti otnositel'no konusa raznostno-integral'nyx operatorov v prostranstvax vektor-funkcij]. *Funkcional'nyj analiz i ego prilozheniya — Functional analysis and its applications*, 2005, vol. 39, no. 3, pp. 233–235.

[4] Skopin V.A. On the equivalence of causal and usually reversible for integral convolution operators. [Skopin V.A. Ob e'kvivalentnosti prichinnoj i obychnoj obratimosti dlya integral'nyx operatorov svertki]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2001, vol. 37, no. 9, pp. 1265–1272.

[5] Skopin V.A. About filled subalgebra of absolutely continuous measures, concentrated on a cone. [Skopin V.A. O napolnennosti podalgebry absolyutno nepreryvnyx mer, sosredotochennyx v konuse]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2003, no. 2, pp. 216–219.

[6] Pupkov K.A., Kapalin V.I., Yushhenko A.S. Functional series in the theory of non-linear systems. [Pupkov K.A., Kapalin V.I., Yushhenko A.S. Funkcional'nye ryady v teorii nelinejnyx sistem]. Moscow: Nauka, 1976, 448 p.

[7] Suvorov S.G. Approximation of nonlinear operators by Volterra series in the multidimensional case. [Suvorov S.G. Approksimaciya nelinejnyx operatorov ryadami Vol'terra v mnogomernom sluchae]. *Ukraïns'kij matematichnij visnik — Ukrainian Mathematical Bulletin*, 2005, vol. 2, no. 3, pp. 418–441.

[8] Bobreshov A.M., Mymrikova N.N. Influence of feedback on the radius of convergence of Volterra series. [Bobreshov A.M., Mymrikova N.N. Vliyanie obratnoj svyazi na radius sxodimosti ryadov Vol'terry]. *Fizika volnovyx processov i radiotexnicheskie sistemy — Physics of wave processes and radio systems*, 2013, vol. 16, no. 1, pp. 42–47.

[9] Kamenskii G.A., Myshkis A.D. Mixed functional-differential equations. Nonlin. Anal. TMA., 1998, vol. 34, no 2, pp. 283–287.

[10] Myshkis A.D. Mixed Functional Differential Equations. [Myshkis A.D. Smeshannye funkcional'no-differencial'nye uravneniya]. *Novye problemy teorii funkcional'no-differencial'nyx uravnenij. Sovremennaya matematika. Fundamental'nye napravleniya — New problems in the theory of functional differential equations. Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, Moscow: MAI, 2003, vol. 4, pp. 5–120.

[11] Kalinvin A.S., Frolova E.V. Linear partial differential equations integrals. C-theory. [Kalinvin A.S., Frolova E.V. Linejnye uravneniya s chastnymi integralami. C-teoriya]. Lipeck: LGPU, 2004, 195 p.

[12] Lyapunov A.M. The general problem of stability of motion. [Lyapunov A.M. Obshhaya zadacha ob ustojchivosti dvizheniya]. M.-L.: Gostexizdat, 1950, 472 p.

[13] Krasovskij N.N. On the application of the 2nd Lyapunov method for equations with delay time. [Krasovskij N.N. O primenenii 2-go metoda Lyapunova dlya uravnenij s zapazdyvaniem vremeni]. *Prikladnaya matematika i mexanika — Applied Mathematics and Mechanics*, 1956, vol. 20, iss. 2, pp. 314–327.

[14] Krupnova N.I., Shimanov S.N. A sign of stability of linear systems with variable coefficients and delay time. [Krupnova N.I., Shimanov S.N. Priznak ustojchivosti linejnyx sistem s peremennymi koe'fficientami i zapazdyvaniem vremeni]. *Prikladnaya matematika i mexanika — Applied Mathematics and Mechanics*, 1972, vol. 36, iss. 3, pp. 533–536.

[15] Xenri D. Geometric theory of semilinear parabolic equations. [Xenri D. Geometricheskaya teoriya polulinejnyx parabolicheskix uravnenij]. Moscow: Mir, 1985, 376 p.

[16] Kuznecova V.I., Kurbatov V.G. The stability of linear systems described by integral equations with slowly varying kernels. [Kuznecova V.I., Kurbatov V.G. Ob ustojchivosti linejnyx sistem, opisyvaemyx integral'nymi uravneniyami s medlenno menyayushhimisya yadrami].

Avtomatika i telemexanika — Automation and Remote Control, 2000, no. 6, pp. 48–60.

[17] Kuznecova V.I. On discrete linear systems with slowly varying parameters. [Kuznecova V.I. O diskretnyx linejnyx sistemax s medlenno menyayushhimisya parametrami]. *Avtomatika i telemexanika — Automation and Remote Control*, 1990, no. 7, pp. 43–48.

[18] Kuznecova V.I. The stability of a class of difference equations with slowly varying coefficients. [Kuznecova V.I. Ob ustojchivosti odnogo klassa raznostnyx uravnenij s medlenno menyayushhimisya koe'fficientami]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2003, vol. 39, no. 8, pp. 1108–1114.

[19] Baskakov A.G., Kaluzhina N.S. Beurling for functions with a significant range of homogeneous spaces and the stabilization of solutions of parabolic equations. [Baskakov A.G., Kaluzhina N.S. Teorema Berlinga dlya funkcij s sushhestvennym spektrom iz odnorodnyx prostranstv i stabilizaciya reshenij parabolicheskix uravnenij]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2012, vol. 92, no. 5, pp. 643–661.

[20] Kuznecova V.I., Kurbatov V.G. On the reversibility of the difference-integral operator in the space of slowly varying functions. [Kuznecova V.I., Kurbatov V.G. Ob obratimosti raznostno-integral'nogo operatora v prostranstve medlenno menyayushhixsya funkcij]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika*, 2013, no. 2, pp. 219–229.

[21] Willems J.C. The Analysis of Feedback Systems. Cambridge: MIT Press, 1971, 188 p.

[22] Kurbatov V.G. Linear functional differential equations and retarded spectrum. [Kurbatov V.G. Linejnye funkcional'no-differencial'nye uravneniya i zapazdyvayushhij spektr]. *Sibirskij matematicheskij zhurnal — Siberian Mathematical Journal*, 1975, vol. 14, no. 3, pp. 538–550.

[23] Kurbatov V.G. On the reversibility of retarding operators. [Kurbatov V.G. Ob obratimosti zapazdyvayushhix operatorov]. *Teoriya operatornyx uravnenij — The theory of operator equations*, 1979, pp. 43–52.

[24] Kurbatov V.G. Functional differential operators and equations. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 1999, 433 p.

[25] Krishtal I.A. On the criteria of reversibility in the algebra of causal operators. [Krishtal I.A. O kriteriyax obratimosti v algebre kauzal'nyx operatorov]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2002, no. 1, pp. 143–150.

[26] Baskakov A.G., Krishtal I.A. Harmonic analysis of causal operators and their spectral properties. [Baskakov A.G., Krishtal I.A. Garmonicheskij analiz kauzal'nyx operatorov i ix spektral'nye svojstva]. *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Seriya matematicheskaya — Izvestiya: Mathematics*, 2005, vol. 69, no. 3, pp. 3–54.

[27] Baskakov A.G., Krishtal I.A. Harmonic analysis of causal operators. [Baskakov A.G., Krishtal I.A. O garmonicheskom analize kauzal'nyx operatorov]. *Funkcional'nyj analiz i ego prilozheniya — Functional analysis and its applications*, 2006, vol. 40, no. 1, pp. 65-68.

[28] Lange B.V., Rabinovich V.S. Pseudo-differential operators on $\mathbb{R}^n$ and limit operators. [Lange B.V., Rabinovich V.S. Psevdodifferencial'nye operatory na $\mathbf{R}^n$ i predel'nye operatory]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 1986, vol. 129(171), no. 2, pp. 175–185.

[29] Kurbatov V.G. Remark on Limit Operators. [Kurbatov V.G. Zamechanie o predel'nyx operatorax]. *Funkcional'nyj analiz i ego prilozheniya — Functional analysis and its applications*, 1996, vol. 30, no. 1, pp. 73–75.

[30] Chandler-Wilde S.N., Lindner M. Limit operators, collective compactness, and the spectral theory of infinite matrices. Memoirs Amer. Math. Soc., 2011, vol. 210, no. 989, 111 p.

[31] Rudin U. Function analysis. [Rudin U. Funkcional'nyj analiz]. Moscow: Mir, 1975, 443 p.

[32] Burbaki N. Integration. Measures on locally compact spaces. Continued measures.

Integration measures. Measures on separable spaces. [Burbaki N. Integrirovanie. Mery na lokal'no kompaktnyx prostranstvax. Prodolzhenie mery. Integrirovanie mer. Mery na otdelimyx prostranstvax]. Moscow: Nauka, 1977, 601 p.

[33] Stejn I.M. Singular integrals and differentiability properties of functions. [Stejn I.M. Singulyarnye integraly i differencial'nye svojstva funkcij]. Moscow: Mir, 1973, 342 p.

[34] Kurbatov V.G. Some algebras of operators majorized by a convolution. Functional Differential Equations. 2002, vol. 8, no. 3–4, pp. 323–333.

Кузнецова Валентина Ивановна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики Воронежского государственного технического университета, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: kv57@bk.ru
Тел.: (473)254–54–75

Kuznetsova Valentina Ivanovna, Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, associate professor of the Department of Applied Mathematics, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: kv57@bk.ru
Tel.: (473)254–54–75

Курбатов Виталий Геннадьевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и информатики Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: kv51@inbox.ru
Тел.: (4742)27–39–48

Kurbatov Vitalii Gennad'evich, Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, professor of the Department of Mathematics and Informatics, Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration, Voronezh, Russian Federation
E-mail: kv51@inbox.ru
Tel.: (4742)27–39–48