УДК 517.956

ТЕОРЕМЫ О “СЛЕДАХ” ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ВЫРОЖДЕНИЕМ*

А. Д. Баев, Р. А. Ковалевский, М. Б. Давыдова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 30.04.2014 г.

Аннотация: статья посвящена исследованию свойств при $t \to +0$ и при $t \to +\infty$ нового класса весовых псевдодифференциальных операторов с переменным символом. Предполагается также, что символ весового псевдодиффренциального оператора зависит от комплексного параметра. Псевдодифференциальные операторы, рассмотренные в статье, построены по специальному интегральному преобразованию, переводящему производные с весом в операцию умножения. Потребность в таких псевдодифференциальных операторах возникла при исследовании краевых задач для вырождающихся дифференциальных уравнений. В статье доказана теорема о предельных значениях при $t \to +0$ и при $t \to +\infty$ весовых псевдодифференциальных операторов с переменным символом, зависящем также от комплексного параметра.

Ключевые слова: преобразование Фурье, весовое преобразование, весовой псевдодифференциальный оператор, символ псевдодифференциального оператора, теоремы о “следах”.

THEOREMS ABOUT THE «TRECAS» FOR A CLASS OF PSEUDODIFFERENTIAL OPERATORS WITH DEGENERACY

A. D. Baev, R. A. Kovalevsky, M. B. Davidova

Abstract: the article is devoted to the study of the properties if and when a new weight class of pseudodifferential operators with variable symbol. It is also assumed that the symbol weight pseudodifferential operator depends on a complex parameter. Pseudo-differential operators, discussed in the article, based on a special integral transformation that takes derivatives with weight in the multiplication operation. The need for such pseudodifferential operators arose in the study of boundary value problems for degenerate differential equations. We prove a theorem on limit values if and when the weight of pseudodifferential operators with variable symbol, depending on a complex parameter.

Keywords: Fourier transform, weight conversion, weight pseudo-differential operator with the symbol of the pseudodifferential operator, theorems about "traces".

* Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 14–01–00867 и гранта Российского научного фонда № 14–21–00066.

ВВЕДЕНИЕ

Краевые задачи для уравнений с вырождением относятся к "неклассическим" задачам математической физики. Одна из главных трудностей, возникающих в теории вырождающихся эллиптических уравнений, связана с влиянием младших (в смысле теории регулярных эллиптических операторов) членов уравнения на постановку граничных задач и их коэрцитивную разрешимость.

Фундаментальные результаты для вырождающихся эллиптический уравнений принадлежат М. В. Келдышу [1]. Полученные им результаты затем развивались и обобщались О. А. Олейник [2]. Обобщенные решения вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка были исследованы в работах С. Г. Михлина [3] и М. И. Вишика [4]. В работах В. П. Глушко [5], [6] была установлена коэрцитивная разрешимость общих краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка в специальных весовых пространствах типа пространств С. Л. Соболева с весом.

Исследование вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка (при "степенном" характере вырождения) было начато в работах М. И. Вишика и В. В. Грушина [7], [8]. Затем ряд результатов для некоторых классов вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка был получен В. П. Глушко [9], [10], Х. Леопольдом [11], С. З. Левендорским [12]. Отметим, что существенным условием работы [12] является условие принадлежности основной весовой функции $\alpha(t)$ пространству $C^{\infty}(R^1)$.

Дальнейшее развитие теории коэрцитивной разрешимости вырождающихся уравнений потребовало развития теории псевдодифференциальных операторов. Одним из направлений развития этой теории стало исследование весовых псевдодифференциальных операторов, построенных по специальному интегральному преобразованию F_α, введенному в [13]. Исследование весовых псевдодифференциальных операторов с постоянным символом позволило доказать коэрцитивные априорные оценки и теоремы о существовании решений общих краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка (см. [13]). Изучение новых классов весовых псевдодифференциальных операторов с переменным символом позволило исследовать новые классы вырождающихся уравнений высокого порядка (см. [14], [15]).

Параболические задачи с вырождением по пространственной переменной приводятся к эллиптическим вырождающимся задачам, зависящим от комплексного параметра, для исследования которых необходимо исследовать новые классы вырождающихся псевдодифференциальных операторов с символами, зависящими от комплексного параметра. Некоторые свойства таких операторов были сформулированы в [16].

В статье доказаны теоремы о предельных значениях при $t \to +0$ и при $t \to +\infty$ для одного класса весовых псевдодифференциальных операторов с переменным символом, зависящим от комплексного параметра. Некоторые другие классы весовых псевдодифференциальных уравнений были изучены в работах [18]–[25].

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛИРОВКИ ТЕОРЕМ

Рассмотрим функцию $\alpha(t)$, $t \in R^1_+$, для которой $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$, $\alpha(t) = const$ для $t \geqslant d$ при некотором $d > 0$.

Рассмотрим интегральное преобразование

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int\limits_0^{+\infty} u(t) \exp(i\eta \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}) \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}, \tag{1}$$

определенное первоначально на функциях $u(t) \in C_0^\infty(R_+^1)$. Преобразование (1) связано с преобразованием Фурье

$$F_{\tau \to \eta}[u] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \exp(i\eta\tau) d\tau, \quad \eta \in R^1$$

следующим равенством

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = F_{\tau \to \eta}[u_\alpha(\tau)], \tag{2}$$

где $u_\alpha(\tau) = \sqrt{\alpha(t)} u(t)\Big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}$, $t = \varphi^{-1}(\tau)$ — функция, обратная к функции $\tau = \varphi(t) = \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$.

Для преобразования F_α справедлив аналог равенства Парсеваля

$$\|F_\alpha[u](\eta)\|_{L_2(R^1)} = \sqrt{2\pi}\, \|u\|_{L_2(R_+^1)}.$$

Это равенство даёт возможность расширить преобразование (1) до непрерывного преобразования, осуществляющего гомеоморфизм пространств $L_2(R^1)$ и $L_2(R_+^1)$, а также рассмотреть это преобразование на некоторых классах обобщенных функций. Для расширенного таким образом преобразования F_α сохраним старое обозначение. Обозначим через F_α^{-1} обратное к F_α преобразование, отображающее $L_2(R^1)$ на $L_2(R_+^1)$. Это преобразование можно записать в виде

$$F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F_{\eta \to \tau}^{-1}[w(\eta)]\Big|_{\tau = \varphi(t)}.$$

Можно показать, что на функциях $u(t) \in C_0^\infty(\bar{R}_+^1)$ выполняются соотношения

$$F_\alpha[D_{\alpha,t}^j u](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta), \ j = 1, 2, \ldots, \ \text{где } D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t \sqrt{\alpha(t)}, \quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Таким образом, преобразование F_α переводит операцию весового дифференцирования $D_{\alpha,t}$ в операцию умножения на двойственную переменную.

Определим пространства $H_{s,\alpha}(R_+^n)$; $H_{s,\alpha,q}(R_+^n)$ следующим образом.

Определение 1. Пространство $H_{s,\alpha}(R_+^n)$ (s — действительное число) состоит из всех функций $v(x,t) \in L_2(R_+^n)$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha}^2 = \int\limits_{R^n} (|p| + |\xi|^2 + \eta^2)^s \left|F_\alpha F_{x \to \xi}[v(x,t)]\right|^2 d\xi d\eta.$$

Определение 2. Пространство $H_{s,\alpha,q}(R_+^n)$ ($s \geqslant 0$, $q > 1$) состоит из всех функций $v(x,t) \in H_{s,\alpha}(R_+^n)$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha,q} = \{\sum_{l=0}^{[\frac{s}{q}]} \left\| F_{\xi \to x}^{-1} F_\alpha^{-1}[(\,|p| + |\xi|^{2+\eta}\, 2)_\alpha^{\frac{s-ql}{2}F} F_{x\to\xi}[\partial_t^l v]] \right\|_{L_2(R_n^+)}^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь $[\frac{s}{q}]$ — целая часть числа $\frac{s}{q}$. Нормы зависят от комплексного параметра $p \in Q$.

Пусть выполнено следующее условие.

Условие 1. Существует число $\nu \in (0,1]$ такое, что $|\alpha'(t)\alpha^{-\nu}(t)| \leqslant c < \infty$ при всех $t \in [0, +\infty)$. Кроме того, $\alpha(t) \in C^{s_1}[0, +\infty)$ для некоторого $s_1 \geqslant 2N - |\sigma|$, где $N \geqslant \max\limits_{0 \leqslant p_1 \leqslant l}\{2p_1 + \frac{l - p_1 + \frac{3}{2}}{\nu} + 1, \sigma + 1, \sigma + \frac{l}{2}\}$, $l = 1, 2\ldots$, σ — некоторое действительное число.

Можно показать, что указанное выше число ν существует, если $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$.

С помощью преобразования (1) и преобразования Фурье $F_{x\to\xi} = F_{x_1\to\xi_1}F_{x_2\to\xi_2}\dots F_{x_{n-1}\to\xi_{n-1}}$ определим весовой псевдодифференциальный оператор по формуле

$$K^{(\sigma)}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})v(x,t) = F_\alpha^{-1}F_{\xi\to x}^{-1}[\lambda(p,t,\xi,\eta)F_{x\to\xi}F_\alpha[v(x,t)]]. \tag{3}$$

Определение 3. Будем говорить, что символ $\lambda\,(p,t,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $K^{(\sigma)}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})$ принадлежит классу символов $S^\sigma_{\alpha,p}(\Omega)$, где $\Omega\subset\bar{R}^1_+$ — открытое множество, $p\in Q$, $Q=\{p: |\arg p|<\frac{\pi}{2},\ |p|>0\}$ — некоторый сектор в правой полуплоскости комплексной плоскости, σ — действительное число, если функция $\lambda\,(p,t,\xi,\eta)$ является бесконечно дифференцируемой функцией по переменной $t\in\Omega$ и по переменной $\eta\in R^1$. Причем, при всех $j=0,1,2,\dots$, $l=0,1,2,\dots$ справедливы оценки

$$\left|\left(\alpha(t)\frac{\partial}{\partial t}\right)^m\frac{\partial^l}{\partial\eta^l}\lambda\,(p,t,\xi,\eta)\right|\leqslant c_{m,l}\left(|p|^2+|\xi|^2+|\eta|^2\right)^{\frac{1}{2}(\sigma-l)} \tag{4}$$

с константами $c_{m,l}>0$, не зависящими от $\xi\in R^{n-1}$, $\eta\in R^1$, $p\in Q$, $t\in\Omega$.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть $q>1$, σ — действительные числа $v(x,t)\in H_{s+\sigma,\alpha,q}(R^n_+)$. Тогда при выполнении условия 1 справедливо равенство

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to+0}K^{(\sigma)}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})v(x,t) = \lim_{t\to+0}K^{(\sigma)}(p,0,D_x,0)v(x,t) =\\&= \lim_{t\to+0}F^{-1}_{\xi\to x}[\lambda(p,0,\xi,0)F_{x\to\xi}[v(x,t)]].\end{aligned} \tag{5}$$

Теорема 2. Пусть выполнено условие 1 и символ $\lambda(p,t,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $K^{(\sigma)}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})$ принадлежит классу $S^\sigma_\alpha(\Omega)$, $\sigma\in R^1$, $\Omega\subset\bar{R}^1_+$. Пусть при всех $\xi\in R^{n-1}$, $\eta\in R^1$ функция $\lambda(t,\xi,\eta)$ является ограниченной функцией по переменной t на множестве R^1_+. Пусть функция $v(x,t)$ такова, что функция $D^N_{\alpha,t}v(x,t)$ при всех $x\in R^{n-1}$ принадлежит, как функция переменной t пространству $L_2(R^1_+)$ при некотором $N\in[\max\{\sigma+1,1\};s_1]$, где s_1 определено в условии 1. Пусть $\lim\limits_{t\to+\infty}D^j_{\alpha,t}v(x,t)=0$ при всех $x\in R^{n-1}$, $j=0,1,2,\dots N-1$. Тогда при всех $x\in R^{n-1}$ справедливо равенство $\lim\limits_{t\to+\infty}K^{(\sigma)}(D_x,D_{\alpha,t})v(x,t)=0$.

2. СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 1

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.1. Пусть выполнено условие 1 и символ $\lambda(p,t,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора принадлежит классу $S^\sigma_{\alpha,p}(\Omega)$, $\Omega\subset\bar{R}^1_+,\sigma\in R^1$, $p\in Q$. Тогда для любой функции $v(x,t)\in C_0^\infty(R^n_+)$ справедливо равенство

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to+0}K^{(\sigma)}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})v(x,t) = F^{-1}_{\xi\to x}[\lambda(p,0,\xi,0)F_{x\to\xi}[v(x,0)]]+\\&+\lim_{t\to+0}F^{-1}_{\xi\to x}F^{-1}_\alpha[g_N(p,t,\xi,\eta)]F_\alpha F_{x\to\xi}[D^N_{\alpha,t}v]]\end{aligned} \tag{6}$$

где $N>0$ — целое число и s_1 в условии 1, такое , что $s_1\geqslant N$;

$$\begin{aligned}&g_N(p,t,\xi,\eta) = N\int\limits_0^1\lambda_N(p,t,\xi,\theta\eta)(1-\theta)^{N-1}d\theta,\\&\lambda_j(p,t,\xi,\eta) = \tfrac{(-1)^j}{j!}\partial^j_\eta\lambda(p,t,\xi,\eta),\ j=1,2,..N\end{aligned} \tag{7}$$

Доказательство. Воспользуемся формулой Тейлора.

Получим

$$\lambda(p,t,\xi,\eta)=\lambda(p,t,\xi,0)+\sum_{i=1}^{N-1}\lambda_j(p,t,\xi,0)\eta^i+g_N(p,t,\xi,\eta)\eta^N \tag{8}$$

где функция λ_i, q_N определены в (7)

Из (8) получим

$$\begin{aligned}&F_\alpha^{-1}[\lambda(p,t,\xi,\eta)F_\alpha[v(x,t)]]=F_\alpha^{-1}[\lambda(p,t,\xi,0)F_\alpha[v]]+\\&+\sum_{i=1}^{N-1}F_\alpha^{-1}[\lambda_i(p,t,\xi,0)F_\alpha[D^i_{\alpha,t}v(x,t)]]+F_\alpha^{-1}[g_N(p,t,\xi,\eta)F_\alpha[D^N_{\alpha,t}v]]\end{aligned} \tag{9}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}&F_\alpha^{-1}[\lambda_i(p,t,\xi,0)F_\alpha[D^i_{\alpha,t}v(x,t)]]=\lambda_i(p,t,\xi,0)D^i_{\alpha,t}v(x,t)\\&i=1,2\ldots\end{aligned} \tag{10}$$

И так как $D^i_{\alpha,t}v(x,t)\big|_{t=0}=0$ при $i=1,2,\ldots N-1$, то

$$F_\alpha^{-1}[\lambda_i(p,t,\xi,0)F_\alpha\ [D^i_{\alpha,t}v(x,t)]]\big|_{t=0}=0$$

Отсюда и из (9) следует (6).

Воспользуемся утверждениями, доказанными в [14].

Лемма 2.2. Пусть функция $\beta(\tau)$ принадлежит пространству $C^N(R^1)$ ($N\geqslant\sigma,\ \sigma\in R^1$). Пусть функция $\lambda(\tau,y)$ принадлежит $C^\infty(\Omega\times R^1)$, где Ω — произвольное открытое множество и при всех $j,l=0,1,2,\ldots$ справедливы оценки

$$\left|\partial_\tau^j\partial_y^j\lambda(\tau,y)\right|\leqslant c_{jl}(1+|y|)^{\sigma-j}$$

с некоторыми константами $c_{jl}>0$.

Тогда для любой функции $w(\tau)\in S(R^1)$ справедлива формула представления

$$\begin{aligned}&\beta(\tau)F^{-1}_{y\to\tau}[\lambda(\tau,y)F_{\tau\to y}[w]]-F^{-1}_{y\to\tau}[\lambda(\tau,y)F_{\tau\to y}[\beta(\tau)w]]=\\&=\sum_{i=1}^{N-1}F^{-1}_{y\to\tau}[\lambda_i(\tau,y)F_\alpha[D^i_{\alpha,t}\beta(\tau)\cdot w]]+F^{-1}_{y\to\tau}[\int_{-\infty}^{\infty}q_N(\tau,y-z,z)\cdot\\&\cdot F_{\tau\to(y-z)}[D^N_\tau\beta(\tau)]F_{\tau\to z}[w]dz],\end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\lambda_i(y)=\frac{(-1)^i}{i!}\partial_y^i\lambda(\tau,y)$$

$$q_N(\tau,y-z,z)=N\int_0^1\lambda_N(\tau,y-t(y-x))(1-t)^{N-1}dt$$

Следствие 2.1. Пусть функция $\beta(\tau)$ удовлетворяет условиям леммы 2.1. Пусть функция $\lambda(\tau,\eta)\in C^\infty(\Omega_1\times R^1)$, где $\Omega_1\in R^1$ и при всех $j,l=0,1,2\ldots$ справедлива оценка $\left|\partial_\tau^j\partial_y^l\lambda(\tau,y)\right|\leqslant c_{jl}<\infty$ с некоторыми константами c_{jl}. Тогда при всех $w(\tau)\in S(R^1)$ справедливо равенство (11).

С использованием этих утверждений доказывается следующая лемма.

Лемма 2.3. Пусть выполнены условия леммы 2.1. Тогда для любой функции $u(x,t)\in C_0^\infty(R^n_+)$ при $N\geqslant\sigma$ справедливо равенство

$$\begin{aligned}&F_\alpha^{-1}[g_N(p,t,\xi,\eta)F_\alpha[D^N_{\alpha,t}u(t)]]=\{F^{-1}_{\eta\to\tau}[g_N(p,t,\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}[\beta(\tau)w(\tau)]]+\\&+\sum_{i=1}^{N-1}F^{-1}_{\eta\to\tau}[g_{N,i}(p,t,\xi,\eta]F_{\tau\to\eta}[D^i_\tau\beta(\tau)\cdot w(\tau)]+\\&+F^{-1}_{\eta\to\tau}[\int_{-\infty}^{\infty}F_{\tau\to(\eta-y)}[D^{N_1}_\tau\beta(\tau)]\cdot\widetilde{g}_{N,N_1}(p,t,\xi,\eta-y,y)F_{\tau\to y}[w]dy\ \}|_{\tau=\varphi(t)}\end{aligned} \tag{12}$$

Здесь функции $\beta(\tau), w(\tau)$ определены формулами $\beta(\tau) = \alpha^{-\frac{1}{2}}(t)|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}$, где $t = \varphi^{-1}(\tau)$ — функция, обратная к функции $\tau = \varphi(t) = \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$.

$$w(\tau) = \sqrt{\alpha(t)} D_{\alpha,t}^N\, u(t)|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}\,,\ D_{\alpha,t} = -\sqrt{-\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)}$$

$$g_{N,i}(p,t,\xi,\eta) = \frac{(-1)^i}{i!}\partial_\eta^i g_N(p,t,\xi,\eta) \tag{13}$$

$$\widetilde{g}_{N,N_1}(p,t,\xi,\eta-y,y) = N\int\limits_0^1 g_{N,N_1}(p,t,\xi,\eta-\theta(\eta-y))(1-\theta)^{N_1-1}d\theta \tag{14}$$

Доказательство. Заметим, что, функция $\beta(\tau)$ удовлетворяет условиям леммы 2.2. Кроме того, так как $\lambda(p,t,\xi,\eta) \in S_\alpha^\sigma(\Omega)$, то функция $g_N(t,\xi,\eta)$ принадлежит по переменной η пространству $C^\infty(R^1)$ и справедливы оценки

$$\left|\partial_\eta^i g_N(p,t,\xi,\eta)\right| \leqslant c\int\limits_0^1 (|p|+|\xi|^2+(\theta\eta)^2)^{\frac{1}{2}(-N-i+\sigma)}d\theta \leqslant c < \infty$$

при всех $i = 0,1,2,\ldots$, при $N \geqslant \sigma$.

Отсюда и из следствия 2.1 получим равенство (12).

Лемма 2.4. Пусть выполнены условия леммы 2.1; $u(t) \in C_0^\infty(R_+^1)$. Тогда при всех $\xi \in R^{n-1}$, t, принадлежащих носителю функции $u(t)$ и всех $p \in Q$ функция

$$f_0(p,t,\xi,\eta) = F_{\tau\to\eta}[\beta(\tau)w(\tau)]g_N(p,t,\xi,\eta) \tag{15}$$

принадлежит по переменной η пространству $L_1(R^1)$ при $N \geqslant \max\{\sigma+1, 1+\frac{1}{\nu}\}$.

Здесь функции $\beta(\tau), w(\tau)$ определены в лемме 2.3.

Доказательство. При всех $N \geqslant \sigma+1$ можно доказать неравенство

$$|\eta g_N(p,t,\xi,\eta)| \leqslant c\left|\int\limits_0^{|\eta|}(1+|p|+|\xi|^2+\theta_1^2)^{\sigma-N}d\theta_1\right| \leqslant c_1 < \infty$$

с некоторой константой $c_1 > 0$, не зависящей от ξ, t. Значит, функция $g_N(p,t,\xi,\eta)$ принадлежит по переменной η пространству $L_2(R^1)$. Отсюда получаем, что функция $\beta(\tau)w(\tau) \in L_2(R^1)$, а значит, $F_{\tau\to\eta}[\beta(\tau)w(\tau)] \in L_2(R^1)$. Отсюда и из (15) получаем, что $f_0(p,t,\xi,\eta)$ принадлежит по η пространству $L_1(R^1)$, как производные двух функций из $L_2(R^1)$.

И леммы 2.4 выводим следующее утверждение.

Следствие 2.2. Пусть выполнены условия леммы 2.4. Тогда при всех $\xi \in R^{n-1}$, t, принадлежащих носителю функции $u(t)$, и всех $p \in Q$ функция

$$f_i(p,t,\xi,\eta) = g_{N,i}(p,t,\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}[D_\tau^i\beta(\tau)\cdot w(\tau)]$$

принадлежит по переменной η пространству $L_1(R^1)$.

Теорема 2.1. Пусть выполнено условие 1 и символ $\lambda(p,t,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора принадлежит классу $S_{\alpha,p}^\sigma(\Omega)$, $\Omega \subset \bar{R}_+^1, \sigma \in R^1, p \in Q$. Тогда для любой функции $v(x,t) \in C_0^\infty(R_+^n)$ справедливо равенство

$$\lim_{t\to+0} F_{\xi\to x}^{-1}F_\alpha^{-1}[g_N(t,\xi,\eta)]F_{x\to\xi}F_\alpha[D_{\alpha,t}^N v(x,t)]] = 0 \tag{16}$$

при $N \geqslant \max\{\sigma+1\}, 1+\frac{1}{\nu}\}$

Доказательство. Так как $g_{N,i}(p,t,\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}[D^i_\tau\beta(\tau)\cdot w(\tau)] \in L_1(R^1)$ по переменной $\eta \in R^1$, при всех $p \in Q$, $\xi \in R^{n-1}$, и всех t, принадлежащих носителю функции v, то в силу теоремы Римана–Лебега, получим соотношение

$$F^{-1}_{\eta\to\tau}[g_{N,i}(p,t,\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}[D^i_\tau\beta(\tau)w(\tau)]] \to 0 \text{ при } |\tau| \to \infty.$$

Заметим, что условие $\tau \to +\infty$равносильно условию $t = \varphi^{-1}(\tau) \to +0$. Отсюда получим, что

$$\sum_{i=0}^{N-1} \lim_{t\to+0}[F^{-1}_{\eta\to\eta}[g_{N,i}(p,t,\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}[D^i_\tau\beta(\tau)\cdot w(\tau)]\,]|_{\tau=\varphi(t)} = 0 \tag{17}$$

где $g_{N,0}(p,t,\xi,\eta) \equiv g_N(p,t,\xi,\eta)$.

Из (12) и (17) следует, что для доказательства теоремы 2.1 осталось доказать, что

$$\lim_{\tau\to+\infty} F^{-1}_{\eta\to\tau}[\int\limits_{-\infty}^{\infty} F_{\tau\to(\eta-y)}[D^{N_1}_\tau\beta]\widetilde{g}_{N,N_1}(p,t,\xi,\eta-y,y)F_{\tau\to y}[w]dy] = 0 \tag{18}$$

где функция $\widetilde{g}_{N,N_1}$ определена в (14).

Для доказательства (18) достаточно показать соотношение

$$J = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_{\tau\to(\eta-y)}[D^{N_1}_\tau\beta]\widetilde{g}_{N,N_1}(p,t,\xi,\eta-y,y)F_{\tau\to y}[w]dy \in L_1(R^1) \tag{19}$$

Из (14) получим, что $|\widetilde{g}_{N,N_1}(p,t,\xi,\eta-y,y)| \leqslant c < \infty$ при $N+N_1 \geqslant \sigma$, причем константа $c > 0$ не зависит от t,ξ,η,y.

Отсюда с помощью неравенства Минковского получим

$$\|J\|_{L_1(R^1)} \leqslant c\left\|F_{\tau\to y}[D^{N_1}_\tau\beta(\tau)]\right\|_{L_1(R^1)} \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F_{\tau\to y}[w]|dy \tag{20}$$

Далее доказывается, что справедливы соотношения: $F_{\tau\to y}[D^{N_1}_\tau\beta(\tau)] \in L_1(R^1)$ при $N_1 \geqslant \max[\frac{3}{2\nu}, 1+\frac{1}{\nu}]$ и $F_{\tau\to y}[w] \in L_1(R^1)$. Отсюда и из (20) получим (19).

Теорема 2.1 доказана.

Утверждение теоремы 1 для функций $v(x,t) \in C^\infty_0(R^n_+)$ следует теперь из леммы 2.1 и теоремы 2.1. В общем случае утверждение теоремы 1 следует из того, что множество функций $C^\infty_0(R^n_+)$ плотно в пространстве $H_{q+\sigma,\alpha,q}(R^n_+)$.

3. СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 2

Воспользовавшись формулой Тейлора, находим

$$\lambda(p,t,\xi,\eta) = \lambda(p,t,\xi,0) + \sum_{i=1}^{N-1}\lambda_i(p,t,\xi,0)\eta^i + g_N(p,t,\xi,\eta)\eta^N \tag{21}$$

где

$$\begin{cases} \lambda_i(p,t,\xi,\eta) = \frac{1}{i!}\partial^i_\eta\lambda(p,t,\xi,\eta) \\ g_N(p,t,\xi,\eta) = N\int\limits_0^1 \lambda_N(p,t,\xi,\theta\eta)(1-\theta)^{N-1}d\theta \end{cases} \tag{22}$$

Таким образом, получаем равенство

$$K^{(\sigma)}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u(\xi,t) \equiv \lambda(p,t,\xi,0)u(\xi,t) + \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i(p,t,\xi,0)D^i_{\alpha,t}u(\xi,t) + \\ + F^{-1}_\alpha[g_N(p,t,\xi,\eta)F_\alpha[D^N_{\alpha,t}u]] \tag{23}$$

Выберем число N так, что бы $\max(\sigma+1,1) < N \leqslant s_1$. Тогда можно доказать, при любых фиксированных $\xi \in R^{n-1}$, $p \in Q$ справедливо равенство

$$\lim_{t\to+\infty} K^{(\sigma)}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})u(\xi,t) = \lim_{t\to+\infty} F^{-1}_\alpha[g_N(p,t,\xi,\eta)F_\alpha[D^N_{\alpha,t}u(\xi,t)]] \tag{24}$$

Из (23) вытекает, что для доказательства теоремы 2 остается установить соотношение

$$\lim_{t\to+\infty} F^{-1}_\alpha[g_N(p,t,\xi,\eta)F_\alpha[D^N_{\alpha,t}u(\xi,t)]] = 0. \tag{25}$$

Так как $\alpha(t) = const = c > 0$ при $t \geqslant d > 0$, то с помощью определения преобразования F^{-1}_α получим равенство

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to+\infty} F^{-1}_\alpha[g_N(p,t,\xi,\eta)F_\alpha[D^N_{\alpha,t}u(\xi,t)]] = \\ &= \tfrac{1}{c}\lim_{t\to+\infty} F^{-1}_{\eta\to\tau}[g_N(p,t,\xi,\eta)F_\alpha[D^N_{\alpha,t}u]\,]|_{\tau=\varphi(t)} = \\ &= \tfrac{1}{c}\lim_{t\to-\infty} F^{-1}_{\eta\to\tau}[g_N(p,t,\xi,\eta)F_\alpha[D^N_{\alpha,t}u(\xi,t)]]. \end{aligned} \tag{26}$$

Следовательно, из (25) и (26) вытекает, что для доказательства теоремы 2 достаточно показать, что

$$\lim_{t\to-\infty} F^{-1}_{\eta\to\tau}[g_N(p,t,\xi,\eta)F_\alpha[D^N_{\alpha,t}u(\xi,t)]] = 0 \tag{27}$$

Равенство (27) докажем с помощью леммы Римана-Лебега. Из этой леммы следует, что равенство (27) справедливо, если при каждом $\xi \in R^{n-1}$, $p \in Q$ справедливо соотношение

$$g_N(p,t,\xi,\eta)F_\alpha[D^N_{\alpha,t}u(\xi,t)] \in L_1(R^1) \tag{28}$$

Докажем соотношение (28). Воспользуемся оценкой

$$|g_N(p,t,\xi,\eta)| \leqslant c\int_0^1 (|p|+|\xi|^2+(\theta\eta)^2)^{\frac{1}{2}(\sigma-N)}d\theta.$$

Отсюда при $N > \max\{\sigma+1,1\}$, получим

$$|\eta g_N(p,t,\xi,\eta)| \leqslant c\int_0^{|\eta|} (|p|+|\xi|^2+\theta_1^2)^{\frac{1}{2}(\sigma-N)}d\theta_1 \leqslant \widetilde{c} < \infty \tag{29}$$

Из (29) выводим, что функция $g_N(p,t,\xi,\eta)$ принадлежит по η при каждом $\xi \in R^{n-1}$, $p \in Q$ пространству $L_2(R^1)$. Кроме того, по условию теоремы 2, функция $D^N_{\alpha,t}u(\xi,t)$ принадлежит (по переменной t)пространству $L_2(R^1_+)$ при каждом $\xi \in R^{n-1}$. Тогда функция $F_\alpha[D^N_{\alpha,t}u](\xi,\eta)$ принадлежит (по η) пространству $L_2(R^1)$ при каждом $\xi \in R^{n-1}$.

Таким образом, имеем оценку

$$\left\|g_N(p,t,\xi,\eta)F_\alpha[D^N_{\alpha,t}u(\xi,t)]\right\|_{L_1(R^1)} \leqslant \|g_N(p,t,\xi,\eta)\|_{L_1(R^1)}\left\|F_\alpha[D^N_{\alpha,t}u]\right\|_{L_1(R^1)} \leqslant c < \infty.$$

Из последней оценки вытекает включение (28), которое доказывает утверждение теоремы 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Келдыш М.В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области / М.В. Келдыш // Доклады Академии наук. — 1951. — Т. 77, № 2. — С. 181–183.

[2] Олейник О.А. Об уравнениях эллиптического типа, вырождающихся на границе области / О.А. Олейник // Доклады Академии наук. — 1952. — Т. 87, № 6. — С. 885–887.

[3] Михлин С.Г. Вырождающиеся эллиптические уравнения / С.Г. Михлин // Вестн. Ленинградского гос. ун-та. — 1954. — № 8. — С. 19–48.

[4] Вишик М.И. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области / М.И. Вишик // Математический сборник. — 1954. — Т. 35 (77), № 3. — С. 513–568.

[5] Глушко В.П. Коэрцитивность в L_2 общих граничных задач для вырождающегося эллиптического уравнения второго порядка / В.П. Глушко // Функциональный анализ и его приложения. — 1968. — Т. 2, № 3. — С. 87–88.

[6] Глушко В.П. Оценки в L_2 и разрешимость общих граничных задач для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка / В.П. Глушко // Труды Московского математического общества. — 1970. — Т. 23. — С. 113–178.

[7] Вишик М.И. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области / М.И. Вишик, В.В. Грушин // Математический сборник. — 1969. — Т. 80 (112), № 4. — С. 455–491.

[8] Вишик М.И. Вырождающиеся эллиптические дифференциальные и псевдодифференциальные операторы / М.И. Вишик, В.В. Грушин // Успехи математических наук. — 1970. — Т. 25, № 4. — С. 29–56.

[9] Глушко В.П. Теоремы разрешимости краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / В.П. Глушко // Дифференциальные уравнения с частными производными: тр. семинара акад. С.Л. Соболева. — Новосибирск, 1978. — № 2. — С. 49–68.

[10] Глушко В.П. Априорные оценки решений краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / В.П. Глушко; Воронеж. гос. ун-т. — Воронеж, 1979. — 47 с. — Деп. в ВИНИТИ 27.03.79, № 1048–79.

[11] Леопольд Х.Г. Априорные оценки для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка с невырождающейся второй производной / Х.Г. Леопольд. — Новосибирск, 1981. — 33 с. — Деп. в ВИНИТИ 29.08.81, № 4269–81.

[12] Левендорский С.З. Краевые задачи в полупространстве для квазиэллиптических псевдодифференциальных операторов, вырождающихся на границе / С.З. Левендорский // Математический сборник. — 1980. — Т. 111 (153), № 4. — С. 483–501.

[13] Баев А.Д. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы / А.Д. Баев // Доклады Академии наук. — 1982. — Т. 265, № 5. — С. 1044–1046.

[14] Баев А.Д. Качественные методы теории краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений / А.Д. Баев. — Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 2008. — 240 с.

[15] Баев А.Д. Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А.Д. Баев // Доклады Академии наук. — 2008. — Т. 422, № 6. — С. 727–728.

[16] Баев А.Д. Об одном классе псевдодифференциальных операторов с вырождением / А.Д. Баев, Р.А. Ковалевский // Доклады Академии наук. — 2014. — Т. 454, № 1. — С. 1–4.

[17] Грушин В.В. Псевдодифференциальные операторы / В.В. Грушин. — М.: Моск. ин-т электронного машиностроения, 1975. — 107 с.

[18] Баев А.Д. Теоремы об ограниченности и композиции для одного класса весовых псев-

додифференциальных операторов / А.Д. Баев, Р.А. Ковалевский // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 39–49.

[19] Баев А.Д. Априорные оценки и существование решений краевых задач в полупространстве для одного класса вырождающихся псевдодифференциальных уравнений / А.Д. Баев, П.В. Садчиков // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2010. — № 1. — С. 162–168.

[20] Баев А.Д. О некоторых свойствах одного класса псевдодифференциальных операторов с вырождением / А.Д. Баев, П.А. Кобылинский // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 66–73.

[21] Баев А.Д. О свойствах коммутации одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов / А.Д. Баев, П.А. Кобылинский // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 4. — С. 102–108.

[22] Баев А.Д. Об априорной оценке решений общей краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка / А.Д. Баев // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2008. — № 1. — С. 152–156.

[23] Баев А.Д. Об одном классе весовых псевдодифференциальных операторов с переменным символом / А.Д. Баев, П.В. Садчиков // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2009. — № 2. — С. 16–20.

[24] Баев А.Д. Априорная оценка решений одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка / А.Д. Баев, С.С. Бунеев // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2012. — № 1. — С. 81–92.

[25] Баев А.Д. Решение задач для дескрипторных уравнений методом декомпозиции / А.Д. Баев, С.П. Зубова, В.И. Усков // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 2. — С. 134–140.

REFERENCES

[1] Keldysh, M.V. Some cases of degeneration of elliptic equations on the boundary of a region. [Keldysh M.V. O nekotoryx sluchayax vyrozhdeniya uravnenij e'llipticheskogo tipa na granice oblasti]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 1951, vol. 77, no. 2, pp. 181–183.

[2] Oleinik O.A. About the elliptic equations degenerate on the boundary region. [Olejnik O.A. Ob uravneniyax e'llipticheskogo tipa, vyrozhdayushhixsya na granice oblasti]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 1952, vol. 87, no. 6, pp. 885–887.

[3] Mikhlin, S.G. Degenerate elliptic equations. [Mixlin S.G. Vyrozhdayushhiesya e'llipticheskie uravneniya]. *Vestnik Leningradskogo gosudarstvennogo universiteta — Bulletin of the Leningrad State University*, 1954, no. 8, pp. 19–48.

[4] Vishik M. Boundary value problems for elliptic equations degenerate on the boundary region. [Vishik M.I. Kraevye zadachi dlya e'llipticheskix uravnenij, vyrozhdayushhixsya na granice oblasti]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 1954, vol. 35 (77), iss. 3, pp. 513–568.

[5] Glushko V.P. Coercivity in General boundary value problems for degenerate elliptic equations of second order. [Glushko V.P. Koe'rcitivnost' v L_2 obshhix granichnyx zadach dlya vyrozhdayushhegosya e'llipticheskogo uravneniya vtorogo poryadka]. *Funkcional'nyj analiz i ego prilozheniya — Functional analysis and its applications*, 1968, vol. 2, iss. 3, pp. 87–88.

[6] Glushko V.P. Assessment and in the General solvability of boundary value problems for degenerate elliptic equations of second order. [Glushko V.P. Ocenki v L_2 i razreshimost' obshhix granichnyx zadach dlya vyrozhdayushhixsya e'llipticheskix uravnenij vtorogo poryadka]. *Trudy Moskovskogo matematicheskogo obshhestva — Proceedings of the Moscow Mathematical Society*, 1970, vol. 23, pp. 113–178.

[7] Vishik M.I.,Grushin V.V. Boundary value problems for elliptic equations degenerate on the boundary region. [Vishik M.I., Grushin V.V. Kraevye zadachi dlya e'llipticheskix uravnenij,

vyrozhdayushhixsya na granice oblasti]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 1969, vol. 80 (112), iss. 4, pp. 455–491.

[8] Vishik M.I., Grushin V.V. Degenerate elliptic differential and pseudodifferential operators. [Vishik M.I., Grushin V.V. Vyrozhdayushhiesya e'llipticheskie differencial'nye i psevdodifferencial'nye operatory]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 1970, vol. 25, iss. 4, pp. 29–56.

[9] Glushko V.P. Theorem on the solvability of boundary value problems for a class of degenerate elliptic equations of high order. [Glushko V.P. Teoremy razreshimosti kraevyx zadach dlya odnogo klassa vyrozhdayushhixsya e'llipticheskix uravnenij vysokogo poryadka]. *Differencial'nye uravneniya s chastnymi proizvodnymi: tr. seminara akad. S.L. Soboleva — Differential equations, proc. seminar Acad. S. L. Sobolev*, Novosibirsk, 1978, no. 2, pp. 49–68.

[10] Glushko V.P. A priori estimates of solutions of boundary value problems for a class of degenerate elliptic equations of high order. [Glushko V.P. Apriornye ocenki reshenij kraevyx zadach dlya odnogo klassa vyrozhdayushhixsya e'llipticheskix uravnenij vysokogo poryadka]. *Voronezh. gos. un-t., Voronezh, 1979, 47 s, Dep. v VINITI 27.03.79, № 1048–79 — Voronezh State University, Voronezh, 1979, 47 p, Department. in VINITI 27.03.79, no. 1048–79.*

[11] Leopold H. G. Priori estimates for degenerate elliptic equations of higher order with noverojamas second derivative. [Leopol'd X.G. Apriornye ocenki dlya vyrozhdayushhixsya e'llipticheskix uravnenij vysokogo poryadka s nevyrozhdayushhejsya vtoroj proizvodnoj]. *Novosibirsk, 1981, 33 s., Dep. v VINITI 29.08.81, № 4269–81 — Novosibirsk, 1981, 33 p., Dept. in VINITI 29.08.81, no. 4269–81.*

[12] Levendorskii S.Z. Boundary value problems in the half space for quasi-elliptic pseudodifferential operators degenerate on the boundary. [Levendorskij S.Z. Kraevye zadachi v poluprostranstve dlya kvazie'llipticheskix psevdodifferencial'nyx operatorov, vyrozhdayushhixsya na granice]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 1980, vol. 111 (153), no. 4, pp. 483–501.

[13] Baev A.D. Degenerate elliptic equations of higher order and their associated pseudodifferential operators. [Baev A.D. Vyrozhdayushhiesya e'llipticheskie uravneniya vysokogo poryadka i svyazannye s nimi psevdodifferencial'nye operatory]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 1982, vol. 265, no. 5, pp. 1044–1046.

[14] Baev A.D. Qualitative methods of the theory of boundary value problems for degenerate elliptic equations. [Baev A.D. Kachestvennye metody teorii kraevyx zadach dlya vyrozhdayushhixsya e'llipticheskix uravnenij]. Voronezh: Voronezh State University, 2008, 240 p.

[15] Baev A.D. On General boundary value problems in the half space for degenerate elliptic equations of high order. [Baev A.D. Ob obshhix kraevyx zadachax v poluprostranstve dlya vyrozhdayushhixsya e'llipticheskix uravnenij vysokogo poryadka]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2008, vol. 422, no. 6, pp. 727–728.

[16] Baev A.D., Kowalewski R.A. On a class of pseudodifferential operators with degeneration. [Baev A.D., Kovalevskij R.A. Ob odnom klasse psevdodifferencial'nyx operatorov s vyrozhdeniem]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2014, vol. 454, no. 1, pp. 1–4.

[17] Grushin V.V. Pseudodifferential operators. [Grushin V.V. Psevdodifferencial'nye operatory]. Moscow: Moskow Institute of electronic engineering, 1975, 107 p.

[18] Baev A.D., Kovalevsky R.A. Theorem on boundedness and compositions for one weight class of pseudodifferential operators. [Baev A.D., R.A. Kovalevskij Teoremy ob ogranichennosti i kompozicii dlya odnogo klassa vesovyx psevdodifferencial'nyx operatorov]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 1, pp. 39–49.

[19] Baev A.D., Sadchikov P.V. a Priori estimates and existence of solutions to boundary value problems in the half space for a class of degenerate pseudodifferential equations. [Baev A.D.,

Sadchikov P.V. Apriornye ocenki i sushhestvovanie reshenij kraevyx zadach v poluprostranstve dlya odnogo klassa vyrozhdayushhixsya psevdodifferencial'nyx uravnenij]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2010, no. 1, pp. 162–168.

[20] Baev A.D., Kobylinsky P.A. Some properties of one class of pseudodifferential operators with degeneration. [Baev A.D., Kobylinskij P.A. O nekotoryx svojstvax odnogo klassa psevdodifferencial'nyx operatorov s vyrozhdeniem]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 2, pp. 66–73.

[21] Baev A.D., Kobylinsky P.A. About the properties of switching a class of degenerate pseudodifferential operators. [Baev A.D., Kobylinskij P.A. O svojstvax kommutacii odnogo klassa vyrozhdayushhixsya psevdodifferencial'nyx operatorov]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 4, pp. 102–108.

[22] Baev A.D. A priori estimate of solutions of General boundary value problem in a strip for degenerate elliptic equations of high order. [Baev A.D. Ob apriornoj ocenke reshenij obshhej kraevoj zadachi v polose dlya vyrozhdayushhegosya e'llipticheskogo uravneniya vysokogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2008, no. 1, pp. 152–156.

[23] Baev A.D., Sadchikov P.V. About the same weight class of pseudodifferential operators with variable symbol. [Baev A.D., Sadchikov P.V. Ob odnom klasse vesovyx psevdodifferencial'nyx operatorov s peremennym simvolom]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2009, no. 2, pp. 16–20.

[24] Baev A.D., Buneev S.S. A Priori estimate of solutions of a boundary value problem in a strip for degenerate elliptic equations of high order. [Baev A.D., Buneev S.S. Apriornaya ocenka reshenij odnoj kraevoj zadachi v polose dlya vyrozhdayushhegosya e'llipticheskogo uravneniya vysokogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 1, pp. 81–92.

[25] Baev A.D., Zubov S.P., Uskov V.I. The Solution of problems for descriptor equations by decomposition method. [Baev A.D., Zubova S.P., Uskov V.I. Reshenie zadach dlya deskriptornyx uravnenij metodom dekompozicii]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 2, pp. 134–140.

Баев Александр Дмитриевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа, математический факультет Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: alexsandrbaev@mail.ru

Baev Alexander D., doctor of physical-mathematical Sciences, Professor, head of Department of mathematical analysis, Voronezh state University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: alexsandrbaev@mail.ru

Ковалевский Ростислав Александрович, аспирант математического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: rkovalevskiy@yandex.ru

Kovalevsky Rostislav A., graduate student Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: rkovalevskiy@yandex.ru

Давыдова Майя Борисовна, доцент кафедры математического анализа, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: mbd@vsu.ru

Davydova Maya B., associate Professor of mathematical analysis, Voronezh state University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: mbd@vsu.ru