УДК 004.7:519.872:519.23

АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИК НЕЗАВЕРШЕННОЙ РАБОТЫ В СТАЦИОНАРНОЙ СМО С БЕСКОНЕЧНЫМ НАКОПИТЕЛЕМ И СКАЧКООБРАЗНОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ВХОДНОГО ПОТОКА

О. В. Бондрова

Дальневосточный Федеральный Университет

Поступила в редакцию 02.06.2014 г.

Аннотация: работа посвящена исследованию моделей СМО в компьютерных сетях и имеет прикладное применение. В работе исследуются характеристики незавершенной работы в моделях систем массового обслуживания с бесконечным накопителем, одним обслуживающим прибором с экспоненциальным обслуживанием. На вход СМО поступает дважды стохастический пуассоновский поток, интенсивность которого $\lambda(t)$ является скачкообразным процессом с интервалами постоянства, распределенными по экспоненциальному закону. Предполагается, что значения процесса $\lambda(t)$ в точках разрыва слева и справа независимы. В данной работе для моделей систем массового обслуживания $M/G/1$ и $M/M/1$ (в обозначениях Кендала) со скачкообразной интенсивностью входного потока получены следующие результаты: выведены уравнения типа Такача относительно стационарных и нестационарных характеристик незавершенной работы; найдены преобразования Лапласа и Лапласа-Стилтьеса решений стационарных уравнений. Для СМО $M/M/1$: получены стационарные моменты незавершенной работы, доказано существование и единственность стационарного режима по незавершенной работе.

Ключевые слова: система массового обслуживания, скачкообразная интенсивность дважды стохастического пуассоновского потока, уравнения Такача, незавершенная работа.

ANALISIS OF THE CHARACTERISTICS OF UNFINISHED WORK IN STATIONARY QUEUING SYSTEMS WITH INFINITE STORAGE AND ABRUPT INTENSITY OF THE INPUT STREAM

O. V. Bondrova

Abstract: the work is devoted to the topical subject - study of queuing systems (QS) models in computer networks and has important applications. The work investigates the characteristics of unfinished work in models of queuing systems with an infinite tape drive, one adjustment device with an exponential service. At the entrance of QS comes twice stochastic Poisson stream of intensity of which $\lambda(t)$ is spasmodic process with intervals of constancy, distributed according to the exponential law. It is assumed that the value of the process $\lambda(t)$ in the points of the gap on the left and on the right are independent. In this work for the models of queuing systems $M/G/1$ and $M/M/1$ (in the Kendall notation) with the hopping intensity of the input stream, the following results are obtained: the equations are derived of Tacasc type for stationary and non-stationary characteristics of the unfinished work; the Laplace-Stltiesa transforms of stationary equations solutions are found. For QS $M/M/1$: the stationary moments of the unfinished work are derived, the existence and uniqueness of a stationary regime of the unfinished work is proved.

Keywords: queuing systems, spasmodic the twice stochastic intensity of the Poisson stream, equations of Tacasc type, unfinished work.

ВВЕДЕНИЕ

Локальные сети (ЛС) в учреждениях и офисах создают для их пользователей новые возможности интегрального характера благодаря прикладным программам. Развивается автоматизированный документооборот, создаются различные массивы управленческой, коммерческой и другой информации общего назначения.

Наличие рабочих мест, подключенных не только к локальным ресурсам, но и к мировой базе данных в Интернет, создало новую ситуацию для администраторов ЛС. Появилась необходимость мобильно реагировать на изменяющиеся запросы пользователей и соответствующим образом "подстраивать" ресурсы ЛС: увеличивать или уменьшать производительности серверных станций, возможно, изменять топологию ЛС, создавать дополнительные ресурсы ЛС в виде новых маршрутизаторов.

В настоящее время активно проводятся исследования по проектированию и анализу функционирования информационных сетей. Основная цель данных исследований — разработка положений и научно обоснованных технических решений, обеспечивающих эффективность и повышение качества администрирования информационных сетей (ИС).

Аналитическими моделями ИС в целом и отдельных ее элементов являются, соответственно, системы массового обслуживания (СМО) и сети СМО. Вопросы моделирования СМО в ИС исследуются в теории массового обслуживания, частные результаты такого исследования приведены в работе [1], [2].

Одним из важных вероятностных процессов теории массового обслуживания является незавершенная работа $U(t)$, которая представляет собой количество времени, необходимое для освобождения системы от всех заявок находящихся в ней в момент времени t. В момент прихода очередной заявки незавершенная работа равна времени ожидания заявки начала обслуживания. Незавершенная работа в системах массового обслуживания с постоянными параметрами достаточно хорошо изучена в работах [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10]. Однако на практике чаще приходится сталкиваться с системами, параметры которых изменяются с течением времени.

Кроме того, функционирование узлов локальных, а также глобальных информационных сетей типа Интернет описывается СМО с параметрами, изменяющимися в случайные моменты времени [1], [2], [11], [12], [13].

В литературе для СМО с изменяющимися параметрами принято название: СМО, функционирующие в случайной среде [14]. В некоторых случаях на вход таких СМО поступает пуассоновский поток заявок со случайной интенсивностью $\lambda(t)$, то есть так называемый дважды стохастический (ДС) поток. В данной работе в качестве $\lambda(t)$ рассматривается скачкообразный процесс, а СМО, функционирующую в случайной среде с входным ДС пуассоновским потоком будем называть для краткости дважды стохастической (ДС) СМО.

В силу специфики потока сообщений на узлах локальных и глобальных компьютерных сетей системы массового обслуживания со скачкообразной интенсивностью входного потока используются при моделировании узлов локальных вычислительных сетей, системы обслуживания с диффузионной интенсивностью входного потока используются при моделировании узлов глобальных вычислительных сетей [1]. В работе [2] исследованы модели СМО для библиотечных серверов, серверов баз данных, proxy и web серверов в информационных сетях с количеством рабочих станций в сети более 600. С применением статистического анализа в работе был сделан вывод о том, что функционирование библиотечного сервера в локальной сети описывается моделью СМО с бесконечным накопителем, пуассоновским входным потом заявок со скачкообразной интенсивностью входного потока, одним обслуживающим прибором с экспоненциальным законом обслуживания.

Указанный статистический вывод в работе [2], сделанный на основе эмпирических наблюдений, можно также обосновать теоретически. Скачкообразный характер интенсивности входного потока возникает в связи с тем, что заявки на обслуживание поступают по множеству каналов. По каждому каналу проходит пуассоновский поток со своей интенсивностью, причём суммарный поток будет являться пуассоновским, а его интенсивность равна сумме интенсивностей потоков линий связи [1]. Вследствие того, что по ряду причин канал или несколько каналов в случайные моменты времени отключаются из работы, интенсивность потока претерпевает скачки. В узлах информационных сетей обслуживание происходит по экспоненциальному закону в связи с тем, что сообщения обрабатываются с постоянной скоростью, а длина сообщений является случайной величиной, распределённой по экспоненциальному закону из-за того, что сумма длительностей обслуживания на одном временном интервале не зависит от суммы длительностей обслуживания на других временных интервалах.

Рассмотренная модель СМО имеет практическое применение, как в информационных сетях, так и в социальных системах, например, таких как морские порты, аэропорты, банки и т.д. Например, в информационных сетях в качестве обслуживающих устройств используются коммутаторы, которые производят коммутацию входящих в его порты информационных потоков, направляя их в соответствующие выходные порты, обеспечивая эффективную работу всей системы. Таким образом, каждый сервер можно рассматривать как отдельную СМО.

В работах [6], [11], [12], [13], [15] исследовалась незавершенная работа в ДС СМО типа $M/G/1$ со скачкообразной интенсивностью входного потока приближенными методами анализа. В работе [3] в аналогичной СМО исследовались приближенными методами уравнения типа Такача, искомые характеристики незавершенной работы раскладываются в ряд по малому параметру.

В работе [16] исследовались вопросы существования и единственности распределения числа заявок в стационарном режиме СМО $M/M/1$ с постоянной интенсивностью входного потока матричными методами. В работе [17] исследовалось стационарное распределение числа заявок в ДС СМО типа $M/M/1$ со скачкообразной интенсивностью входного потока с применением метода производящих функций. Исследование показало возможность установления стационарного режима в СМО при определенных условиях на параметры СМО.

В данной работе рассматриваются для моделей ДС СМО типа $M/G/1$ и $M/M/1$ (в обозначениях Кендала) со скачкообразной интенсивностью входного потока следующие вопросы:

1. приводятся уравнения типа Такача относительно стационарных и нестационарных характеристик незавершенной работы;

2. находится интеграл от преобразования Лапласа-Стилтьеса решения уравнения Такача в стационарном режиме;

3. вычисляются моменты незавершенной работы;

4. исследуется существование и единственность стационарного режима по незавершенной работе.

Интересные результаты получены в работах [20]–[23].

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим ДС СМО типа $M/G/1$ с одним прибором, бесконечным накопителем, с произвольным законом обслуживания $B_\eta(u)$, то есть время обслуживания η распределено по закону $B_\eta(u) = P\{\eta < u\}$. В частном случае для ДС СМО типа $M/M/1$ время обслуживания распределено по экспоненциальному закону с параметром μ.

На вход рассматриваемой ДС СМО $M/G/1$ поступает дважды стохастический пуассоновский поток, интенсивность которого $\lambda(t)$ представляет собой следующий скачкообразный процесс. Процесс $\lambda(t)$ в течение случайного интервала времени T сохраняет постоянное значение, затем меняет его на новое. Случайная величина T распределена по экспоненциальному закону с параметром α, $\alpha > 0$. Интенсивность $\lambda(t)$ изменяется на отрезке $[a, b]$ и имеет в точках разрыва справа плотность распределения

$$\varphi(x) = P\{x < \lambda(t_0 + 0) < x + dx\}/dx, x \in [a, b]$$

то есть в работе предполагается, что значение процесса $\lambda(t_0 - 0)$, $\lambda(t_0 + 0)$ в точках разрыва t_0 является независимыми случайными величинами.

Обозначим: $\bar{\lambda} = \int\limits_a^b x\varphi(x)\,dx$ — среднее значение интенсивности входного потока в точках разрыва. В работе [17] получено

$$f(t, x) = \varphi(x) + [f(0, x) - \varphi(x)]\, e^{-\alpha t},$$

откуда следует

$$f(x) = \varphi(x). \tag{1}$$

Следовательно, $\bar{\lambda}$ — среднее значение интенсивности входного потока $\lambda(t)$ в стационарном режиме. Считаем, что выполняется необходимое условие существования стационарного режима в СМО:

$$\bar{\lambda} < \mu. \tag{2}$$

В дальнейшем интенсивность входного потока в нестационарном режиме будем обозначать $\lambda(t)$, в стационарном — через λ.

Обозначим через $f(t, x) = P\{x < \lambda(t) < x + dx\}/dx$ — нестационарную плотность $\lambda(t)$, а через $f(x) = P\{x < \lambda < x + dx\}/dx$ — стационарную плотность λ.

Введем обозначения для распределения незавершенной работы. Обозначим через $\mathbf{H}(\omega, t) = P\{U(t) \leqslant \omega\}$ — нестационарную функцию распределения незавершенной работы; через $\mathbf{h}(\omega) = P\{U \leqslant \omega\}$ стационарную функцию распределения незавершенной работы U в стационарном режиме [6]. В частности, в качестве $h(\omega)$ можно рассматривать предел $\mathbf{h}(\omega) = \lim \mathbf{H}(\omega, t)$ при $t \to \infty$.

Обозначим через $\mathbf{H}(\omega, t, x)$ — совместное нестационарное распределение незавершенной работы $U(t)$ и интенсивности входного потока $\lambda(t)$, причем $\mathbf{H}(\omega, t, x)$ — есть функция распределения по ω, плотность распределения по x:

$$\mathbf{H}(\omega, t, x) = P\{U(t) \leqslant \omega, x < \lambda(t) < x + dx\}/dx, \tag{3}$$

через $\mathbf{h}(\omega, x)$ – совместное стационарное распределение незавершенной работы U и интенсивности входного потока λ, причем $\mathbf{h}(\omega, x)$ — есть функция распределения по ω, плотность распределения по x:

$$\mathbf{h}(\omega, x) = P\{U \leqslant \omega,\ x < \lambda < x + dx\}/dx, \tag{4}$$

где через U обозначена незавершенная работа в стационарном режиме. В частности, в качестве $\mathbf{h}(\omega, x)$ можно рассматривать предел $\mathbf{h}(\omega, x) = \lim \mathbf{H}(\omega, t, x)$ при $t \to \infty$. При начальных условиях $P_k(0) = p_k$, $k \geqslant 0$, СМО сразу находится в стационарном режиме.

Для краткости будем называть: $\mathbf{H}(\omega, t, x)$ совместной нестационарной функцией распределения незавершенной работы, $\mathbf{h}(\omega, x)$– совместной стационарной функцией распределения незавершенной работы.

Введем также совместные плотности распределения по ω: через $\mathbf{H}(\omega, t, x) = P\{\omega \leqslant U(t) \leqslant \omega + d\omega, x < \lambda(t) < x + dx\}/(dx \cdot d\omega)$ совместную нестационарную плотность распределения незавершенной работы и интенсивности входного потока, через $h(\omega, x) = P\{\omega \leqslant U \leqslant \omega + d\omega, x < \lambda < x + dx\}/(dx \cdot d\omega)$ — совместную стационарную плотность распределения незавершенной работы и интенсивности входного потока.

Введем плотности распределения по ω: $H(\omega,t,x) = P\{\omega \leqslant U(t) \leqslant \omega + d\omega, x < \lambda(t) < x + dx\}/d\omega$ — нестационарную плотность распределения незавершенной работы и интенсивности входного потока, $h(\omega) = P\{\omega \leqslant U \leqslant \omega + d\omega\}/d\omega$ — стационарную плотность распределения незавершенной работы. Заметим, что стационарная плотность распределения незавершенной работы $h(\omega)$ выражается через совместную плотность распределения $h(\omega) = \int\limits_a^b h(\omega,x)dx$.

Введем также обозначения для функций при условии $\omega > 0$:

$$\mathbf{H}_+(\omega,t) = \mathbf{H}(\omega,t), H_+(\omega,t) = H(\omega,t), \mathbf{h}_+(\omega) = \mathbf{h}(\omega), h_+(\omega) = h(\omega).$$

Нестационарная вероятность $P_0(t)$ и стационарная вероятность p_0 того, что в СМО нет заявок, называются вероятностями простоя. Согласно определению нестационарная и стационарная функции распределения незавершенной работы имеют вид

$$\mathbf{H}(\omega,t) = \begin{cases} 0, \omega < 0; \\ 0, \omega = 0^-; \\ P_0(t), \omega = 0^+; \\ \mathbf{H}_+(\omega,t), \omega > 0; \end{cases} \quad \mathbf{h}(\omega) = \begin{cases} 0, \omega < 0; \\ 0, \omega = 0^-; \\ p_0, \omega = 0^+; \\ \mathbf{h}_+(\omega), \omega > 0, \end{cases} \tag{5}$$

где приняты обозначения: $0^+ = \lim \omega$ при $\omega \to 0$, $\omega > 0$, $0^- = \lim \omega$ при $\omega \to 0$, $\omega < 0$.

Таким образом, нестационарную и стационарную функции распределения незавершенной работы будем рассматривать в пространстве кусочно-непрерывных функций. Обозначим через $\delta(\omega)$ дельта-функцию Дирака. Так как плотность распределения равна производной функции распределения, в (5) функции распределения имеют разрыв в точке $\omega = 0$, то из (5) следует, что нестационарная и стационарная плотности распределения незавершенной работы $H(\omega,t)$, $h(\omega)$ принадлежат классу обобщенных функций и представляются в виде:

$$H(\omega,t) = P_0(t)\,\delta(\omega) + H_+(\omega,t), \quad h(\omega) = p_0\delta(\omega) + h_+(\omega).$$

Заметим, что вероятность отсутствия заявок в нестационарном режиме в рассматриваемой ДС СМО равна $\mathbf{H}(0^+,t) = P_0(t) = \int\limits_a^b Q_0(t,x)\,dx$, где плотность $Q_0(t,x)$ определяется следующим образом: $Q_0(t,x) = P\{\nu(t) = 0, x < \lambda(t) < x + dx\}/dx$, $\nu(t)$ — число заявок в момент времени t. Плотность $Q_0(t,x)$ исследовалась в [3]. Таким образом,

$$H(\omega,t,x) = Q_0(t,x)\,\delta(\omega) + H_+(\omega,t,x),$$

где $H_+(\omega,t,x) = H(\omega,t,x)$ при $\omega > 0$.

Вероятность отсутствия заявок в стационарном режиме в рассматриваемой ДС СМО равна $\mathbf{h}(0^+) = p_0(t) = \int\limits_a^b q_0(x)\,dx$, где плотность $q_0(x)$ определяется следующим образом: $q_0(x) = P\{\nu = 0, x < \lambda < x + dx\}/dx$, ν — число заявок в стационарном режиме. Плотность $q_0(x)$ исследовалась в [3]. Таким образом,

$$h(\omega,x) = q_0(t,x)\,\delta(\omega) + h_+(\omega,x), \text{ где } h_+(\omega,x) = h(\omega,x) \text{ при } \omega > 0.$$

УРАВНЕНИЯ ТИПА ТАКАЧА

Для ДС СМО типа $M/G/1$ со скачкообразной интенсивностью входного потока с применением динамики Колмогорова-Чепмена получается интегро-дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет нестационарная функция распределения $\mathbf{H}(\omega,t,x)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{H}(\omega,t,x) = -(\alpha + x)\,\mathbf{H}(\omega,t,x) + x\int\limits_0^\omega B(\omega - s)\,\frac{\partial}{\partial s}\mathbf{H}(s,t,x)\,ds + \frac{\partial \mathbf{H}(\omega,t,x)}{\partial \omega} +$$

$$+\alpha\varphi\left(x\right)\int\limits_{a}^{b}\mathbf{H}\left(\omega,t,y\right)dy,\omega>0,\quad(6)$$

с начальным условием: $\mathbf{H}\left(\omega,0,x\right)=\xi\left(\omega,x\right)$, с односторонним краевым условием по ω: $\mathbf{H}\left(0^{+},t,x\right)=Q_{0}\left(t,x\right)$.

Заметим, что уравнение (6) отличается от классического интегро-дифференциального уравнения Такача наличием слагаемого с интегральным оператором

$$\alpha\varphi\left(x\right)\int\limits_{a}^{b}\mathbf{H}\left(\omega,t,y\right)dy,\omega>0,$$

поэтому уравнение (6) будем называть уравнением типа Такача.

Для ДС СМО типа $M/G/1$ со скачкообразной интенсивностью входного потока стационарная функция распределения $\mathbf{h}\left(\omega,x\right)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению типа Такача следующего вида

$$-\left(\alpha+x\right)\mathbf{h}\left(\omega,x\right)+x\int\limits_{0}^{\omega}B\left(\omega-s\right)\frac{\partial}{\partial s}\mathbf{h}\left(s,x\right)ds+\frac{\partial}{\partial\omega}\mathbf{h}\left(\omega,x\right)+\alpha\varphi\left(x\right)\int\limits_{a}^{b}\mathbf{h}\left(\omega,y\right)dy=0,\omega>0,\quad(7)$$

с односторонним краевым условием $\mathbf{h}\left(0^{+},x\right)=q_{0}\left(x\right)$.

Следует отметить, что уравнения (6), (7) являются сингулярными по α. Из решения уравнений (6), (7) не получаются предельным переходом при $\alpha\to0$ решения уравнений (6), (7) при $\alpha=0$. Поэтому, все исследования, проделанные выше для ДС СМО, необходимо повторить отдельно для СМО при $\alpha=0$, так как необходимо выяснить:

- вопросы существования и единственности решений;
- вопросы сходимости нестационарного решения к стационарному;
- вопрос независимости стационарного решения от начальных условий.

Хотя отдельные результаты при $\alpha=0$ известны, например преобразование Лапласа, Лапласа–Стилтьеса, но в целом указанные выше вопросы остались открытыми при $\alpha=0$.

Поскольку, по определению стационарного режима, в стационарном режиме характеристики не меняются с течением времени, т.е. выполняется $\mathbf{H}\left(\omega,t,x\right)=h\left(\omega,x\right)$, то отсюда $\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{H}\left(\omega,t,x\right)=0$. Следовательно, в стационарном режиме из уравнения (6) следует уравнение (7). В стационарном режиме условие $\mathbf{H}\left(0^{+},t,x\right)=Q_{0}\left(t,x\right)$ превращается в условие $\mathbf{h}\left(0^{+},x\right)=q_{0}\left(x\right)$.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА, ЛАПЛАСА-СТИЛТЬЕСА

В литературе для функции $\Psi(\omega)$ определяется преобразование Лапласа [18], [19]:

$$\Psi^{*}(r)=\int\limits_{0^{-}}^{\infty}e^{-\omega r}\Psi\left(\omega\right)d\omega$$

и преобразование Лапласа-Стилтьеса:

$$\Psi_{c}(r)=\int\limits_{0^{-}}^{\infty}e^{-\omega r}\Psi'\left(\omega\right)d\omega$$

В данной работе вводится ряд преобразований Лапласа и Лапласа-Стилтьеса для стационарного уравнения типа Такача, находятся эти преобразования, вычисляются моменты незавершенной работы, доказано существование стационарного режима.

Обозначим через $\mathbf{h}^*(r,x)$, $B^*(r)$ преобразования Лапласа:

$$\mathbf{h}^*(r,x)=\int\limits_{0^-}^{\infty}e^{-\omega r}\mathbf{h}(\omega,x)\,d\omega,\ B^*(r)=\int\limits_{0^-}^{\infty}e^{-\omega r}B(\omega)\,d\omega,\ \mathbf{Re}\,r>0, \tag{8}$$

через $\mathbf{h}_c(r,x)$, $B_c(r)$ обозначены преобразования Лапласа-Стилтьеса

$$\mathbf{h}_c(r,x)=\int\limits_{0^-}^{\infty}e^{-\omega r}h(\omega,x)\,d\omega, B_c(r)=\int\limits_{0^-}^{\infty}e^{-\omega r}B'(\omega)\,d\omega, \mathbf{Re}\,r>0. \tag{9}$$

Между преобразованиями Лапласа и Лапласа-Стилтьеса имеет место связь [18]

$$\mathbf{h}^*(r,x)=\frac{\mathbf{h}_c(r,x)+\mathbf{h}(0^-,x)}{r},\quad B^*(r)=\frac{B_c(r)+B(0^-)}{r}. \tag{10}$$

Учитывая, что $\mathbf{h}(0^-,x)=B(0^-)=0$, получаем

$$\mathbf{h}^*(r,x)=\frac{\mathbf{h}_c(r,x)}{r},\quad B^*(r)=\frac{B_c(r)}{r}.$$

Обозначим $L(x,y)=r+xB_c(r)-(\alpha+x)$ через D_{xy} обозначим область определения преобразования Лапласа-Стилтьеса $\mathbf{h}_c(r,x)$

$$D_{xy}=\{(r,x):\mathrm{Re}\ z>0, x\in[a,b]\}.$$

Обозначим интеграл от преобразования Лапласа-Стилтьеса $\mathbf{h}_c(r,x)$ по $x\in[a,b]$ через $R_c(r)$:

$$R_c(r)=\int\limits_a^b h_c(r,x)dx,\quad (r,x)\in D_{rx}. \tag{11}$$

В данной работе доказана теорема 1.

Теорема 1. Для ДС СМО типа $M/G/1$ со скачкообразной интенсивностью входного потока интеграл $R_c(r)$ от преобразования Лапласа–Стилтьеса решения уравнения (7) относительно стационарной функции распределения незавершенной работы $\mathbf{h}(\omega,x)$ имеет следующий вид

$$R_c(r)=\frac{\int_a^b rq_0(x)\,L^{-1}(r,x)\,dx}{1+\int_a^b \alpha\varphi(x)\,L^{-1}(r,x)\,dx}=\frac{R_1(r)}{R_2(r)}, \tag{12}$$

где через R_1, R_2 обозначены числитель и знаменатель в (12), соответственно.

Доказательство. Применяя преобразование Лапласа к уравнению (7) получим

$$-(\alpha+x)\,\mathbf{h}^*(r,x)+r\mathbf{h}^*(r,x)-\mathbf{h}\left(0^+,x\right)+x\mathbf{h}_c(r,x)\,B^*(r,x)+\alpha\varphi(x)\int\limits_a^b\mathbf{h}^*(r,y)dy=0, \tag{13}$$

откуда с учетом $\mathbf{h}^*(r,x) = \mathbf{h}_c(r,x)/r$ имеем

$$\mathbf{h}_c(r,x) = \frac{r\mathbf{h}_c(0^+,x) - \alpha\varphi(x)\int\limits_a^b \mathbf{h}_c(r,y)\,dy}{-(\alpha+x)+r+xB_c(r)}. \tag{14}$$

С учетом того, что $\mathbf{h}(0^+,x) = q_0$, следует

$$\mathbf{h}_c(r,x) = \frac{rq_0(x) - \alpha\varphi(x)\int\limits_a^b \mathbf{h}_c(r,y)\,dy}{L}.$$

Проинтегрировав по $x \in [a,b]$ и выразив интеграл $R_c(r)$, получим

$$\int\limits_a^b \mathbf{h}_c(r,x)dx = r\int\limits_a^b q_0(x)\,L^{-1}dx - \int\limits_a^b \alpha\varphi(x)\,L^{-1}\int\limits_a^b \mathbf{h}_c(r,y)\,dydx,$$

$$R_c(r)\left(1 + \int\limits_a^b \alpha\varphi(x)\,L^{-1}(r,x)\,dx\right) = r\int\limits_a^b q_0(x)\,L^{-1}(r,x)\,dx,$$

$$R_c(r) = \frac{\int\limits_a^b rq_0(x)\,L^{-1}(r,x)\,dx}{1 + \int\limits_a^b \alpha\varphi(x)\,L^{-1}(r,x)\,dx} = \frac{R_1(r)}{R_2(r)}. \tag{15}$$

В работе [3] показано существование и единственность функции $q_0(x)$, а также приводится метод нахождения данной функции. Теорема доказана.

Обозначим

$$G_1(r) = \int\limits_a^b \frac{q_0(x)}{L(r,x)}dx, \quad G_2(r) = \int\limits_a^b \varphi(x)\frac{K(r,x)}{L(r,x)}dx, \quad K(r,x) = 1 - \frac{x}{r+\mu}. \tag{16}$$

В данной работе доказана теорема 2.

Теорема 2. Для ДС СМО типа $M/M/1$ со скачкообразной интенсивностью входного потока интеграл $R_c(r)$ от преобразования Лапласа–Стилтьеса решения уравнения (7) относительно стационарной функции распределения незавершенной работы $\mathbf{h}(\omega,x)$ имеет следующий вид

$$R_c(r) = \frac{G_1(r)}{G_2(r)}. \tag{17}$$

Доказательство. Приведем преобразование Лапласа-Стилтьеса $R_c(r)$ к виду (17). Так как

$$r + \frac{x\mu}{r+\mu} - x = \frac{1}{r+\mu}\left(r^2 + r\mu + x\mu - rx - x\mu\right) = \frac{1}{r+\mu}r(r+\mu-x) =$$
$$= r\frac{r+\mu-x}{r+\mu} = r\left(1 - \frac{x}{r+\mu}\right) = rK(r,x).$$

Отсюда следует

$$R_1(r) = r\int\limits_a^b \frac{q_0(x)}{L(r,x)}dx = rG_1(x),$$

$$R_1(r) = 1 + r\int\limits_a^b \frac{\alpha\varphi(x)}{L(r,x)}dx = \int\limits_a^b \frac{\varphi(x)\,\frac{r(r-x+\mu)}{r+\mu}}{L(r,x)}dx = r\int\limits_a^b \varphi(x)\frac{K(r,x)}{L(r,x)}dx = rG_2(r).$$

Окончательно из (15) следует

$$R_c(r) = \frac{R_1(r)}{R_2(r)} = \frac{rG_1(r)}{rG_2(r)} = \frac{G_1(r)}{G_2(r)},$$

что и требовалось доказать. *Теорема доказана.*

СТАЦИОНАРНЫЕ МОМЕНТЫ НЕЗАВЕРШЕННОЙ РАБОТЫ

Нахождение обратного преобразования Лапласа-Стилтьеса функции $R_c(r)$ для СМО $M/G/1$ и $M/M/1$ связано со значительными затруднениями, однако через $R_c(r)$ выражены моменты незавершенной работы. Среднее значение MU и дисперсия DU незавершенной работы находятся в явном виде. Выражение моментов незавершенной работы MU, DU через производные функции $R_c(r)$ в точке $r = 0$ приводит следующая теорема 3, доказанная в данной работе.

Теорема 3. Для дважды стохастической СМО типа $M/G/1$ со скачкообразной интенсивностью входного потока при условии (2) существуют, единственны и выражаются через преобразование Лапласа-Стилтьеса $R_c(r)$ решения уравнения (7) моменты незавершенной работы следующим образом:

$$MU = R_c'(0), \quad DU = (p_0 - 1)(MU)^2 + R_c''(0). \tag{18}$$

Доказательство. Найдем моменты незавершенной работы. Для математического ожидания имеем

$$MU = \int\limits_{0^-}^{\infty} \omega h(\omega)d\omega = \int\limits_{0^-}^{\infty} \omega\left(p_0\delta(\omega) + h_+(\omega)\right)d\omega = 0\cdot p_0 + \int\limits_{0^+}^{\infty} \omega h_+(\omega)\,d\omega = R_c'(0),$$

где $R_c(r) = \int\limits_{0^+}^{\infty} e^{-\omega r}h_+(\omega)d\omega$, $R_c'(r) = -\int\limits_{0^+}^{\infty} \omega e^{-\omega r}h_+(\omega)d\omega$, $\quad R_c'(0) = -\int\limits_{0^+}^{\infty} \omega h_+(\omega)d\omega$.

Для дисперсии имеем

$$DU = \int\limits_{0^-}^{\infty} (\omega - MU)^2\left[p_0\delta(\omega) + h_+(\omega)\right]d\omega = p_0(0 - MU)^2 + \int\limits_{0^-}^{\infty} (\omega - MU)^2 h_+(\omega)d\omega =$$

$$= p_0(MU)^2 + \int\limits_{0^+}^{\infty} \omega^2 h_+(\omega)\,d\omega - (MU)^2 = (p_0 - 1)(MU)^2 + R_c''(0),$$

где $R_c''(r) = \int\limits_{0^+}^{\infty} \omega^2 e^{-\omega r}h_+(\omega)\,d\omega$, $R_c''(0) = \int\limits_{0^+}^{\infty} \omega^2 h_+(\omega)\,d\omega$. *Теорема доказана.*

Обозначим для $0 \leqslant k \leqslant 3$, $0 \leqslant j \leqslant 1$,

$$C_{kj} = \int\limits_a^b q_0(x)\left(1 - x\mu^{-1}\right)^k\left(x\mu^{-1}\right)^j dx,$$

$$D_{kj} = \int\limits_a^b \varphi(x)\left(1 - x\mu^{-1}\right)^k\left(x\mu^{-1}\right)^j dx, \quad E = \mu^{-1}, \quad F = \alpha^{-1}.$$

Рассмотрим теперь ДС СМО типа $M/G/1$ с экспоненциальным обслуживанием $B(u) = 1 - e^{-\mu u}$ с параметром μ. Обозначим среднее значение интенсивности входного потока $\bar{\lambda} = \int\limits_a^b x\varphi(x)dx$, $\rho = \frac{\bar{\lambda}}{\mu}$. Находя $R'_c(0)$, получим

$$R'_c(0) = -\frac{\alpha A_1 + A_0}{\alpha p_0}, \tag{19}$$

где $A_0 = D_{20} - C_{10}, \quad A_1 = ED_{20}$.

Находя $R''_c(0)$, получим

$$R''_c(0) = \frac{\alpha^2 B_2 + \alpha B_1 + B_0}{\alpha^2 p_0^2}, \tag{20}$$

где через B_0, B_1, B_2 обозначены следующие коэффициенты:

$$B_0 = 2C_{20}D_{10} - 2D_{10}D_{30} - 2C_{10}D_{20} + 2D_{20}^2,$$

$$B_1 = 2EC_{01}D_{10} - 4ED_{10}D_{11} - 2EC_{10}D_{01} + 2ED_{20}D_{01} + 2ED_{20}D_{01},$$

$$B_2 = 2E^2D_{10}D_{01} + 2E^2D_{01}^2.$$

В данной работе доказана теорема 4, в которой поясняются выводы коэффициентов A_0, A_1, B_0, B_1, B_2.

Теорема 4. Для дважды стохастической СМО типа $M/M/1$ со скачкообразной интенсивностью входного потока при условии (2) существуют и единственны моменты незавершенной работы MU и DU равные, соответственно:

$$MU = \frac{\alpha A_1 + A_0}{\alpha p_0}, \tag{21}$$

$$DU = (p_0 - 1)(MU)^2 + R''_c(0), \tag{22}$$

$$0 < p_0 = \int\limits_a^b q_0(x)dx = \int\limits_a^b \varphi(x)\left(1 - \frac{x}{\mu}\right)dx < 1. \tag{23}$$

Доказательство. Найдем сначала моменты незавершенной работы MU, DU. С целью вычисления моментов MU, DU незавершенной работы согласно теореме 3, вычислим соответствующие производные по r. Из (17) имеем

$$R'_c(r) = \frac{G'_1(r)G_2(r) - G_1(r)G'_2(r)}{G_2^2(r)},$$

$$R''_c(r) = \frac{1}{G_2^4(r)}\left[\left(G'_1(r)G_2(r) - G_1(r)G'_2(r)\right)' G_2^2(r) - \right.$$
$$\left. - \left(G'_1(r)G_2(r) - G_1(r)G'_2(r)\right) 2G_2(r)G'_2(r)\right],$$

$$R''_c(r) = \frac{1}{G_2^3(r)}\left[\left(G'_1(r)G_2(r) - G_1(r)G'_2(r)\right)' G_2(r) - \left(G'_1(r)G_2(r) - G_1(r)G'_2(r)\right) 2G'_2(r)\right]. \tag{24}$$

При $r = 0$ имеем

$$R'_c(0) = \frac{G'_1 G_2(0) - G_1(0)G'_2(0)}{G_2^2(0)}. \tag{25}$$

Покажем, что знаменатель дроби в (24) не равен 0. Из (16) получим

$$G_2(0) = -\frac{1}{\alpha}\int_a^b \varphi(x)\left(1-\frac{x}{\mu}\right)dx. \tag{26}$$

В [3] найдена вероятность p_0:

$$p_0 = \int_a^b q_0(x)dx = \int_a^b \varphi(x)\left(1-\frac{x}{\mu}\right)dx. \tag{27}$$

С учетом (26), (27) имеем

$$G_2(0) = -\frac{1}{\alpha}p_0. \tag{28}$$

Покажем, что

$$0 < p_0 < 1. \tag{29}$$

Левое неравенство в (29) гарантирует отличие от 0 знаменателя в (25). Правое неравенство в (29) означает, что для p_0 выполняется условие вероятности.

Из условия отсутствия перегрузок $x < \mu$ следует $1 - \frac{x}{\mu} > 0$, откуда, с учетом $\varphi(x) \geqslant 0$, вытекает, что

$$p_0 = \int_a^b \varphi(x)\left(1-\frac{x}{\mu}\right) > \int_a^b 0dx = 0.$$

Далее, так как $-\frac{x}{\mu} < 0$, то есть $1 - \frac{x}{\mu} < 1$, то отсюда получаем

$$p_0 = \int_a^b q_0(x)dx = \int_a^b \varphi(x)\left(1-\frac{x}{\mu}\right)dx < \int_a^b \varphi(x)dx < 1.$$

Таким образом, выполняется (29), что влечет оценку

$$G_2(0) = -\frac{1}{\alpha}p_0 < 0, \tag{30}$$

то есть знаменатель дроби в (25) не равен 0.

Из (24) при $r = 0$ получим

$$R_c''(0) = \frac{1}{G_2^3(0)}\left[\left(G_1'(0)G_2(0) - G_1(0)G_2'(0)\right)' G_2(0) - \left(G_1'(0)G_2(0) - G_1(0)G_2'(0)\right)2G_2'(r)\right]. \tag{31}$$

Как показано выше знаменатель в (31) отличен от 0 согласно (30).

Вычисление выражений в (31) сводится к вычислению соответствующих производных. Найдем сначала производные L_r' и K_r', а затем значение функций и их производных при $r = 0$:

$$L(r,x) = r + \frac{x\mu}{r+\mu} - \alpha - x, \quad L'(r,x) = 1 - \frac{x\mu}{(r+\mu)^2}, \quad L''(r,x) = \frac{2x\mu}{(r+\mu)^3},$$

$$L(0,x) = -\alpha, \quad L'(0,x) = 1 - \frac{x}{\mu}, \quad L''(0,x) = \frac{2x}{\mu^2},$$

$$K(r,x) = 1 - \frac{x}{r+\mu}, \quad K'(r,x) = \frac{x}{(r+\mu)^2}, \quad K''(r,x) = -\frac{2x}{(r+\mu)^3},$$

$$K(0,x) = 1 - \frac{x}{\mu}, \quad K'(0,x) = \frac{x}{\mu^2}, \quad K''(0,x) = -\frac{2x}{\mu^3}.$$

Найдем производные от $G_1(r)$

$$G_1(r) = \int_a^b \frac{q_0(x)}{L(r,x)} dx, \quad G_2'(r) = -\int_a^b \frac{q_0(x)}{L^2(r,x)} L'(r,x) dx,$$

$$G_2''(r) = 2\int_a^b \frac{q_0(x)}{L^3(r,x)} \left(L'(r,x)\right)^2 dx - \int_a^b \frac{q_0(x)}{L^2(r,x)} L''(r,x) dx.$$

Производные от $G_2(r)$ равны

$$G_2(r) = \int_a^b \varphi(x) \frac{K(r,x)}{L(r,x)} dx,$$

$$G_2'(r) = \int_a^b \varphi(x) \frac{K'(r,x)}{L(r,x)} dx - \int_a^b \varphi(x) \frac{K'(r,x)}{L^2(r,x)} L'(r,x)\, dx,$$

$$G_2''(r) = \int_a^b \varphi(x) \frac{K''(r,x)}{L(r,x)} dx - \int_a^b \varphi(x) \frac{K'(r,x)}{L^2(r,x)} L'(r,x)\, dx -$$
$$- \int_a^b \varphi(x) \frac{K'(r,x)}{L^2(r,x)} L'(r,x)\, dx + 2\int_a^b \varphi(x) \frac{K(r,x)}{L^3(r,x)} \left(L'(r,x)\right)^3 dx.$$

При $r = 0$ получим

$$G_1(0) = -FD_{10}, G_1'(0) = -F^2 C_{10}, G_1''(0) = -2F^3 C_{20} - 2E^2 F C_{01},$$

$$G_2(0) = -FD_{10}, \quad G_2'(0) = EFD_{01} - F^2 D_{20},$$

$$G_2''(0) = 2E^2 F D_{01} - 4EF^2 D_{11} - 2F^3 D_{30.}$$

Заметим, что при $r = 0$ знаменатель $L(0,x) = -\alpha$ отличен от 0.
Покажем, что $G_1(0) = G_2(0)$. Действительно

$$R_c(0) = \int_a^b \int_{0-}^{\infty} h(\omega, x)\, d\omega dx = \int_a^b f(x)\, dx = 1.$$

Так как $R_c(0) = \frac{G_1(0)}{G_2(0)}$, то $G_1(0) = G_2(0)$.

Применяя теорему 3 для вычисления среднего значения MU незавершенной работы получим с учетом равенства $G_1(0) = G_2(0)$

$$MU = -R_c'(0) = -\frac{G_1'(0)\, G_2(0) - G_1(0)\, G_2'(0)}{G_2^2(0)} = \frac{G_2'(0) - G_1'(0)}{G_2(0)} =$$
$$= \left(ED_{01} + FD_{20} - FC_{10}\right)/C_{00}^{-1}. \quad (32)$$

Откуда с учетом введенных обозначений следует (21). Причем, как показано выше, знаменатель в (21) отличен от 0, так как $p_0 > 0$, $\alpha > 0$.

Согласно теореме 3 для вычисления дисперсии незавершенной работы имеем

$$DU = (p_0 - 1)\,(MU)^2 + R_c''\,(0)\,. \tag{33}$$

С учетом равенства $G_1\,(0) = G_2\,(0)$ из (31) вытекает упрощенное равенство для $R_c''\,(0)$

$$R_c''\,(0) = \frac{G_1''\,(0)\,G_2(0) - G_1\,(0)\,G_2''(0) - 2G_1'\,(0)\,G_2'(0) + 2G_1'\,(0)\,G_2'(0)}{G_2^2\,(0)}$$

откуда с учетом значений производных в точке $r = 0$ для $R_c''\,(0)$ и введенных обозначений следует (20). Моменты незавершенной работы MU и DU в (21), (22) существуют и единственны в силу того, что во всех константах, через которые выражаются моменты, знаменатели не равны 0, так как $\alpha > 0$, $0 < p_0 < 1$, $\mu > 0$, а также с учетом того, что в работе [17] показано существование и единственность $q_0\,(x)$. *Теорема доказана.*

Из существования и единственности моментов незавершенной работы следует существование стационарного режима СМО по незавершенной работе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как показано выше, работа имеет прикладное и теоретическое значение. Научная новизна работы состоит в следующем: получены нестационарное и стационарное уравнения типа Такача, получены преобразования Лапласа-Стилтьеса решения стационарного уравнения для СМО $M/G/1$ и $M/M/1$, доказано существование и единственность стационарных моментов незавершенной работы и стационарного режима, получены стационарные моменты незавершенной работы.

Отметим, на наш взгляд, интересные работы [20]–[23].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Головко, Н.И. Применение моделей СМО в информационных системах : моногр. / Н.И. Головко, В.В. Катрахов. — Владивосток: Изд-во ТГЭУ, 2008. — 272 с.

[2] Исследование моделей систем массового обслуживания в информационных сетях / Н.И. Головко, В.О. Каретник, В.Е. Танин, И.И. Сафонюк // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2008. — Т. XI, № 2 (34). — С. 50–64.

[3] Головко, Н.И. Система массового обслуживания со случайно изменяющейся интенсивностью входного потока / Н.И. Головко, И.А. Коротаев // Автоматика и телемеханика. — 1990. — № 7. — С. 80–85.

[4] Тривоженко, Б.В. Оценка интенсивности нестационарного пуассоновского потока / Б.В. Тривоженко // Поиск сигнала в многоканальных системах. — 1985. — № 1. — С. 169–174.

[5] Benes, V.E. General Stochastic Processes in the Theory of Queues / V.E. Benes. — Addison-Wesley (Reading, Mass.), 1963. — 88 p.

[6] Greenberg, H. The number served in a queue / H. Greenberg, I. Greenberg // Operat. Res. — 1966. — Vol. 14, № 1. — P. 137–144.

[7] Kendall, D.G. Some Problems in the Theory of Queues / D.G. Kendall // Jurnal of the Royal Statistical Society. — 1951. — Ser. B, 13. — P. 151–185.

[8] Marshall, K.T. Some Relationships between the Distributions of Waiting Time, Idle Time, and Interoutput Time the G/G/1 Queue / K.T. Marshall // SIAM Journal Applied Mat. — 1968. — № 16. — P. 324–327.

[9] Rice, S.O. Single Server Systems / S. O. Rice // Bell System Technical Journal. — 1962. — № 41. — Part I: Relations Between Some Averages. — P. 267-278; Part II: Busy Periods. — P. 279–310.

[10] Syski, R. Introduction to Congestion Theory in Telephone Systems / R. Syski. — London: Oliver and Boyd, 1962. — 742 p.

[11] Абрамов, А.Х. Об оптимальном назначении скорости обслуживания / А.Х. Абрамов, А.Д. Цвиркун // Автоматика и телемеханика. — 1968. — № 2. — С. 76–80.

[12] Климов, Г.П. Определение переходных вероятностей числа телефонных разговоров / Г.П. Климов // Вычислительные методы и программирование: сб. ВЦ. Московского ун-та. — М., 1965. — Вып. 3. — С. 428–433.

[13] Ляхов, А.И. Асимптотический анализ замкнутых сетей очередей, включающих устройства с переменной интенсивностью обслуживания / А.И. Ляхов // Автоматика и телемеханика. — 1997. — № 3. — С. 131–143.

[14] Головко, Н.И. Анализ систем массового обслуживания, функционирующих в случайной среде / Н.И. Головко, В.В. Катрахов. — Владивосток: Изд-во ДВГАЭУ, 2000. — 144 с.

[15] Стрик, Я. Предельные результаты для переключаемых марковских систем обслуживания с конечным числом источников / Я. Стрик // Кибернетика и системный анализ. — 1994. — № 1. — С. 79–84.

[16] Головко, Н.И. Асимптотический анализ СМО с бесконечным накопителем / Н.И. Головко, В.В. Катрахов, Д.Е. Рыжков // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии. — 2007. — № 1. — С. 139–148.

[17] Головко, Н.И. СМО с бесконечным накопителем и скачкообразной интенсивностью входного потока / Н.И. Головко, В.О. Каретник, О.В. Пелешок // Автоматика и телемеханика. — 2009. — № 10. — С. 75–96.

[18] Клейнрок, Л. Теория массового обслуживания / Л. Клейнрок. – М.: Машиностроение, 1979. — 432 с.

[19] Справочник по математике для научных работников и инженеров / под ред. Г. Корн, Т. Корн. — М.: Наука, 1973. — С. 228–230.

[20] Захаров А.В. Распределение величины абсолютного максимума разрывного стационарного случайного процесса с релеевской и гауссовской компонентами / А.В. Захаров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2012. — № 2. — С. 34–48.

[21] Костылев В.И. Энергетическое различение некоторых случайных векторов / В.И. Костылев // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 2. — С. 212–218.

[22] Захаров А.В. Оценка времени прихода флуктуирующего радиоимпульса с неизвестной интенсивностью / А.В. Захаров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 25–40.

[23] Трифонов А.П. Статистические свойства высоты и положения абсолютного максимума марковского случайного процесса типа Башелье / А.П. Трифонов, Ю.Э. Корчагин, М.Б. Беспалова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 4. — С. 54-65.

REFERENCES

[1] Golovko N.I., Katrakhov V.V. The application of models queuing systems in information networks. [Golovko N.I., Katrakhov V.V. Primenenie modelej SMO v informatcionnih sistemah]. Vladivostok: PSUE, 2008, 272 p.

[2] Golovko N.I., Karetnik V.O., Tanin V.E., Safonuyk I.I. Research of models of service systems in information networks. [Golovko N.I., Karetnik V.O., Tanin V.E., Safonuyk I.I. Issledovanie modelej sistem massovogo obsluzhivanija v informacionnyh setjah]. *Sibirskij zhurnal industrial'noj matematiki — Siberian journal of industrial mathematics*, 2008, vol. XI, no. 2 (34), pp. 50–64.

[3] Golovko N.I., Korotaev I.A. A service system with randomly varying arrival rate. [Golovko N.I., Korotaev I.A. Sistema massovogo obsluzhivanija so sluchajno izmenjajushhejsja intensivnost'ju vhodnogo potoka]. *Avtomatika i telemehanika — Automation and remote control*, 1990, no. 7, pp. 80–85.

[4] Trivozhenko B.V. Assessment of intensity of unsteady Poisson flow. [Trivozhenko B.V. Ocenka intensivnosti nestacionarnogo puassonovskogo potoka]. *Poisk signala v mnogokanal'nih sistemah — Searching for a signal in a multi-channel systems*, 1985, no. 1, pp. 169–174.

[5] Benes V.E. General Stochastic Processes in the Theory of Queues. Addison-Wesley (Reading, Mass.), 1963, 88 p.

[6] Greenberg H., Greenberg I. The number served in a queue. Operat. Res., 1966, vol. 14, no. 1, pp. 137–144.

[7] Kendall D.G. Some Problems in the Theory of Queues. Jurnal of the Royal Statistical Society, 1951, Ser. B, 13, pp. 151–185.

[8] Marshall K.T. Some Relationships between the Distributions of Waiting Time, Idle Time, and Interoutput Time the G/G/1 Queue. SIAM Journal Applied Math., 1968, no. 16, pp. 324–327.

[9] Rice S.O. Single Server Systems. Bell System Technical Journal, 1962, no. 41, Part I: Relations Between Some Averages, pp. 267–278, and Part II: Busy Periods, pp. 279–310.

[10] Syski R. Introduction to Congestion Theory in Telephone Systems. London: Oliver and Boyd, 1962, 742 p.

[11] Abramov A.Kh., Tsvirkun A.D. About optimal purpose of service speed. [Abramov A.Kh., Tsvirkun A.D. Ob optimal'nom naznachenii skorosti obsluzhivanija]. *Avtomatika i telemehanika — Automation and remote control*, 1968, no. 2, pp. 76–80.

[12] Klimov G.P. Determination of transition probabilities of telephone conversations. [Klimov G.P. Opredelenie perehodnyh verojatnostej chisla telefonnyh razgovorov]. *Vychislitel'nye metody i programmirovanie: sb. VC. Moskovskogo un-ta — Numerical methods and programming: a Collection of articles*, 1965, iss. 3, pp. 428–433.

[13] Lyakhov A.I. Asymptotic analysis of closed queuing networks including devices with variable service rate. [Lyakhov A.I. Asimptoticheskij analiz zamknutyh setej ocheredej, vkljuchajushhih ustrojstva s peremennoj intensivnost'ju obsluzhivanija]. *Avtomatika i telemehanika — Automation and remote control*, 1997, no. 3, pp. 131–143.

[14] Golovko N.I., Katrakhov V.V. Analysis of queueing systems operating in random environment. [Golovko N.I., Katrakhov V.V. Analiz SMO, funkcionorujushhih v sluchajnoj srede]. Vladivostok: FESAEM, 2000, 144 p.

[15] Strick Ya. Limit results for switched Markov service systems with a finite number of sources. [Strick Ya. Predel'nye rezul'taty dlja perekljuchaemyh markovskih sistem obsluzhivanija s konechnym chislom istochnikov]. *Kibernetica i sistemnii analiz — Cybernetics and Systems Analysis*, 1994, no. 1, pp. 79–84.

[16] Golovko N.I., Katrakhov V.V., Ryzhkov D.E. Asymptotic analysis of service systems with infinite storage. [Golovko N.I., Katrakhov V.V., Ryzhkov D.E. Asimptoticheskij analiz SMO s beskonechnym nakopitelem]. *Vestnik voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Sistemnyj analiz i informacionnye texnologii — Proceedings of Voronezh State University. Series: System Analysis and Information Technology*, 2007, no. 1, pp. 139–148.

[17] Golovko N.I., Karetnik V.O., Peleshok O.V. Service systems with infinite storage and step-like arrival rate. [Golovko N.I., Karetnik V.O., Peleshok O.V. SMO s beskonechnym nakopitelem i skachkoobraznoj intensivnost'ju vhodnogo potoka]. *Avtomatika i telemehanika — Automation and remote control*, 2009, no. 10, pp. 75–96.

[18] Cleinrock L. Queuing theory. [Cleinrock L. Teorija massovogo obsluzhivanija]. Moscow: Mashinostroenie, 1979, 432 p.

[19] Corn T., Corn G. Mathematical handbook for scientists and engineers. [Corn T., Corn G. Spravochnik po matematike dlja nauchnyh rabotnikov i inzhenerov]. Moscow: Nauka, 1973, pp. 228–230.

[20] Zakharov A.V. Distribution of Absolute Maximum of Unregular Gomogeneous Random

Process with Rayleigh and Gaussian Components. [Zaxarov A.V. Raspredelenie velichiny absolyutnogo maksimuma razryvnogo stacionarnogo sluchajnogo processa s releevskoj i gaussovskoj komponentami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 2, pp. 34–48.

[21] Kostylev V.I. Energy Separation of Some Random Vectors. [Kostylev V.I. E'nergeticheskoe razlichenie nekotoryx sluchajnyx vektorov]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 2, pp. 212–218.

[22] Zakharov A.V. Estimation of Time Delay of Fluctuated Radiopulse with Unknown Intensity. [Zaxarov A.V. Ocenka vremeni prixoda fluktuiruyushhego radioimpul'sa s neizvestnoj intensivnost'yu]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 1, pp. 25–40.

[23] Trifonov A.P., Korchagin Y.E., Bespalova M.B. Statistical Properties of Height and Provisions of Absolute Maximum Markov Processes Bachelier Type. [Trifonov A.P., Korchagin Yu.E'., Bespalova M.B. Statisticheskie svojstva vysoty i polozheniya absolyutnogo maksimuma markovskogo sluchajnogo processa tipa Bashel'e]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 4, pp. 54–65.

Бондрова О. В., ассистент кафедры алгебры, геометрии и анализа Дальневосточного федерального университета, Россия
E-mail: ctol_08@mail.ru
Тел.: 89020512870

Bondrova O.V., assistant of the Department of algebra, geometry and analysis of the Far Eastern Federal University
E-mail: ctol_08@mail.ru
Tel.: 89020512870