УДК 517.927.21

ЧАСТОТНЫЕ ПРИЗНАКИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ

Е. В. Иванова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 10.04.2014 г.

Аннотация: в данной статье рассматривается слабо нелинейное векторно-операторное дифференциальное уравнение первого порядка в комплексном гильбертовом пространстве. Эта статья написана по мотивам работы Перова А.И. “Частотные признаки существования ограниченных решений”, в которой изучались нелинейные дифференциальные уравнения в конечномерном гильбертовом пространстве. В статье введены интегральные и частотные постоянные, основное частотное условие, условие Каратеодори, используется оценка А. Г. Баскакова. На их основе получен главный результат статьи, а именно, две теоремы, содержащие условия, при которых рассматриваемое уравнение имеет единственное ограниченное решение, а также условия его абсолютной устойчивости.

Ключевые слова: комплексное гильбертово пространство, слабо нелинейное векторно-операторное дифференциальное уравнение, условие Липшица, условие типа Липшица, условие Каратеодори, основное частотное условие, теорема Баскакова.

THE FREQUENCY SIGNS FOR THE EXISTENCE OF THE BOUNDED SOLUTIONS

E. V. Ivanova

Abstract: in this paper are considered the weekly nonlinear vector-operator differential equation of the first order in a complex Hilbert space. This article is written based on the article of A. I. Perov "The frequency signs for the existence of the bounded solutions"which studied nonlinear differential equations in finite-dimensional Hilbert space. The article introduced the integral and frequency constants, the main frequency condition, Caratheodory condition and were used the estimate of A. G. Baskakov. On their basis, obtained by the main result of this paper, namely, two theorems containing the conditions under which the considered equation has a unique bounded solution, as well as the conditions for its absolute stability.

Keywords: Complex Hilbert space, the poorly nonlinear vector-operator differential equation, condition of Lipschitz, condition of type of Lipschitz, condition of Caratheodory, frequency condition, theorem of Baskakov.

Пусть $\mathbb{H}$ — комплексное гильбертово пространство, скалярное произведение в котором записывается с помощью круглых скобок, а норма элемента $\boldsymbol{x}$ из $\mathbb{H}$ обозначается $|\boldsymbol{x}|(= (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})^{1/2})$. Банахова алгебра линейных ограниченных операторов $\boldsymbol{A}$, действующих в $\mathbb{H}$, обозначается $\operatorname{End}\mathbb{H}$ с нормой $\boldsymbol{A}(= \sup\{|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}|/|\boldsymbol{x}| : 0 \neq \boldsymbol{x} \in \mathbb{H}\})$.

Эта статья написана по мотивам работы [1], в которой изучались нелинейные дифференциальные уравнения в конечномерном гильбертовом пространстве.

В комплексном гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ рассмотрим слабо нелинейное векторно-операторное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}), \tag{1}$$

где $\cdot = d/dt$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{H}$, $\boldsymbol{A} \in \operatorname{End}\mathbb{H}$, а $\boldsymbol{f}(t,x) : \mathbb{R} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ — нелинейная векторная функция, удовлетворяющая условию Липшица или условию типа Липшица.

Здесь производная понимается в *сильном* смысле как предел по норме конечноразностного отношения $[\boldsymbol{x}(t+\Delta t) - \boldsymbol{x}(t)]/\Delta t$ при $\Delta t \to 0$, точно также как непрерывность, измеримость и т.п., причём слово сильно, как правило, опускается.

Во всей статье предполагается, что спектр $\sigma(\boldsymbol{A})$ оператора $\boldsymbol{A}$ не пересекается с мнимой осью

$$\sigma(\boldsymbol{A}) \bigcap i\mathbb{R} = \varnothing. \tag{2}$$

Это предположение заведомо будет выполняться, если спектр лежит в открытой левой полуплоскости

$$\operatorname{Re}(\lambda) < p \quad \text{при} \quad \lambda \in \sigma(\boldsymbol{A}). \tag{3}$$

Такой оператор назовём *гурвицевым* (в честь известного немецкого математика Адольфа Гурвица), в то время как оператор, удовлетворяющий условию (2), — *бóлевым* (в честь рижского математика Пирса Георгиевича Боля).

Как известно (см., например, [2, с. 119–121]), для любой векторной измеримой ограниченной функции $\boldsymbol{f}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ любое неоднородное векторно-операторное дифференциальное уравнение

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t) \tag{4}$$

при условии (2) имеет единственное ограниченное решение $\boldsymbol{x}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$, и это решение представимо в интегральной форме

$$\boldsymbol{x}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{G}(t-s)\boldsymbol{f}(s)\,ds, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{G}(t)$ есть (приведённая) *операторная ограниченная функция Грина*, то есть функция Грина задачи об ограниченных решениях. Поясним, что решение называется *ограниченным* (иногда равномерно-ограниченным), если

$$|\boldsymbol{x}(t)| \leqslant c, \quad -\infty < t < +\infty, \tag{6}$$

где x — положительная постоянная.

В теории ограниченных решений важны две величины, связанные с оператором $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{k}(\boldsymbol{A}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\boldsymbol{G}(t)|\,dt, \tag{7}$$

$$\boldsymbol{s}(\boldsymbol{A}) = \max_{-\infty<\theta<+\infty} |(i\theta\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}|, \tag{8}$$

где $\boldsymbol{I} \in \operatorname{End}\mathbb{H}$ есть единичный оператор. Так как *частотная характеристика* $W(i\theta) = (i\theta\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$ является преобразованием Фурье ограниченной операторной функцией Грина,

$$(i\theta\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{G}(t)e^{-i\theta t}\,dt, \tag{9}$$

то в силу формул (7) и (8) находим, что

$$\boldsymbol{s}(\boldsymbol{A}) \leqslant \boldsymbol{k}(\boldsymbol{A}). \tag{10}$$

Выше мы через $W(p)$ (обозначили резольвенту оператора $\boldsymbol{A}$, т.е. $W(p) = (p\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} : \rho(\boldsymbol{A}) \to \operatorname{End}\mathbb{H}$, где $\rho(\boldsymbol{A}) = \mathbb{C} \setminus \sigma(\boldsymbol{A})$ есть множество регулярных точек оператора $\boldsymbol{A}$.

Обозначим через $\boldsymbol{L}_p = \boldsymbol{L}_p(\mathbb{R}, \mathbb{H})$ банахово пространство векторных измеримых функций $\boldsymbol{x}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ с нормой

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\boldsymbol{x}(t)|^p \, dt \right)^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < +\infty,$$

$$\|x\|_\infty = \operatorname*{vrai\,sup}_{-\infty<\theta<+\infty} |x(t)|.$$

Отметим, что пространство $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}, \mathbb{H})$ есть гильбертово пространство со скалярным произведением

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{y}(t)) \, dt.$$

Интегральный оператор $\boldsymbol{K}$, определённый формулой (5), действует в каждом из этих пространств и является линейным ограниченным оператором, норма которого в $\boldsymbol{L}$ обозначается $\|\boldsymbol{K}\|_p$. Для нас важно, что

$$\|\boldsymbol{K}\|_2 = \boldsymbol{s}(\boldsymbol{A}). \tag{11}$$

Этот факт устанавливается с помощью теоремы Планшереля (см., например, [3, с. 390–392]; [4, с. 92–95]). Отметим ещё, что

$$\|\boldsymbol{K}\|_{\mathbb{C}} \leqslant \|\boldsymbol{K}\|_\infty \leqslant \boldsymbol{k}(\boldsymbol{A}). \tag{12}$$

Здесь есть $\mathbb{C} = \mathbb{C}(\mathbb{R}, \mathbb{H})$ есть банахово пространство векторных непрерывных ограниченных функций с sup-нормой.

Во всей статье предполагается, что нелинейная векторная функция $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) : \mathbb{R} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ удовлетворяет *условию Каратеодори*: измерима по t при любом фиксированном $\boldsymbol{x}$ из $\mathbb{H}$ и непрерывна по $\boldsymbol{x}$ при почти всех t из $\mathbb{R}$, и либо удовлетворяет *условию Липшица*

$$|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y})| \leqslant l|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|, \tag{13}$$

либо удовлетворяют *условию типа Липшица*

$$|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})| \leqslant m + l|\boldsymbol{x}|, \tag{14}$$

где l и m — некоторые положительные постоянные. В обоих случаях положим

$$\boldsymbol{f}_0(t) \equiv \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{0}), \quad -\infty < t < +\infty, \tag{15}$$

и будем предполагать, что эта измеримая векторная функция является ограниченной.

Отметим, что при выполнении каждого из условий (13) или (14), любое решение нелинейного уравнения (1) нелокально продолжимо, то есть продолжимо на всю числовую прямую, причем если выполнено условие Липшица (13), то это решение однозначно определяется любыми своими начальными условиями; если же выполняется условие типа Липшица (14), то в случае бесконечномерного пространства $\mathbb{H}$ нужно ещё предполагать, что выполнены какие-либо условия, гарантирующие локальную разрешимость, так как в бесконечномерном пространстве $\mathbb{H}$ отсутствует теорема Пеано.

В обоих приводимых ниже теоремах важную роль играет основное частотное условие

$$q_\sigma = \boldsymbol{s}(\boldsymbol{A})l < 1. \tag{16}$$

В завершение подготовительной работы введём ещё постоянную

$$c = 4d(1 + (|\boldsymbol{A}| + l)d), \tag{17}$$

где

$$d = \boldsymbol{s}(\boldsymbol{A})/(1 - q_\sigma), \tag{18}$$

Начало и конец доказательства теорем и лемм обозначается соответственно значками □ и ■.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия Липшица* (13)*, условие* (15) *и основное частотное условие* (16)*. Тогда слабо нелинейное дифференциальное уравнение* (1) *имеет единственное ограниченное решение* $\boldsymbol{x}(t)$*. Для этого решения справедлива оценка*

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leqslant c\|\boldsymbol{f}_0\|_\infty, \tag{19}$$

где постоянная c определяется формулой (17).

Если оператор $\boldsymbol{A}$ *гурвицев, то ограниченное решение* $\boldsymbol{x}(t)$ *абсолютно устойчиво, причём*

$$|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{y}(t)|e^{t\gamma} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty, \tag{20}$$

для любого другого решения $\boldsymbol{y}(t)$ *уравнения* (1)*, где* γ *— фиксированная постоянная,* $0 < \gamma < 1/d$*, и постоянная* d *определяется формулой* (18).

□ Приступая к доказательству первой части теоремы 1, предположим, что уравнение (1) имеет ограниченное решение, и докажем для него справедливость оценки (19). Прежде всего, рассмотрим любое неоднородное векторно-операторное дифференциальное уравнение (сравни с (4)):

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t), \tag{21}$$

в котором $\boldsymbol{B}(t) : \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathbb{H}$ есть измеримая ограниченная операторная функция, причем

$$|\boldsymbol{B}(t)| \leqslant l, \quad -\infty < t < +\infty, \tag{22}$$

а $\boldsymbol{f}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ есть произвольная измеримая ограниченная векторная функция.

Запишем уравнение (21), которое, очевидно, удовлетворяет всем требованиям теоремы 1 в виде

$$\mathcal{L}\boldsymbol{x} \equiv (d/dt - (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}(t)))\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}, \tag{23}$$

и покажем, что дифференциальный оператор $\mathcal{L} : W_2^1 \to L - 2$ обратим в L_2, причём

$$\|\mathcal{L}^{-1}\| \leqslant d, \tag{24}$$

где постоянная d определяется формулой (18).

Действительно, если $\mathcal{L}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}$, то в силу формулы (5) мы можем написать

$$\boldsymbol{x}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{G}(t-s)\{\boldsymbol{B}(s)\boldsymbol{x}(s) + \boldsymbol{f}(s)\}\, ds, \tag{25}$$

откуда в силу формулы (11) и условия (22) получаем $\|\boldsymbol{x}\|_2 \leqslant s(\boldsymbol{A})(l\|\boldsymbol{x}\|_2 + \|\boldsymbol{f}\|_2)$, что приводит к оценке $\|x\|_2 \leqslant s(\boldsymbol{A})/(1 - s(\boldsymbol{A})l)\|\boldsymbol{f}\|_2$, которая в силу произвольности $\boldsymbol{f} \in L_2$ и означает, что справедлива оценка (24).

Как известно из [5] и [6], из обратимости дифференциального оператора $\mathcal{L}$ в L_2 вытекает его обратимость в любом L_p. Для нас важна оценка Баскакова А.Г. [7, с. 413]

$$\|\mathcal{L}^{-1}\|_\infty \leqslant 4\|\mathcal{L}^{-1}\|_2(1 + (|\boldsymbol{A} + l)\|\mathcal{L}^{-1}\|_2), \tag{26}$$

которая в нашем случае в силу оценки (24) принимает вид

$$\|\mathcal{L}^{-1}\|_\infty \leqslant c, \tag{27}$$

где постоянная c определяется равенством (17). Мы видим, что для ограниченных решений уравнения (21) оценка (19) установлена.

Отметим, что оценка (26) в цитированной выше работе [7, с. 413] была установлена в предположении непрерывности $\boldsymbol{B}(t)$ в операторной топологии; мы же требуем от $\boldsymbol{B}(t)$ только измеримости и ограниченности. Однако, как легко убедиться в том, используя, скажем, усреднение по Стеклову, что оценка (26) справедлива и в этом случае.

Пусть теперь $\boldsymbol{x}(t)$ — произвольное решение слабо нелинейного дифференциального уравнения (1). Применяя приводимую ниже лемму 1 к непрерывной функции $x = x(t)$ и измеримой функции $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(t) \equiv \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t)) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{0})$, для которых в силу условия Липшица (13) верно неравенство $|\boldsymbol{y}(t)| \leqslant l|\boldsymbol{x}(t)|$, получаем, что существует такая измеримая операторная функция $\boldsymbol{B}(t) : \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathbb{H}$, что $\boldsymbol{f}(t, x(t)) - \boldsymbol{f}(t, 0) = \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{x}(t)$ и $|\boldsymbol{B}(t)| \leqslant l$. Таким образом, мы видим, что каждое решение слабо нелинейного уравнения (1) является одновременно и решением некоторого линейного уравнения (21), в котором $\boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{f}(t, 0) = \boldsymbol{f}_0(t)$ (см. (15)). Поэтому, если $\boldsymbol{x}(t)$ есть ограниченное решение слабо нелинейного уравнения (1), то $\boldsymbol{x}(t)$ является также ограниченным решением линейного уравнения (21), и, следовательно, для него по доказанному выше, справедлива оценка (19).

Итак, оценка (19) установлена нами в самом общем случае.

Использованный нами в предыдущем абзаце приём известен как “принцип линейного включения” [8, с. 159-161], [9].

Перейдём к доказательству существования и единственности ограниченного решения слабо нелинейного дифференциального уравнения (1). В периодическом случае, когда дополнительно выполнено условие $\boldsymbol{f}(t + \omega, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ при некотором $\omega > 0$, существование и единственность ω–периодического решения уравнения (1) даже в более общей ситуации доказаны в статье [10].

Это доказательство было основано на классическом принципе сжимающих отображений. Для доказательства существования и единственности ограниченного решения в общем случае, мы прибегнем к помощи леммы о продолжении гомеоморфизма по параметру [11, с. 26–27]. Слегка в изменённом виде она приведена здесь под именем леммы 3.

Возьмём в качестве банахова пространства $\mathbb{X}$ банахово пространство W^1_∞ абсолютно непрерывных $\boldsymbol{x}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ с ограниченными $\boldsymbol{x}(t)$ и $\dot{\boldsymbol{x}}(t)$

$$\|\dot{\boldsymbol{x}}\|_{W^1_\infty} = \|\boldsymbol{x}\|_\infty + \|\dot{\boldsymbol{x}}\|_\infty.$$

В качестве банахова пространства $\mathbb{Y}$ возьмём L_∞. Рассмотрим нелинейных дифференциальный оператор, зависящий от параметра μ:

$$\mathcal{F} \equiv \dot{\boldsymbol{x}}(t) - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) - \mu \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t)) : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}, \quad 0 \leqslant \mu \leqslant 1. \tag{28}$$

В условиях теоремы 1 при всех достаточно малых $\mu > 0$ этот оператор непрерывно обратим. Пусть $\boldsymbol{x}_1, x_2 \in \mathbb{X}$ и $\mathcal{F}_\mu = y_1$, $\mathcal{F}_\mu = y_2$. Тогда для $\Delta \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_1(t) - \boldsymbol{x}_2(t)$ можно написать

$$(\dot{\Delta \boldsymbol{x}})(t) - \boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{x}(t) - \mu\{\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}_1(t)) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}_2(t))\} = \boldsymbol{y}_1(t) - \boldsymbol{y}_2(t).$$

По лемме 1 можно указать такую измеримую ограниченную операторную функцию $\boldsymbol{B}(t)$: $\mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathbb{H}$, что $|\boldsymbol{B}(t)| \leqslant l$, и

$$(\dot{\Delta \boldsymbol{x}})(t) - \boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{x}(t) - \mu\boldsymbol{B}(t)\Delta\boldsymbol{x}(t) = \Delta\boldsymbol{y}(t). \tag{29}$$

Мы видим, что $\Delta\boldsymbol{x}(t)$ есть ограниченное решение линейного уравнения. По доказанному ранее (по оценке (19)) имеем
$$\|\Delta\boldsymbol{x}\|_\infty \leqslant c(\mu)\|\Delta\boldsymbol{y}\|_\infty. \tag{30}$$
Поэтому
$$\|\mathcal{F}^{-1}(\boldsymbol{y}_1) - \mathcal{F}^{-1}(\boldsymbol{y}_2)\|_\infty \leqslant c\|\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2\| \tag{31}$$
и выполнено второе требование леммы 3.

Наконец, при любых μ и γ из отрезка $[0,1]$ в силу условия Липшица имеем

$$\begin{gathered}\|\mathcal{F}_\mu(\boldsymbol{x}_1) - \mathcal{F}_\gamma(\boldsymbol{x}_1) - (\mathcal{F}_\mu(\boldsymbol{x}_2) - \mathcal{F}_\gamma(\boldsymbol{x}_2))\| = \\ = \|\dot{\boldsymbol{x}}_1 - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 - \mu\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}_1) - (\dot{\boldsymbol{x}}_1 - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 - \gamma\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}_1)) - (\dot{\boldsymbol{x}}_2 - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 - \mu\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}_2) - (\dot{\boldsymbol{x}}_2 - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 - \gamma\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}_2)))\| = \\ = \|(\gamma-\mu)(\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}_1) - \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}_2))\| = |\mu-\gamma|\cdot\|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}_1) - \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}_2)\| \leqslant l|\mu-\gamma|\cdot\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\|.\end{gathered}$$

Третье требование леммы 3 также выполнено.

Перейдём к доказательству второй части теоремы 1.

Пусть оператор $\boldsymbol{A}$ гурвицев, то есть выполнено условие (8). Покажем, что существующее в этих условиях единственное ограниченное решение уравнения (1) является абсолютно устойчивым, причем имеет место соотношение (20). Без ограничения общности можно считать, что единственным ограниченным решением уравнения (1) является нулевое решение, то есть $\boldsymbol{f}(t,0) \equiv 0$. После замены
$$\boldsymbol{x} = e^{-t\gamma}\boldsymbol{y} \tag{32}$$
уравнение (1) примет вид
$$\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{B}_\gamma\boldsymbol{y} + \boldsymbol{g}_\gamma(t,\boldsymbol{y}), \tag{33}$$
где
$$\boldsymbol{B}_\gamma = \gamma\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{g}_\gamma(t,x[y]) = e^{t\gamma}\boldsymbol{f}(t,e^{-t\gamma}\boldsymbol{y}). \tag{34}$$
Проверим, что при всех γ, для которых $0 < \gamma < 1/d$, уравнение (33) удовлетворяет всем требованиям теоремы 1.

Так как при любом $\theta \in \mathbb{R}$ оператор $i\theta\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ непрерывно обратим, то при выполнении условия $0 < \gamma < |(i\theta\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}|$ оператор $i\theta\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}_\gamma$ также непрерывно обратим. Если при этом
$$0 < \gamma < \min_{-\infty<\theta<+\infty}\frac{1}{|(i\theta\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}|} = \frac{1}{s(\boldsymbol{A})} \tag{35}$$
(см. (8)), то при всех θ оператор $i\theta\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}_\gamma$ имеет непрерывно обратный. В силу того, что полученное утверждение верно при любом γ, удовлетворяющем ограничению (35), то оператор $\boldsymbol{B}_\gamma$ также гурвицев.

Покажем, что при выполнении условия (35) имеет место оценка
$$s(\boldsymbol{B}_\gamma) \leqslant \frac{s(\boldsymbol{A})}{1-\gamma s(\boldsymbol{A})}. \tag{36}$$

Действительно, так как
$$(i\theta\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}_\gamma)^{-1} = (\boldsymbol{I} - \gamma(i\theta\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1})^{-1}(i\theta\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$$
и
$$(\boldsymbol{I} - \gamma(i\theta\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\gamma^k(i\theta\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-k},$$

то

$$|(i\theta \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}_\gamma)^{-1}| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k |(i\theta \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}|^k (i\theta \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k (s(\boldsymbol{A}))^{k+1} = \frac{s(\boldsymbol{A})}{1 - \gamma s(\boldsymbol{A})},$$

откуда и вытекает оценка (36).

Отметим далее, что в силу (13) согласно (34) векторная функция $\boldsymbol{g}_\gamma(t, \boldsymbol{y})$ также удовлетворяет условию Липшица

$$|\boldsymbol{g}_\gamma(t, \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{g}_\gamma(x, \boldsymbol{z})| \leqslant l |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}| \tag{37}$$

с той же самой константой l. Далее, $\boldsymbol{g}_\gamma(t, 0) \equiv 0$ и $\boldsymbol{g}_\gamma(t, \boldsymbol{y})$ измерима по t. Поэтому если выполнено условие $s(\boldsymbol{B}_\gamma) l < 1$, то согласно [12, теорема 4] нулевое решение уравнения (33) абсолютно устойчиво, что влечёт за собой стремление к нулю любого решения этого уравнения при $t \to +\infty$. В силу оценки (36) последнее заведомо будет выполнено, если имеет место неравенство $s(\boldsymbol{A})/(1 - \gamma s(\boldsymbol{A})) < 1$, которое равносильно тому, что $0 < \gamma < 1/d$. ■

Можно показать, что существующее в условиях теоремы 1 ограниченное решение уравнения (1) является стационарным (то есть независящим от времени), периодическим, почти периодическим или рекуррентным в зависимости от того, стационарной, периодической, почти периодической или рекуррентной по t, является $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ соответственно.

Заметим, что если в формулах (16), (17) и (18) заменить $s(\boldsymbol{A})$ на $k(x[A])$ или даже на $\|\boldsymbol{K}\|_{\mathbb{C}}$ (см. неравенства (10) и (12)), то доказательство теоремы 1 существенно упрощается и сводится в своей первой части к стандартному применению классического принципа сжимающих отображений к интегральному оператору, определяемому интегральным уравнением

$$\boldsymbol{x}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{G}(t - s) \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s))\, ds$$

и рассматриваемому в пространстве $\mathbb{C}$ (это сделано в статье [13]).

Лемма 1. *Пусть $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ — фиксированные векторы из $\mathbb{H}$, причём*

$$|\boldsymbol{y}| \leqslant l |\boldsymbol{x}|, \tag{38}$$

где l — некоторая неотрицательная постоянная. Тогда можно построить такой линейный оператор $\boldsymbol{B} \in \operatorname{End}\mathbb{H}$, что

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}, \quad |\boldsymbol{B}| \leqslant l. \tag{39}$$

□ В статье [1] эта лемма 1 доказана излишне сложно. Если $\boldsymbol{x} = 0$, то согласно (38) и $\boldsymbol{y} = 0$. В этом случае положим $\boldsymbol{B} = 0$, и требования (39) выполнены. Если $\boldsymbol{x} \neq 0$, то положим

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{h} = \frac{(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} \boldsymbol{y}. \tag{40}$$

Определение корректно ($\boldsymbol{x} \neq 0$) и $\boldsymbol{B}$ есть линейный ограниченный оператор из $\operatorname{End}\mathbb{H}$. Далее, $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})\boldsymbol{y}/(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$ и по неравенству Шварца

$$|\boldsymbol{B}\boldsymbol{h}| \leqslant \frac{|\boldsymbol{h}||\boldsymbol{x}|}{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} |\boldsymbol{y}| = \frac{|\boldsymbol{y}|}{|\boldsymbol{x}|} |\boldsymbol{h}| \leqslant l |\boldsymbol{h}|,$$

откуда в силу произвольности $\boldsymbol{h}$ выполняется оценка $|\boldsymbol{h}| \leqslant l$. Мы видим, что все требования (39) снова выполнены. ■

Лемма 2 [1]. *Пусть $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ — фиксированные векторы из $\mathbb{H}$, причём*

$$|\boldsymbol{y}| \leqslant m + l |\boldsymbol{x}|, \tag{41}$$

где m и l — некоторые неотрицательные числа. Тогда можно построить такой вектор $\boldsymbol{c}$ из $\mathbb{H}$ и линейный оператор $\boldsymbol{B} \in \operatorname{End}\mathbb{H}$, что

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}, \quad \text{где} \quad |\boldsymbol{c}| \leqslant m \quad \text{и} \quad |\boldsymbol{B}| \leqslant l. \tag{42}$$

Пусть $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ — банаховы пространства. Условимся называть нелинейный оператор $\boldsymbol{F} : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, действующий из банахова пространства $\mathbb{X}$ в банахово пространство $\mathbb{Y}$, непрерывно обратимым, если он осуществляет гомеоморфное отображение $\mathbb{X}$ на $\mathbb{Y}$.

Лемма 3 (сравни с [11, с. 26–27]). *Пусть задано семейство нелинейных операторов $\boldsymbol{F} : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, $0 \leqslant \mu \leqslant 1$, действующих из банахова пространства $\mathbb{X}$ в банахово пространство $\mathbb{Y}$, причём выполнены условия:*

1) Оператор $\boldsymbol{F}_0$ непрерывно обратим;

2) Если при некотором μ, $0 \leqslant \mu \leqslant 1$, оператор $\boldsymbol{F}_\mu$ непрерывно обратим, то обратный оператор $\boldsymbol{F}_\mu^{-1} : \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|\boldsymbol{F}_\mu^{-1}(\boldsymbol{y}_1) - \boldsymbol{F}_\mu^{-1}(\boldsymbol{y}_2)\| \leqslant c\|\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2\| \tag{43}$$

с фиксированной константой Липшица c;

3) При любых μ и ν, $0 \leqslant \mu, \nu \leqslant 1$, разность $\boldsymbol{F}_\mu - \boldsymbol{F}_\gamma$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|\boldsymbol{F}_\mu(x_1) - \boldsymbol{F}_\mu(x_1) - \{\boldsymbol{F}_\mu(x_2) - \boldsymbol{F}_\nu(x_2)\}\| \leqslant \delta(|\mu - \nu|)\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\| \tag{44}$$

с фиксированной функцией $\delta(|\mu - \nu|) : [0, 1] \to \mathbb{R}$, непрерывной в нуле, причём $\delta(0) = 0$.

Тогда оператор $\boldsymbol{F}_\mu$ непрерывно обратим при любом $\mu, 0 \leqslant \mu \leqslant 1$, и, следовательно, уравнение

$$\boldsymbol{F}_\mu(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y} \tag{45}$$

при любом $\boldsymbol{y}$ из $\mathbb{X}$ имеет единственное решение $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}_\mu^{-1}(\boldsymbol{y})$ из $\mathbb{X}$.

$\square$ Пусть при некотором μ, $0 \leqslant \mu \leqslant 1$ нелинейный оператор $\boldsymbol{F}_\mu$ непрерывно обратим (например, $\mu = 0$ см. условие 1)). Проверим, что все нелинейные операторы $\boldsymbol{F}_\nu$ непрерывно обратимы, если разность $\nu - \mu$ по модулю достаточно мала. Покажем, что уравнение

$$\boldsymbol{F}_\nu(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y} \tag{46}$$

при любом $\boldsymbol{y}$ из $\mathbb{Y}$ имеет единственное решение $\boldsymbol{x}$ из $\mathbb{X}$. Перепишем это уравнение в виде, допускающем применение принципа сжимающих отображений:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}_\mu^{-1}\{\boldsymbol{F}_\mu(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{F}_\nu(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{y}\} \equiv \Phi_\mu(\boldsymbol{x}). \tag{47}$$

Проверим, что нелинейный оператор $\Phi_\nu(\boldsymbol{x}) : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ при достаточно малой разнице $\nu - \mu$ по модулю является сжимающим. Действительно, так как

$$\Phi_\nu(\boldsymbol{x}_1) - \Phi_\nu(\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{F}_\mu^{-1}\{\boldsymbol{F}_\mu(\boldsymbol{x}_1) - \boldsymbol{F}_\nu(\boldsymbol{x}_1) + \boldsymbol{y}\} - \boldsymbol{F}_\mu^{-1}\{\boldsymbol{F}_\mu(x_2) - \boldsymbol{F}_\nu(\boldsymbol{x}_2) + \boldsymbol{y}\},$$

то в силу условий 2) и 3) имеем

$$\|\Phi_\nu(\boldsymbol{x}_1) - \Phi_\nu(\boldsymbol{x}_2)\| \leqslant c\|\boldsymbol{F}_\mu(\boldsymbol{x} - 1) - \boldsymbol{F}_\nu(\boldsymbol{x}_1) - \boldsymbol{F}_\mu(\boldsymbol{x}_2) + \boldsymbol{F}_\nu(\boldsymbol{x}_2)\| \leqslant c\delta(|\mu - \nu|)\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\|,$$

и при

$$\delta(|\mu - \nu|) < 1/c \tag{48}$$

отображение Φ_ν оказывается сжимающим. $\blacksquare$

Вернёмся к уравнению (1), в котором относительно линейной части — оператора $\boldsymbol{A}$ — сохраним прежнее предположение (2), а предположение относительно нелинейной функции $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ немного ослабим: считая по-прежнему, что $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ измерима по t и непрерывна по $\boldsymbol{x}$ (условие Кратеодори) вместо условия Липшица (13) потребуем только выполнения условия типа Липшица (14).

Теорема 2. *Пусть выполнено условие типа Липшица* (14). *Пусть выполнено основное частотное условие* (16). *Пусть выполнено условие компактности: для любых отрезка* $[a,b]$ *и числа* $r>0$ *множество* $\{\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})\}$ *при* $t\in[a,b]$ *и* $|\boldsymbol{x}|\leqslant r$ *компактно в* $\mathbb{H}$.

Тогда слабо нелинейное дифференциальное уравнение (1) *имеет по крайней мере одно ограниченное решение. Для любого ограниченного решения* $\boldsymbol{x}(t)$ *этого уравнения справедлива оценка*

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty\leqslant cm\equiv r, \tag{49}$$

где постоянная c *определена формулой* (17), *а постоянная* m *взята из условия типа Липшица* (14).

Если оператор $\boldsymbol{A}$ *гурвицев, то уравнение* (1) *является равномерно* S*-диссипативным, где*

$$S=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{H}:|\boldsymbol{x}|\leqslant r\}. \tag{50}$$

□ Прежде всего установим оценку (49). Пусть $\boldsymbol{x}(t)$ — произвольное решение слабо нелинейного дифференциального уравнения (1), определённое на всей числовой прямой $\mathbb{R}$: $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}(t))$. Применив лемму 2 к непрерывной функции $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$ и измеримой функции $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(t)$, где $\boldsymbol{y}(t)\equiv\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}(t))$, на основании условия типа Липшица (14), получим, что существуют такие измеримые ограниченные векторная функция $\boldsymbol{c}(t)$ и операторная функция $\boldsymbol{B}(t)$, для которых $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}(t))=\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{c}(t)$, причём $|\boldsymbol{c}(t)|\leqslant m$, а $|\boldsymbol{B}(t)|\leqslant l$. Таким образом мы видим, что каждое решение слабо нелинейного дифференциального уравнения (1) является одновременно и решением некоторого линейного дифференциального уравнения (21), в котором $\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{c}(t)$, а операторная функция $\boldsymbol{B}(t)$ удовлетворяет ограничению (22). Поэтому если $\boldsymbol{x}(t)$ есть ограниченное решение слабо нелинейного дифференциального уравнения (1), то $x(t)$ является также ограниченным решением построенного нами линейного неоднородного дифференциального уравнения (21) и, следовательно, для него, согласно формуле (27), справедлива оценка $\|x\|_\infty\leqslant c\|\boldsymbol{f}\|_\infty$. Но в нашем случае $\|\boldsymbol{f}\|_\infty=\|\boldsymbol{c}\|_\infty\leqslant m$. Отсюда и вытекает оценка (49).

Существование ограниченного решения уравнения (10) может быть установлено следующим образом. Фиксируем произвольный отрезок $[a,b]$ и рассмотрим на нём краевую задачу

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}),\quad a\leqslant t\leqslant b;\boldsymbol{x}(a)=\boldsymbol{x}(b). \tag{51}$$

Её можно свести к нелинейному векторно-операторному уравнению

$$\boldsymbol{x}(t)=\int\limits_a^b\boldsymbol{G}(t-s,\omega)\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}(s))\,ds\quad(\omega=b-a), \tag{52}$$

где операторная функция Грина $\boldsymbol{G}(t,\omega)$ есть приведённая операторная ω-периодичная функция Грина, определённая формулой

$$\boldsymbol{G}(t,\omega)=(\boldsymbol{I}-e^{\boldsymbol{A}\omega})^{-1}e^{(t-a)\boldsymbol{A}},\quad a\leqslant t\leqslant b. \tag{53}$$

Если обозначить через $\mathcal{F}$ интегральный оператор, определяемый правой частью формулы (52), то он действует в пространстве $L_2[a,b](\mathbb{H})$ и в силу условия (14) удовлетворяет неравенству

$$\|\mathcal{F}\boldsymbol{x}\|_{L_2[a,b]}\leqslant s(\boldsymbol{A})\{m+l\|\boldsymbol{x}\|_{L_2[a,b]}\}, \tag{54}$$

В силу основного частотного условия (16) $q_\sigma \equiv s(\boldsymbol{A})l < 1$. Поэтому оператор $\mathcal{F}$ отображает шар S в себя: $\mathcal{F}S \subseteq S$, где $S = \{\boldsymbol{x} \in L_2[a,b] : \|x\|_{L_2[a,b]} \leqslant \rho\}$, $\rho = s(\boldsymbol{A})m/(1 - q_\sigma)$. Так как оператор $\mathcal{F}$ непрерывен и компактен (вполне непрерывен), то согласно принципу Шаудера он имеет в шаре S по крайней мере одну неподвижную точку, то есть краевая задача (51) имеет по крайней мере одно решение $\boldsymbol{x}[a,b](t)$, $a \leqslant t \leqslant b$.

Это решение, будучи продолжением ω-периодичным образом на всю числовую прямую, является ω-периодичесвикм решением слабо нелинейного ω-периодичного дифференциального уравнения

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \widetilde{\boldsymbol{f}}(t, \boldsymbol{x}), \tag{55}$$

у которого $\widetilde{\boldsymbol{f}}(t, \boldsymbol{x})$ совпадает с $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ при $a \leqslant t \leqslant b$, и на остальные t продолжимо ω–периодическим образом. Нетрудно видеть, что $\widetilde{\boldsymbol{f}}(t, \boldsymbol{x})$ обладает теми же общими свойствами, что и $\boldsymbol{f}(t, x)$ (то есть удовлетворяет всем условиям теоремы 2); в частности, она удовлетворяет условию типа Липшица (14). Так как ω–периодическое решение уравнения (55) является ограниченным решением этого уравнения, то по уже доказанному выше, для него справедлива оценка

$$|\boldsymbol{x}[a,b](t)| \leqslant r, \quad a \leqslant t \leqslant b. \tag{56}$$

Теперь рассмотрим произвольную последовательность отрезков $[a_k, b_k]$, где $a_k < b_k$ и $a_k \to -\infty$, а $b_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$. Для каждого отрезка $[a_k, b_k]$ рассмотрим решения $\boldsymbol{x}_k(t) = \boldsymbol{x}[a_k, b_k](t)$. Для нас важно, что

$$|\boldsymbol{x}_k(t)| \leqslant r, \quad |\dot{\boldsymbol{x}}_k(t)| \leqslant \dot{r} \equiv m + (|\boldsymbol{A} + l)r \quad \text{при} \quad a_k \leqslant t \leqslant b_k. \tag{57}$$

По теореме Арцела-Асколи с помощью канторовского диагонального процесса из последовательности решений $\boldsymbol{x}_k(t)$ можно выделить такую подпоследовательность $\boldsymbol{x}_{k_j}(t)$, которая сходится к некоторой векторной функции $\boldsymbol{x}(t)$ равномерно на каждом конечном промежутке, то есть

$$\boldsymbol{x}_{k_j}(t) \Longrightarrow \boldsymbol{x}(t) \text{ локально}. \tag{58}$$

Ясно, что предельная функция $\boldsymbol{x}(t)$ является решением уравнения (1), определённым при всех t, и ограниченным, так как в силу (57) и (58) имеем $|\boldsymbol{x}(t)| \leqslant r$, $-\infty < t < +\infty$. Итак, существование ограниченного решения уравнения (1) доказано.

Теперь перейдём к доказательству второй части теоремы 2.

Пусть оператор $\boldsymbol{A}$ гурвицев. Тогда нетрудно видеть, что совокупность всех решений уравнений вида (1) с фиксированным оператором $\boldsymbol{A} \in \operatorname{End}\mathbb{H}$ и всевозможными нелинейностями $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$, подчинёнными требованию (14) с фиксированными m и l, образуют *нормальное семейство* [12]. Поэтому в конечномерном случае, согласно [12, теорема 9] для равномерного S-диссипативного уравнения (1) необходимо и достаточно, чтобы все ограниченные решения $\boldsymbol{x}(t)$ этого уравнения лежали в шаре S, то есть $\boldsymbol{x}(t) \in S$ при $-\infty < t < +\infty$. Но полученная нами оценка (49) говорит о том, что это требование выполнено. Поэтому уравнение (1) является равномерно S-диссипативным. Эти же рассуждения проходят и в бесконечномерном случае в силу содержащегося в условиях теоремы 2 требования компактности. ■

Можно показать, что в условиях теоремы 2 всегда существует такое ограниченное решение, которое является стационарным, периодическим, почти периодическим или рекуррентным в зависимости от того, стационарной, периодической, почти периодической или рекурентной по t является $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ (сравни с [14]).

Отметим работы [15]–[22], в которых получены интересные результаты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Перов А.И. Частотные признаки существования ограниченных решений / А.И. Перов // Дифференц. уравнения. — 2007. — Т. 43, № 7. — С. 896–904.

[2] Далецкий Ю.Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн. — М.: Наука, 1970. — 536 с.

[3] Шилов Г.Е. Математический анализ (спец. курс) / Г.Е. Шилов. — М.: Физматгиз, 1961. — 436 с.

[4] Перов А.И. Ограниченные решения нелинейных векторно-матричных дифференциальных уравнений n-го порядка / А.И. Перов, И.Д. Коструб. — Воронеж: ИПЦ Научная книга, 2013. — 228 с.

[5] Тюрин В.М. Об обратимости оператора $d/dt - A(t)$ в некоторых функциональных пространствах / В.М. Тюрин // Математические заметки. — 1979. — Т. 25, № 4. — С. 585–590.

[6] Баскаков А.Г. Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов / А.Г. Баскаков // Функциональный анализ и его приложения. — 1996. — Т. 30, № 3. — С. 1–11.

[7] Баскаков А.Г. Оценки ограниченных решений линейных дифференциальных уравнений / А.Г. Баскаков // Дифференц. уравнения. — 2003. — Т. 39, № 3. — С. 413-415.

[8] Теория показателей Ляпунова и её приложения к вопросам устойчивости / В.Ф. Былов, Р.Э. Виноград, Д.М. Гробман, В.В. Немыцкий. — М.: Наука, 1966. — 576 с.

[9] Былов Б.Ф. Принцип линейного включения для систем дифференциальных уравнений / Б.Ф. Былов, Д.М. Гробман // Успехи математических наук. — 1962. — Т. 17, вып. 3. — С. 159–161.

[10] Никитин О.И. К вопросу о приближённом нахождении периодический решений дифференциальных уравнений / О.И. Никитин, А.И. Перов // Дифференц. уравнения. — 1983. — Т. 19, № 11. — С. 2001–2004.

[11] Трубников Ю.В. Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями / Ю.В. Трубников, А.И. Перов. — Минск: Наука и техника, 1989. — 200 с.

[12] Красносельский М.А. Принцип отсутствия ограниченных решений в проблеме абсолютной устойчивости / М.А. Красносельский, А.В. Покровский // ДАН СССР. — 1977. — Т. 233, № 3. — С. 293–296.

[13] Перов А.И. Ограниченные решения векторно-операторных нелинейных дифференциальных уравнений n-го порядка, не разрешённых относительно старшей производной / А.И. Перов, Е.В. Иванова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2012. — № 2. — С. 198–206.

[14] Красносельский М.А. Нелинейные почти периодические колебания / М.А. Красносельский, В.Ш. Бурд, Ю.С. Колесов. — М.: Наука, 1970. — 352 с.

[15] Донцова М.В. Условия нелокальной разрешимости задачи коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с непрерывными и ограниченными правыми частями / М.В. Донцова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 4. — С. 116–130.

[16] Филипковская М.С. Глобальная разрешимость недоопределенной сингулярной системы дифференциально-алгебраических уравнений / М.С. Филипковская // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 3. — С. 168–181.

[17] Чуканов С.Н. Декомпозиция векторного поля динамической системы на основе построения оператора гомотопии / С.Н. Чуканов, Д.В. Ульянов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 189-195.

[18] Баев А.Д. Теоремы об ограниченности и композиции для одного класса весовых псевдодифференциальных операторов / А.Д. Баев, Р.А. Ковалевский // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 39–49.

[19] Шабров С.А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С.А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 232–250.

[20] Зачепа В.Р. Регулярные ветвления решений неразрешенных относительно производной дифференциальных уравнений / В.Р. Зачепа // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 86–96.

[21] Лылов Е.В. Анализ математической модели, реализуемой в виде гиперболического уравнения с двумя независимыми переменными / Е.В. Лылов, С.А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 2. — С. 230-235.

[22] Зубова С.П. О разрешимости задачи Коши для дескрипторного псевдорегулярного уравнения в банаховом пространстве / С.П. Зубова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 2. — С. 192–198.

REFERENCES

[1] Perov A.I. Frequency for the existence of the bounded solutions. [Perov A.I. Chastotnye priznaki sushhestvovaniya ogranichennyx reshenij]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2007, Vol. 43, no. 7, pp. 896–904.

[2] Daletskii Y.L., Krein M.G. Stability of solutions of differential equations in Banach space. [Daleckij Yu.L., Krejn M.G. Ustojchivost' reshenij differencial'nyx uravnenij v banaxovom prostranstve]. Moscow: Science, 1970, 536 p.

[3] Shilov G.E. Mathematical analysis (special rate). [Shilov G.E. Matematicheskij analiz (spec. kurs)]. Moscow: Fizmatgiz, 1961, 436 p.

[4] Perov A.I., Kostrub I.D. Bounded solutions of nonlinear vector-matrix differential equations of n-th order. [Perov A.I., Kostrub I.D. Ogranichennye resheniya nelinejnyx vektorno-matrichnyx differencial'nyx uravnenij n-go poryadka]. Voronezh: CPI Science Book, 2013, 228 p.

[5] Tyurin V.M. Reciprocity of the operator $d/dt - A(t)$ in several functional spaces. [Tyurin V.M. Ob obratimosti operatora $d/dt - A(t)$ v nekotoryx funkcional'nyx prostranstvax]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 1979, vol. 25, iss. 4, pp. 585–590.

[6] Baskakov A.G. Semigroups of difference operators in spectral analysis of linear differential operators. [Baskakov A.G. Polugruppy raznostnyx operatorov v spektral'nom analize linejnyx differencial'nyx operatorov]. *Funkcional'nyj analiz i ego prilozheniya — Functional analysis and its applications*, 1996, vol. 30, iss. 3, pp. 1–11.

[7] Baskakov A.G. Estimates of bounded solutions of linear differential equations. [Baskakov A.G. Ocenki ogranichennyx reshenij linejnyx differencial'nyx uravnenij]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2003, vol. 39, iss. 3, pp. 413–415.

[8] Bylov V.F., Vinograd R.E., Grobman D.M., Nemytskii V.V. The theory of Lyapunov exponents and its application to issues of the stability. [Bylov V.F., Vinograd R.E'., Grobman D.M., Nemyckij V.V. Teoriya pokazatelej Lyapunova i eyo prilozheniya k voprosam ustojchivosti]. Moscow, Science, 1966, 576 p.

[9] Bylov B.F., Grobman D.M. The principle for linear switching of the systems of differential equations. [Bylov B.F., Grobman D.M. Princip linejnogo vklyucheniya dlya sistem differencial'nyx uravnenij]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 1962, vol. 17, iss. 3, pp. 159–161.

[10] Nikitin O.I., Perov A.I. About the approximate determination of periodic solutions of differential equations. [Nikitin O.I., Perov A.I. K voprosu o priblizhyonnom naxozhdenii periodicheskij reshenij differencial'nyx uravnenij]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 1983, vol. 19, iss. 11, pp. 2001–2004.

[11] Trubnikov Y.V., Perov A.I. Differential equations with monotone nonlinearities. [Trubnikov Yu.V., Perov A.I. Differencial'nye uravneniya s monotonnymi nelinejnostyami]. Minsk, Science and Technology, 1989, 200 p.

[12] Krasnosel'skii M.A., Pokrovskii A.V. The principle of absence of bounded solutions to the problem of absolute stability. [Krasnosel'skij M.A., Pokrovskij A.V. Princip otsutstviya

ogranichennyx reshenij v probleme absolyutnoj ustojchivosti]. *DAN SSSR — DAN USSR*, 1977, vol. 233, iss. 3, pp. 293–296.

[13] Perov A.I., Ivanova E.V. Bounded solutions of vector-operator nonlinear differential equations of the n-th order is not allowed for the highest derivative. [Perov A.I., Ivanova E.V. Ogranichennye resheniya vektorno-operatornyx nelinejnyx differencial'nyx uravnenij n-go poryadka, ne razreshyonnyx otnositel'no starshej proizvodnoj]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 2, pp. 198–206.

[14] Krasnoselskii M.A., Burd V.S., Kolesov Y.S. Nonlinear almost periodic oscillations. [Krasnosel'skij M.A., Burd V.Sh., Kolesov Yu.S. Nelinejnye pochti periodicheskie kolebaniya]. Moscow: Science, 1970, 352 p.

[15] Dontsova M.V. Nonlocal Resolvability Conditions of the Cauchy Problem for a System of First Order Partial Differential Equations with Continuous and Bounded Right-Hand Sides. [Doncova M.V. Usloviya nelokal'noj razreshimosti zadachi koshi dlya sistemy differencial'nyx uravnenij v chastnyx proizvodnyx pervogo poryadka s nepreryvnymi i ogranichennymi pravymi chastyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 4, pp. 116–130.

[16] Filipkovskaya M.S. The Global Solvability of the Singular Set of Differential-Algebraic Equations. [Filipkovskaya M.S. Global'naya razreshimost' nedoopredelennoj singulyarnoj sistemy differencial'no-algebraicheskix uravnenij]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 3, pp. 168–181.

[17] Chukanov S.N., Ulyanov D.V. Decomposition of the Vector Field of Dynamical System by Constructing a Homotopy Operator. [Chukanov S.N., Ul'yanov D.V. Dekompoziciya vektornogo polya dinamicheskoj sistemy na osnove postroeniya operatora gomotopii]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 2, pp. 189–195.

[18] Baev A.D., Kovalevsky R.A. Theorems on Boundedness and Composition for a Class of Weighted Pseudodifferential Operators. [Baev A.D., Kovalevskij R.A. Teoremy ob ogranichennosti i kompozicii dlya odnogo klassa vesovyx psevdodifferencial'nyx operatorov]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 1, pp. 39–49.

[19] Shabrov S.A. Mathematical Model of Small Deformations of a Bar System with Internal Features. [Shabrov S.A. Ob odnoj matematicheskoj modeli malyx deformacij sterzhnevoj sistemy s vnutrennimi osobennostyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 1, pp. 232–250.

[20] Zachepa V.R. Regular Branching of Solutions to Differential Equations Unresolved with Respect to a Derivative. [Zachepa V.R. Regulyarnye vetvleniya reshenij nerazreshennyx otnositel'no proizvodnoj differencial'nyx uravnenij]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 1, pp. 86–96.

[21] Lylov E.V., Shabrov S.A. Analysis of mathematical models implemented in the form of a hyperbolic equation with two independent variables. [Lylov E.V., Shabrov S.A. Analiz matematicheskoj modeli, realizuemoj v vide giperbolicheskogo uravneniya s dvumya nezavisimymi peremennymi]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 2, pp. 230-235.

[22] Zubova S.P. On the Solvability of the Cauchy Problem for the Descriptor

Quasiregular Equations in Banach Spaces. [Zubova S.P. O razreshimosti zadachi Koshi dlya deskriptornogo psevdoregulyarnogo uravneniya v banaxovom prostranstve]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 2, pp. 192–198.

Иванова Елена Васильевна, аспирант кафедры нелинейных колебаний факультета прикладной математики, информатики и механики ВГУ, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: lena.ivanova.lica@yandex.ru
Тел.: 8(920)469–29–02

Ivanova Elena Vasilevna, graduate student of nonlinear oscillations of the Faculty of Applied Mathematics, Informatics and Mechanics of Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: lena.ivanova.lica@yandex.ru
Tel.: 8(920)469–29–02