УДК 533.6.011.72, 532.511, 532.518

ГИПОТЕЗА ОБ УПРОЩЕНИИ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К УРАВНЕНИЯМ ГИДРОДИНАМИКИ

М. Л. Зайцев[1], **В. Б. Аккерман**[2]

[1] *Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, Москва, Россия*
[2] *Университет Западной Вирджинии, Моргантаун, США*

Поступила в редакцию 12.08.2014 г.

Аннотация: показывается, что любая переопределенная независимым уравнением система дифференциальных уравнений может быть понижена в размерности, что делает эту систему удобной для моделирования. В частности, вместо трехмерных систем уравнений можно решать двухмерные, одномерные и т.д. Найдено достаточное условие для независимости уравнения связи. Данный подход можно применять для поиска и аналитических решений переопределенных систем дифференциальных уравнений. Для примера, приведены преобразованные, переопределенные системы уравнений гидродинамики и тестовые аналитические примеры. Приводятся физические выводы, а также общий способ преобразования любых систем дифференциальных уравнений к переопределенным путем увеличения числа переменных на единицу.

Ключевые слова: гидродинамика, уравнения Навье-Стокса, дифференциальные уравнения на поверхности, размерность дифференциальных уравнений.

HYPOTHESIS ON REDUCTION OF OVERDETERMINED SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS AND ITS APPLICATION TO EQUATIONS OF HYDRODYNAMICS

M. L. Zaytsev, V. B. Akkerman

Abstract: it is shown how the dimension of any arbitrary over-determined system of differential equations by independent constraint equation could be reduced, which makes the system suitable for numerical solution modeling. In particular, instead of three-dimensional systems of equations one can solve two-dimensional, one-dimensional systems, etc. We give a sufficient condition for the independence of the constraint equation. This approach can be used to search analytical solutions of overdetermined systems of differential equations. For example, we present the overdetermined systems of hydrodynamic equations and analytical test examples. Physical conclusions are presented as well as a general method for converting any system of differential equations to the over-determined one by increasing the number of variables per unit.

Keywords: hydrodynamics, Navier-Stokes equations, differential equation on the surface, dimension of differential equations.

1. ВВЕДЕНИЕ

Точные решения дифференциальных уравнений математической физики всегда играли и продолжают играть важнейшую роль в формировании правильного понимания качественных особенностей многих явлений и процессов в различных областях науки и техники (см. [1]). Можно сказать, что невозможность решить эти уравнения аналитически является препятствием для дальнейшего изучения многих физических явлений и применения их на практике. Точные решения нелинейных уравнений наглядно демонстрируют и позволяют разобраться в механизме таких сложных нелинейных эффектов, как пространственная локализация процессов переноса, волн горения, взрывных реакций, множественность или отсутствие стационарных состояний и др. Научный интерес представляет даже поиск решений дифференциальных уравнений, которые не имеют ясного физического приложения. Тем не менее, подобные примеры могут быть успешно использованы в качестве "тестовых" задач при проверке корректности и оценке точности различных численных, асимптотических и приближенных методов, которые, в свою очередь, позволяют исследовать уже более сложные задачи тепло и массопереноса.

Однако найти точные аналитические решения во многих задачах математической физики далеко не всегда возможно. Поэтому приходится прибегать к прямому численному моделированию, чтобы получить приближенные численные результаты. При моделировании в практических задачах часто приходится составлять очень тонкую численную сетку по пространству и времени, что требует больших вычислительных мощностей и затрат времени (см. [2]). В результате, как один из возможных выходов, большой интерес представляют различные способы сведения, в частности, полной системы гидродинамических уравнений по объему к системе уравнений на поверхности (см. [3]–[7]). Подобная процедура позволяет уменьшить размерность задачи на единицу, что существенно сокращает необходимые вычислительные мощности. Хорошо известны классические уравнения для описания двухмерного течения на плоскости с помощью уравнений, записанных на границе области [8]–[12]. Например, при исчезающе малой вязкости задача описания потенциального обтекания на плоскости сводится к интегральному уравнению на границе области (задачи Дирихле, Неймана) [1], [8]–[10] Это уравнение связывает тангенциальную и нормальную составляющие скорости. Зная одну из них на границе обтекаемого тела, можно определить весь внешний поток [8]–[10]. Это имеет место и для случая очень большой вязкости ("ползучее течение"). Ползучие вязкие течения — это медленные течения, в которых все гидродинамические характеристики определяются вязкими напряжениями, а инерционные эффекты пренебрежимо малы (ускорения настолько малы, что ими пренебрегают) [13]. Оно встречается в течении ледников (вязкость льда велика настолько, что многокилометровые массы льда движутся очень медленно), при смазке в технических устройствах, при движении мелких частиц суспензии и т.д. Давление и завихренность в ползущих течениях являются гармоническим функциями, а следовательно их нахождение во всем пространстве также сводится к интегральному уравнению на границе области.

В работе [14] был предложен достаточно общий метод снижения размерности переопределенных систем дифференциальных уравнений. Это позволяет, например, свести уравнения гидродинамики по объему к системе уравнений на поверхности. В данной работе предлагается упрощение (модификация) этого метода. Количество выкладок и уравнений пониженной размерности существенно сокращается, но при этом требуется, чтобы у исходной системы был "нормальный вид" и некий определитель был тождественно не равен нулю. Мы излагаем эту идею, приводим аналитические, модельные примеры и преобразовываем уравнения гидродинамики с тем, чтобы к ним можно было бы применить данный метод.

2. ОСНОВНАЯ ИДЕЯ МЕТОДА

Рассмотрим для примера следующую систему из двух линейных дифференциальных уравнений в частных производных, переопределенную одним уравнением:

Пример 1.

$$\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial G}{\partial x} = H, \tag{1}$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x} = G, \tag{2}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} - x\frac{\partial G}{\partial x} = 0. \tag{3}$$

Эта система имеет общее нулевое решение. Подставим в (3) выражение для производной $\partial G/\partial x$ из формулы (1):

$$\frac{\partial H}{\partial t} - x\left(\frac{\partial H}{\partial t} - H\right) = 0$$

или

$$(1-x)\,\frac{\partial H}{\partial t} + xH = 0. \tag{4}$$

Продифференцируем (4) по x:

$$-\frac{\partial H}{\partial t} + (1-x)\,\frac{\partial^2 H}{\partial t \partial x} + H + x\frac{\partial H}{\partial x} = 0$$

или после подстановки производной $\partial H/\partial x$ из формулы (2)

$$(x-1)\,\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + (1-2x)\,\frac{\partial G}{\partial t} + xG + \frac{\partial H}{\partial t} - H = 0. \tag{5}$$

Зафиксируем точку x. Тогда получим систему уже обыкновенных дифференциальных уравнений (4) и (5), эволюционирующих строго в точке x.

Продифференцируем теперь (5) по x:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + (x-1)\,\frac{\partial^3 G}{\partial t^2 \partial x} - 2\frac{\partial G}{\partial t} + (1-2x)\,\frac{\partial^2 G}{\partial t \partial x} + G + x\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} = 0. \tag{6}$$

После подстановки в (6) производных $\partial G/\partial x$ и $\partial H/\partial x$ из формул (1) и (2) находим

$$(x-1)\,\frac{\partial^3 H}{\partial t^3} + (2-3x)\,\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - 4\frac{\partial G}{\partial t} + (3x-1)\,\frac{\partial H}{\partial t} + 2G - xH = 0. \tag{7}$$

Выразим производные $\partial H/\partial t$, $\partial^2 H/\partial t^2$, $\partial^3 H/\partial t^3$, $\partial^2 G/\partial t^2$ из формул (4) и (5). Имеем,

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{x}{(x-1)}H, \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \frac{x^2}{(x-1)^2}H, \tag{9}$$

$$\frac{\partial^3 H}{\partial t^3} = \frac{x^3}{(x-1)^3}H, \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = \frac{(2x-1)}{(x-1)}\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{x}{(x-1)}G - \frac{1}{(x-1)^2}H. \tag{11}$$

Подставим (8)–(11) в (7). Следовательно,

$$\frac{\partial G}{\partial t} - G - \frac{1}{(x-1)} H = 0. \tag{12}$$

Зафиксируем опять точку x. Мы имеем уже переопределенную систему обыкновенных дифференциальных уравнений (4), (5) и (12), эволюционирующих строго в точке x. Найдем ее решение. Продифференцируем (12) по t и подставим (8)–(11). Тогда получим

$$\frac{\partial G}{\partial t} - G + \frac{(x+1)}{(x-1)\,x} H = 0. \tag{13}$$

Проделаем аналогичную процедуру с (13). Имеем

$$\frac{\partial G}{\partial t} - G + \frac{1}{(x-1)} H = 0. \tag{14}$$

Таким образом, мы нашли линейную систему из трех уравнений (12)–(14) от трех неизвестных $\partial G/\partial t$, G и H, которая имеет очевидное решение $H = 0$ и $G = Const\,\exp(t)$ ($\partial G/\partial t - G = 0$). Следовательно, после подстановки в (1)–(3) находим, что кроме нулевого решения, переопределенная система уравнений (1)–(3) также имеет экспоненциальное решение. Других решений система (1) – (3) не имеет. При делении на множитель $(x-1)$ в уравнении (8), строго говоря, появляется особая точка $x = 1$. Поэтому наше решение относится к областям $(x < 1)$ и $(x > 1)$.

Рассмотрим теперь систему из pдифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно неизвестных S_ν, $v = 1\dots p$, переопределенную одним независимым уравнением (на каком-нибудь решении, например):

$$H_k\left(S_v, \frac{\partial S_v}{\partial \mathbf{r}}, \frac{\partial S_v}{\partial t}\dots\right) = 0, \quad v = 1\dots p, \quad k = 1\dots p, \tag{15}$$

$$G\left(S_v, \frac{\partial S_v}{\partial \mathbf{r}}, \frac{\partial S_v}{\partial t}\dots\right) = 0. \tag{16}$$

Перейдем в точке M в систему координат $(\tau_1, \tau_2, \mathbf{n})$ на некоторой неподвижной поверхности (см. рис. 1). Тогда уравнения (15), (16) запишутся в виде

$$H_k\left(S_v, \frac{\partial S_v}{\partial \tau_1}, \frac{\partial S_v}{\partial \tau_2}, \frac{\partial S_v}{\partial n}, \frac{\partial S_v}{\partial t}\dots\right) = 0, \quad v = 1\dots p, \quad k = 1\dots p, \tag{17}$$

$$G\left(S_v, \frac{\partial S_v}{\partial \tau_1}, \frac{\partial S_v}{\partial \tau_2}, \frac{\partial S_v}{\partial n}, \frac{\partial S_v}{\partial t}\dots\right) = 0. \tag{18}$$

Выразим из уравнений (17) нормальные производные $\partial S_k/\partial n$ в явном виде

$$\frac{\partial S_k}{\partial n} = F_k\left(S_v, \frac{\partial S_v}{\partial \tau_1}, \frac{\partial S_v}{\partial \tau_2}, \frac{\partial S_v}{\partial t}\dots\right), \quad v = 1\dots p, \quad k = 1\dots p. \tag{19}$$

Подставим их выражения (19) в формулу (18). Тогда

$$G^{(1)}\left(S_v, \frac{\partial S_v}{\partial \tau_1}, \frac{\partial S_v}{\partial \tau_2}, \frac{\partial S_v}{\partial t}\dots\right) = 0. \tag{20}$$

Продифференцируем уравнение (20) в направлении $\mathbf{n}$ и подставим вместо $\partial S_k/\partial n$ их выражения из (19). Тогда находим, что

$$G^{(2)}\left(S_v, \frac{\partial^2 S_v}{\partial \tau_1 \partial t}, \frac{\partial^2 S_v}{\partial \tau_2 \partial t}, \frac{\partial^2 S_v}{\partial t^2}\dots\right) = 0. \tag{21}$$

Проделаем аналогичную процедуру p раз. Получим p уравнений на поверхности вида

$$\begin{gathered} G^{(1)}\left(S_v, \frac{\partial S_v}{\partial \tau_1}, \frac{\partial S_v}{\partial \tau_2}, \frac{\partial S_v}{\partial t}\dots\right) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ G^{(p)}\left(S_v, \frac{\partial^p S_v}{\partial \tau_1 \partial t^{p-1}}, \frac{\partial^p S_v}{\partial \tau_2 \partial t^{p-1}}, \frac{\partial^p S_v}{\partial t^p}\dots\right) = 0. \end{gathered} \tag{22}$$

Мы нашли замкнутую систему из p поверхностных дифференциальных уравнений (22) строго вдоль границы рассматриваемой поверхности (см. рис. 1) и такого же количества переменных S_k, $k = 1\dots p$, эволюционирующих во времени. Таким образом, доказано следующее утверждение.

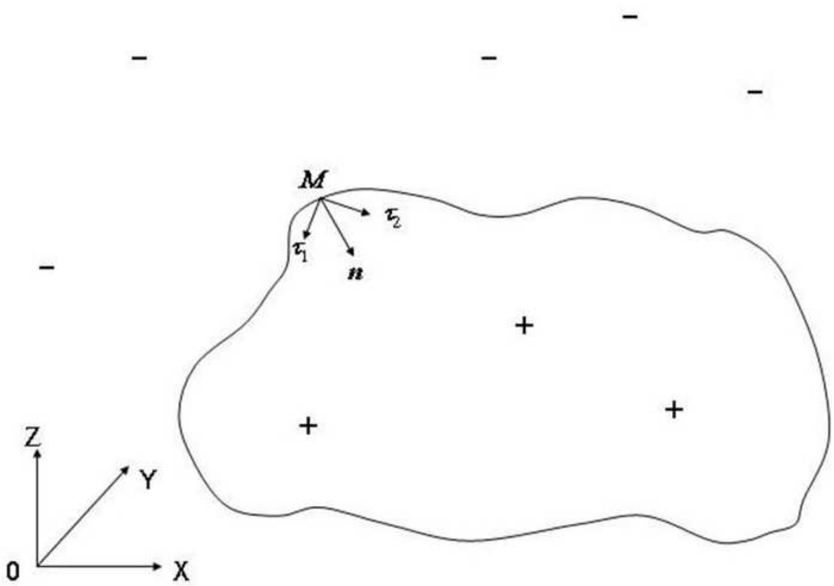

Рис. 1. *Стационарная поверхность*

Утверждение 1. *Любую систему из p дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка (15), описывающих эволюционирующие во времени их решения* $S_k(\mathbf{r}, t)$, $k = 1\dots p$, *в евклидовом пространстве и переопределенную любым дифференциальным уравнением (16) первого порядка, можно преобразовать к системе из p дифференциальных уравнений и такого же числа неизвестных* $S_k(\mathbf{r}, t)$, $k = 1\dots p$, *на любой неподвижной поверхности, если в системе координат* $(\tau_1, \tau_2, \mathbf{n})$ *для любой точки на этой поверхности все нормальные производные* $\partial S_k/\partial n$ *из системы (15) явно выражаются, как функции от переменных, задаваемых исключительно на рассматриваемой поверхности (19).*

Формально ничего не мешает подобной процедурой получать больше, чем p уравнений на поверхности (22), т.е. найти переопределенную систему уравнений уже на ней. Следовательно, сократить размерность на поверхности и т.д. вплоть до аналитического решения. Однако это не означает, что подобной процедурой можно найти аналитическое решение любой переопределенной системы уравнений. Например, следующая переопределенная система уравнений имеет общее решение $\alpha = \exp(x - t)$

Пример 2.

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0, \tag{23}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \alpha = 0. \tag{24}$$

Однако дальше сокращения размерности на единицу продвинуться нельзя.

Теоретически возможен следующий случай. Рассмотрим систему из p дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, не переопределенную никаким уравнением (15). Зафиксируем какую-нибудь неизвестную функцию S_p как параметр-функцию, а остальные неизвестные функции будем искать. Тогда формально система уравнений (15) относительно оставшихся неизвестных будет переопределена, и мы можем предлагаемым методом понижать ее размерность вплоть до аналитического решения. Мы найдем, что оставшиеся неизвестные (и их производные) будут функциями от S_p и ее производных, а для самой параметр-функции S_p будет отдельное уравнение (или несколько уравнений) в частных производных. Если по каким-то соображениям эту функцию S_p можно определить независимо, то остальные неизвестные (и/или их производные) сразу будут выписаны через нее.

Введем обозначения

$$A_v = \frac{\partial S_v}{\partial t}, \quad v = 1 \ldots p. \tag{25}$$

Представим с учетом (25) выражения (19), (20) в виде

$$\frac{\partial S_k}{\partial n} = F_k\left(A_v \ldots\right), \quad v = 1 \ldots p, \quad k = 1 \ldots p, \tag{26}$$

$$G^{(1)}\left(A_v \ldots\right) = 0. \tag{27}$$

Продифференцируем уравнение (27) в направлении $\mathbf{n}$ и в полученном разложении обозначим слагаемые содержащие наибольшие производные по времени t

$$\sum_{v_1=1}^{p} \frac{\partial G^{(1)}}{\partial A_{v_1}} \frac{\partial^2 S_{v_1}}{\partial n \partial t} + \ldots = 0 \tag{28}$$

или, учитывая (26)

$$\sum_{v_1, v_2=1}^{p} \frac{\partial G^{(1)}}{\partial A_{v_1}} \frac{\partial F_{v_1}}{\partial A_{v_2}} \frac{\partial^2 S_{v_2}}{\partial t^2} + \ldots = G^{(2)}\left(\ldots\right) = 0. \tag{29}$$

Проделаем аналогичную процедуру p раз. Тогда систему уравнений (22), где выделены слагаемые содержащие наибольшие производные по времени t, можно записать в виде

$$\sum_{v_1, \ldots v_l=1}^{p} \frac{\partial G^{(1)}}{\partial A_{v_1}} \frac{\partial F_{v_1}}{\partial A_{v_2}} \cdots \frac{\partial F_{v_{l-1}}}{\partial A_{v_l}} \frac{\partial^l S_{v_l}}{\partial t^l} + \ldots = G^{(l)}\left(\ldots\right) = 0, \quad l = 1 \ldots p. \tag{30}$$

Продифференцируем каждое l-ое уравнение из системы уравнений (30) по времени t $(p-l)$ раз. Тогда получим следующую систему

$$\sum_{v_1, \ldots v_l=1}^{p} \frac{\partial G^{(1)}}{\partial A_{v_1}} \frac{\partial F_{v_1}}{\partial A_{v_2}} \cdots \frac{\partial F_{v_{l-1}}}{\partial A_{v_l}} \frac{\partial^p S_{v_l}}{\partial t^p} + \ldots = 0, \quad l = 1 \ldots p. \tag{31}$$

Система поверхностных уравнений (31) линейна относительно старших производных по времени $\partial^p S_v / \partial t^p$, $v = 1 \ldots p$. Условие того, что эти производные могут быть явно выражены из (31), выглядит следующим образом

$$\left|a_{j\,i}\right| \neq 0, \tag{32}$$

где

$$a_{j\,i} = \sum_{v_1, \ldots v_{j-1}=1}^{p} \frac{\partial G^{(1)}}{\partial A_{v_1}} \frac{\partial F_{v_1}}{\partial A_{v_2}} \cdots \frac{\partial F_{v_{j-1}}}{\partial A_i}, \quad j > 1, \tag{33}$$

$$a_{1\,i} = \frac{\partial G^{(1)}}{\partial A_i}, \quad j = 1. \tag{34}$$

В этом случае (31) можно представить в виде

$$\frac{\partial^p S_k}{\partial t^p} = Q_k \left(\frac{\partial^{p-1} S_v}{\partial t^{p-1}}, \frac{\partial^{p-1} S_v}{\partial \tau_1 \partial t^{p-2}} \dots \right), \quad v = 1 \dots p, \quad k = 1 \dots p. \tag{35}$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 2. *Если для системы из p дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка (15), описывающих эволюционирующие во времени их решения* $S_k(\mathbf{r}, t), k = 1 \dots p$, *в евклидовом пространстве и переопределенной некоторым дифференциальным уравнением (16) первого порядка, на некоторой неподвижной поверхности выполняется условие (32), то ее можно преобразовать к системе из p дифференциальных уравнений и такого же числа неизвестных* $S_k(\mathbf{r}, t), k = 1 \dots p$, *на рассматриваемой поверхности, причем старшие производные по времени от* $S_k(\mathbf{r}, t)$ *будут явно выражены через все остальные неизвестные.*

К системе поверхностных уравнений (35) уже можно поставить соответствующую задачу Коши. Согласно общей теореме Коши-Ковалевской такая задача в случае аналитичности всех рассматриваемых функций имеет единственное локальное решение [15], [16]. Мы видим, что в случае, если выполняется условие (32), краевые условия задавать не нужно на бесконечной незамкнутой поверхности. Заметим также, что если система уравнений (15), (16) линейна относительна неизвестных функций и их производных, то редуцированные системы уравнений, получающиеся из нее, также линейны относительно своих неизвестных.

Из формул (19) и (35) видно, что если мы знаем в некоторый момент времени на поверхности величины $\partial^j S_v / \partial t^j$, $j = 0 \dots p-1$, $v = 1 \dots p$, то мы знаем все нормальные производные $\partial^j S_v / \partial n^j$, $v = 1 \dots p$, $j = 0 \dots \infty$, в любой точке на рассматриваемой поверхности. Следовательно, составив ряд Тейлора, можно найти распределение величин $S_v(\mathbf{r}, t)$, $v = 1 \dots p$, не только на нашей поверхности, но и во внешнем объёме по крайней мере вблизи рассматриваемой поверхности.

Для нашего примера (1)–(3) (пример 1) соответствующий определитель имеет вид

$$|a_{j\,i}| = \begin{vmatrix} 0 & (1-x) \\ (x-1) & 0 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{36}$$

Чтобы учесть подвижную поверхность, движущуюся со скоростью $-V\mathbf{n}$, где $V = F_t / |\nabla F|$ и $\mathbf{n} = \nabla F / |\nabla F|$ - единичная нормаль к этой поверхности $F(x_1, \dots x_m, t) = 0$, (см. рис. 2), достаточно использовать следующее очевидное соотношение на этой поверхности:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^{j-1} S_v}{\partial t^{j-1}} \right) = \frac{\partial^j S_v}{\partial t^j} - V \frac{\partial^j S_v}{\partial t^{j-1} \partial n}, \quad j = 1 \dots p, \quad v = 1 \dots p. \tag{37}$$

Вместо системы уравнений (22) будет система из уравнений $p^2 + p$ (19), (22) и (37) и $p^2 + p$ неизвестных $\partial^j S_v / \partial t^j$, $j = 0 \dots p$, $v = 1 \dots p$. Следовательно, верно следующее утверждение.

Утверждение 3. *Любую систему из p дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка (15), описывающих эволюционирующие во времени решения в евклидовом пространстве* $S_k(\mathbf{r}, t), k = 1 \dots p$, *и переопределенную любым дифференциальным уравнением (16) первого порядка, можно преобразовать к системе из* $p^2 + p$ *дифференциальных уравнений и* $p^2 + p$*неизвестных* $\partial^j S_v / \partial t^j, j = 0 \dots p, v = 1 \dots p$, *на любой движущейся поверхности* $F(x_1, \dots x_m, t) = 0$, *если в системе координат* $(\tau_1, \tau_2, \mathbf{n})$ *для любой точкина этой поверхности все нормальные производные* $\partial S_k / \partial n$ *из системы (15) явно выражаются, как функции от переменных, задаваемых исключительно на рассматриваемой поверхности*

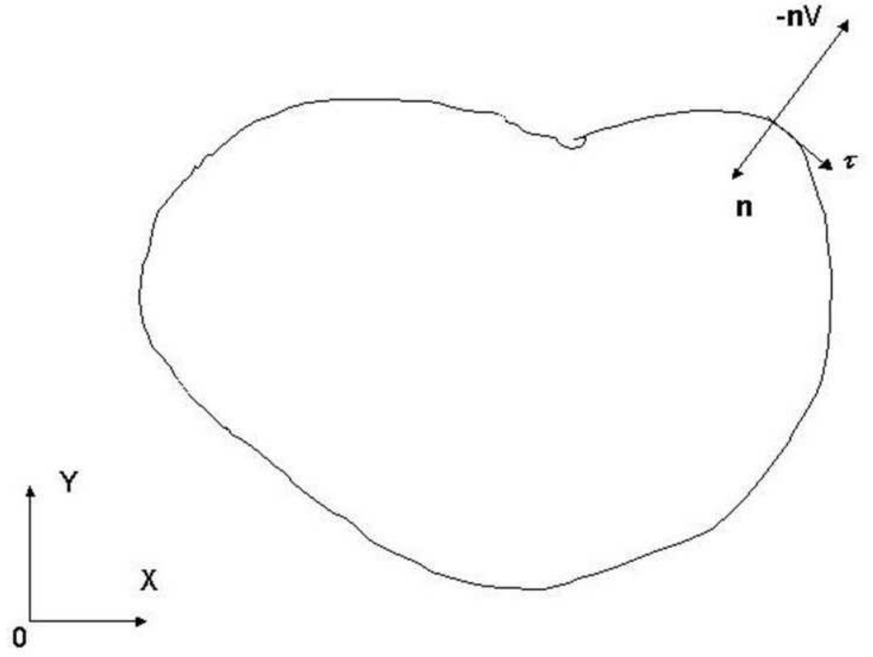

Рис. 2. *Движущаяся поверхность* $F(x_1, \ldots, x_m, t) = 0$

(19). Если, кроме того, на этой поверхности выполняется условие (32), то производные по времени $d/dt\left(\partial^j S_v/\partial t^j\right), j = 0 \ldots p, v = 1 \ldots p$, *будут явно выражены через все остальные неизвестные.*

Приведем теперь простой гидродинамический пример, когда изложенный метод работает. Рассмотрим уравнение Лапласа, описывающее потенциальный поток несжимаемой жидкости в двумерном случае [8]

Пример 3.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \tag{38}$$

Это уравнение, очевидно, имеет частное решение $\varphi = Ax + Ay$, где $A = const$, которое удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2A. \tag{39}$$

Перепишем уравнение (38) в виде

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \tag{40}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \psi. \tag{41}$$

Тогда уравнение (39) запишется в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \psi = 2A. \tag{42}$$

Продифференцируем выражение (42) по y и подставим вместо частных производных по y их выражения из (40) и (41)

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0. \tag{43}$$

В результате мы имеем систему пониженной размерности из двух уравнений и двух неизвестных (42), (43), где встречаются только производные по x. Таким образом, на частном решении $\varphi = Ax + Ay$, а также на любом другом частном решении, удовлетворяющим (39), мы показали, что размерность снижается.

Приведем также пример, когда изложенный метод не работает. Рассмотрим стационарный потенциальный несжимаемый поток $\omega = 0$. Тогда система уравнений Эйлера в двумерном случае упрощается до [8-10]

Пример 4.

$$u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \tag{44}$$

$$u_x\frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \tag{45}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0, \tag{46}$$

$$\omega = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0. \tag{47}$$

Перейдем в систему координат $(\tau, \mathbf{n})$ на некоторой линии (см. рис. 2).

$$u_n\frac{\partial u_n}{\partial n} + u_\tau\frac{\partial u_n}{\partial \tau} + \frac{\partial P}{\partial n} = 0, \tag{48}$$

$$u_n\frac{\partial u_\tau}{\partial n} + u_\tau\frac{\partial u_\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial P}{\partial \tau} = 0, \tag{49}$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial n} + \frac{\partial u_\tau}{\partial \tau} = 0, \tag{50}$$

$$\omega = \frac{\partial u_\tau}{\partial n} - \frac{\partial u_n}{\partial \tau} = 0. \tag{51}$$

Пусть (51) будет уравнением связи для (48) – (50). Выразим из (48) – (50) нормальные производные и подставим их в (51)

$$\frac{\partial P}{\partial n} = u_n\frac{\partial u_\tau}{\partial \tau} - u_\tau\frac{\partial u_n}{\partial \tau}, \tag{52}$$

$$\frac{\partial u_\tau}{\partial n} = -\frac{u_\tau}{u_n}\frac{\partial u_\tau}{\partial \tau} - \frac{1}{u_n}\frac{\partial P}{\partial \tau}, \tag{53}$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial n} = -\frac{\partial u_\tau}{\partial \tau}, \tag{54}$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial \tau} + \frac{u_\tau}{u_n}\frac{\partial u_\tau}{\partial \tau} + \frac{1}{u_n}\frac{\partial P}{\partial \tau} = 0. \tag{55}$$

Обозначим

$$A_1 = \frac{\partial P}{\partial \tau}, \quad A_2 = \frac{\partial u_\tau}{\partial \tau}, \quad A_3 = \frac{\partial u_n}{\partial \tau}. \tag{56}$$

Представим (52) – (55) в виде (26), (27)

$$\frac{\partial P}{\partial n} = f_1\left(A_1, A_2, A_3 \ldots\right) = u_n A_2 - u_\tau A_3, \tag{57}$$

$$\frac{\partial u_\tau}{\partial n} = f_2\left(A_1, A_2, A_3 \ldots\right) = -\frac{u_\tau}{u_n}A_2 - \frac{1}{u_n}A_1, \tag{58}$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial n} = f_3\left(A_1, A_2, A_3 \ldots\right) = -A_2, \tag{59}$$

$$G^{(1)}\left(A_1, A_2, A_3 \ldots\right) = A_3 + \frac{u_\tau}{u_n} A_2 + \frac{1}{u_n} A_1 = 0. \tag{60}$$

Следовательно,

$$a_j^0 = a_{1\,j} = \left(\frac{\partial G^{(1)}}{\partial A_1}, \frac{\partial G^{(1)}}{\partial A_2}, \frac{\partial G^{(1)}}{\partial A_3}\right) = \left(\frac{1}{u_n}, \frac{u_\tau}{u_n}, 1\right), \tag{61}$$

$$\left(F_{i,j}\right) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial A_j}\right) = \left(\begin{array}{lll} 0 & u_n & -u_\tau \\ -\frac{1}{u_n} & -\frac{u_\tau}{u_n}1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right). \tag{62}$$

По формуле (140) находим

$$\left(a_{i,j}\right) = \left(\begin{array}{lll} \frac{1}{u_n} & \frac{u_\tau}{u_n} & 1 \\ \left(-\frac{u_\tau}{u_n}\right)\frac{1}{u_n} & \left(-\frac{u_\tau}{u_n}\right)\frac{u_\tau}{u_n} & \left(-\frac{u_\tau}{u_n}\right) \\ \left(\frac{u_\tau}{u_n}\right)^2\frac{1}{u_n} & \left(\frac{u_\tau}{u_n}\right)^2\frac{u_\tau}{u_n} & \left(\frac{u_\tau}{u_n}\right)^2 \end{array}\right). \tag{63}$$

Определитель матрицы (63) очевидно тождественно равен нулю. Это означает, что в системе пониженной размерности старшие производные по τ не будут явно выражены относительно остальных. Кроме того, прямыми выкладками можно показать, что получающаяся система пониженной размерности не совместна.

3. ПРИМЕРЫ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ

В статьях [14], [17], [18] были получены следующие переопределенные системы уравнений гидродинамики. Здесь мы их приводим без доказательства.

3.1 Уравнения Навье-Стокса I

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{u} \times \omega + \nabla\left(P + \frac{1}{2}\mathbf{u}^2\right) = -\nu \nabla \times \omega, \tag{64}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} + \alpha) \cdot \nabla \rho + \rho \cdot \operatorname{div}(\mathbf{u} + \alpha) = 0, \tag{65}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = [\alpha \times \omega + \mathbf{u} \times (\nabla \times \alpha) + \alpha \times (\nabla \times \alpha)] + \nu \nabla \times \omega, \tag{66}$$

$$\omega_x + [\nabla \times \alpha]_x - \left|\begin{array}{lll} \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial z} & \omega_0\left(\mathbf{r}_0\right) \end{array}\right| = 0, \tag{67}$$

$$\omega_y + [\nabla \times \alpha]_y - \left|\begin{array}{lll} \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial z} & \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial x} & \omega_0\left(\mathbf{r}_0\right) \end{array}\right| = 0, \tag{68}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(x_0, y_0, z_0)}{\partial(x, y, z)} = 1, \tag{69}$$

$$\frac{\partial x_0}{\partial t} + (\mathbf{u} + \alpha) \cdot \nabla x_0 = 0. \tag{70}$$

Мы получили переопределенную систему из 15-ти дифференциальных уравнений (64) – (70) “Навье-Стокса” и 14-ти неизвестных α, $\mathbf{u}$, ω, P, ρ и $\mathbf{r}_0$ [14]. Здесь $\omega_0 = \nabla \times \mathbf{u}_0$ — начальное распределение завихренности ω, $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ - псевдолагранжевые переменные, α - поправка к вектору скорости $\mathbf{u}$, ρ — псевдоплотность.

Сделаем невырожденную замену переменных $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'(\mathbf{r}, t)$, $t' = t'(\mathbf{r}, t)$, так чтобы уравнения (64) – (70) в пространстве указанным способом можно свести к системе уравнений на плоскости $\{z' = c'\}$, и даже получить переопределенную систему поверхностных уравнений на ней. Следовательно, ее можно будет свести к переопределенной системе уравнений на прямой $\{z' = c',\ y' = b'\}$, потом в точке $\{z' = c',\ y' = b',\ x' = a'\}$ и, наконец, к переопределенной системе ОДУ (порядка нескольких миллионов уравнений), решение которой даст аналитическое решение в точке $\{a',\ b',\ c',\ t'\} = \{a,\ b,\ c,\ t\}$.

3.2 Переопределение полной системы гидродинамических уравнений I

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \tag{71}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{u} \times \omega = -\nabla \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2}\right) - \frac{\nabla P}{\rho} + \frac{\nabla \sigma}{\rho} + \frac{\mathbf{F}}{\rho}, \tag{72}$$

$$\omega = \nabla \times \mathbf{u}, \tag{73}$$

$$\psi = \operatorname{div}\mathbf{u}, \tag{74}$$

$$\rho T \left[\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla) s\right] = Q - \operatorname{div}\mathbf{q} + \Phi, \tag{75}$$

$$T = T(\rho, s), \tag{76}$$

$$P = P(\rho, s), \tag{77}$$

где

$$\nabla \sigma = \mu \left(\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{3}\nabla(\nabla \mathbf{u})\right) = \mu \left(-\nabla \times \omega + \frac{4}{3}\nabla \psi\right), \tag{78}$$

$$\Phi = \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)^2 - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right)^2. \tag{79}$$

$$\frac{\partial \rho^\bullet}{\partial t} + (\mathbf{u} + \alpha) \cdot \nabla \rho^\bullet + \rho^\bullet \operatorname{div}(\mathbf{u} + \alpha) = 0, \tag{80}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = [\alpha \times \omega + \mathbf{u} \times (\nabla \times \alpha) + \alpha \times (\nabla \times \alpha)] - T\nabla s - \frac{\nabla \sigma}{\rho} - \frac{\mathbf{F}}{\rho}, \tag{81}$$

$$\omega_x + [\nabla \times \alpha]_x - \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial z} & \omega_0(\mathbf{r}_0) \end{vmatrix} = 0, \tag{82}$$

$$\omega_y + [\nabla \times \alpha]_y - \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial z} & \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial x} & \omega_0(\mathbf{r}_0) \end{vmatrix} = 0, \tag{83}$$

$$\frac{1}{\rho^\bullet}\frac{\partial(x_0, y_0, z_0)}{\partial(x, y, z)} = \frac{1}{\rho_0(\mathbf{r}_0)}, \tag{84}$$

$$\frac{\partial x_0}{\partial t} + (\mathbf{u} + \alpha) \cdot \nabla x_0 = 0, \tag{85}$$

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T, \tag{86}$$

где ρ, $\mathbf{u}$, P, T, w и s — плотность, скорость, давление, температура, удельная тепловая функция и энтропия (на единицу массы) рассматриваемой среды, соответственно. Здесь $\mathbf{F}$ и Q — объемные сила и тепловыделение, $\mathbf{q} = -\lambda \nabla T$ — тепловой поток (λ — теплопроводность), σ — тензор вязких напряжений.

Мы имеем переопределенную систему из 22 дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка (71) – (77), (80) – (86) от 21-го неизвестного ρ, ρ^*, $\mathbf{u}$, ω, α, P, T,

s, ψ, $\mathbf{r_0}$, $\mathbf{q}$ [14]. Здесь $\omega_0 = \nabla \times \mathbf{u}_0$, $\rho_0 = \rho_0(\mathbf{r})$ — начальные распределения величин завихренности ω и плотности ρ, $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ — псевдолагранжевые переменные, α - поправка к вектору скорости $\mathbf{u}$, ρ^* - псевдоплотность.

С помощью данной системы (71) – (77), (80) – (86) можно свести полную систему гидродинамических уравнений, описывающих нестационарное обтекание твердого тела, по объему в трехмерном потоке к системе уравнений на поверхности. Предполагается дополнительная гладкость решений. Эти уравнения могут значительно упростить численное моделирование и исследовать глубже особенности процесса обтекания. Во-первых, они уменьшают размерность задачи на единицу. Отпадает необходимость решать уравнения гидродинамики в пограничном слое. Во-вторых, помимо скорости газа на поверхности они сразу позволяют определить, как меняются на границе все остальные параметры, характеризующие течение (такие, как $\mathbf{u}$, P, ω и т.д.).

Следует отметить, что не все поверхностные уравнения из полученных переопределенных систем уравнений в объеме будут явные относительно времени, даже если мы сделаем замену переменных. Поэтому, чтобы определить возникающее распределение напряжений, помимо начальных данных требуется также рассматривать и краевые условия. Через них происходит поступление информации о внешнем потоке, несомненно, влияющей на эволюцию всего воздействия потока на тело. Возможно, их придется определять численно с помощью дополнительного кода по пространству, точность которого важна, однако не во всем объеме, а только вблизи кривых на поверхности обтекаемого тела, вдоль которых определяются краевые условия.

3.3 Вязкая несжимаемая жидкость в двухмерном потоке

Уравнения Навье-Стокса в двумерной несжимаемой жидкости преобразовываются к виду

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} + Au_x + B = 0, \tag{87}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + Cu_x + D = 0, \tag{88}$$

где

$$u_x = \frac{\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial D}{\partial y} + CB - AD}{\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial x}}, \tag{89}$$

$$A = \frac{\beta\frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x}}{1+\beta^2}, \quad B = \frac{\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \beta\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \omega}{1+\beta^2}, \quad C = \frac{\beta\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y}}{1+\beta^2}, \quad D = \frac{\beta\frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \beta\omega}{1+\beta^2},$$

$$\alpha = \frac{\frac{\partial \omega}{\partial t} - \nu\Delta\omega}{\frac{\partial \omega}{\partial y}} \text{ и } \beta = \frac{\frac{\partial \omega}{\partial x}}{\frac{\partial \omega}{\partial y}}.$$

Мы имеем переопределенную систему из 2-х дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка (87), (88) от 1-го неизвестного $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$ [17].

4. ВЫВОД НОВЫХ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Предложим новые схемы вывода переопределения в гидродинамических уравнениях.

4.1 Уравнения Навье-Стокса II

Рассмотрим уравнения Навье–Стокса в трехмерном потоке в виде:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\,\omega - (\omega\nabla)\,\mathbf{u} = \nu\Delta\omega, \tag{90}$$

Эти уравнения можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + ((\mathbf{u}+\alpha)\,\nabla)\,\omega = 0, \tag{91}$$

где вектор α определяется из системы линейных относительно него уравнений

$$(\alpha\nabla)\,\omega = -\,(\omega\nabla)\,\mathbf{u} - \nu\Delta\omega. \tag{92}$$

Рассмотрим замену переменных

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{u}\,(\mathbf{r},t) + \alpha\,(\mathbf{r},t),$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}\ \ (\mathbf{r}_0,t)\ \text{ и } \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0\,(\mathbf{r},t)\,,\quad \mathbf{r}_0|_{t=0} = \mathbf{r}. \tag{93}$$

В этих переменных выражение (91) запишется в виде

$$\frac{d\omega}{dt} = 0 \tag{94}$$

или

$$\omega = \omega_0\,(\mathbf{r}_0)\,, \tag{95}$$

где $\omega_0\,(\mathbf{r}_0)$ начальное распределение завихренности ω. Замена переменных (93) означает, что

$$\frac{\partial\mathbf{r}_0}{\partial t} + (\mathbf{u}+\alpha)\cdot\nabla\mathbf{r}_0 = 0. \tag{96}$$

Мы видим, что (99) есть следствие (92) – (94) и (96). Следовательно, можно составить следующую переопределенную одним независимым уравнением систему из 10 уравнений в частных производных: (99), (96), (93), (94) и 9 неизвестных $\mathbf{u}$, ω, $\mathbf{r}_0$. Данная система уравнений с интегралами (99) полезна для упрощения задачи обтекания в трехмерном потоке (сокращения на единицу ее размерности), поскольку она проще (64) – (70).

Если будет строго доказано (например, с помощью теоремы Коши-Ковалевской), что получаемая указанным выше методом поверхностная система уравнений корректна и совместна, то ничего не остается внешнему потоку, как учитываться: а) через начальные условия, б) через краевые условия, в) через саму структуру переопределения исходной системы дифференциальных уравнений по объему, т.е. через сам метод, которым было получено дополнительное независимое соотношение. Например, приводимые здесь уравнения Навье-Стокса несжимаемой жидкости переопределяются уравнениями, в которых присутствует начальное распределение завихренности во всем объеме, как составная часть. Тем самым учитываются начальные данные у потока во всем объеме. Других логичных способов учета внешнего потока нет.

4.2 Переопределение полной системы гидродинамических уравнений II

Рассмотрим уравнения гидродинамики (71)–(79) в виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \tag{97}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} - [\mathbf{u} \times \omega]_x = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathbf{u}^2}{2}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\nabla_x \sigma}{\rho} + \frac{F_x}{\rho}, \tag{98}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\,\omega - (\omega\nabla)\,\mathbf{u} = \nabla \times \left(-\frac{\nabla P}{\rho} + \frac{\nabla \sigma}{\rho} + \frac{\mathbf{F}}{\rho}\right), \tag{99}$$

$$\omega = \nabla \times \mathbf{u}, \tag{100}$$

$$\psi = \operatorname{div}\mathbf{u}, \tag{101}$$

$$\rho T\left[\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\,s\right] = Q - \operatorname{div}\mathbf{q} + \Phi, \tag{102}$$

$$T = T(\rho, s), \quad P = P(\rho, s), \quad \mathbf{q} = -\kappa \nabla T, \tag{103}$$

где

$$\nabla \sigma = \mu\left(\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{3}\nabla(\nabla \mathbf{u})\right) = \mu\left(-\nabla \times \omega + \frac{4}{3}\nabla \psi\right), \tag{104}$$

$$\Phi = \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)^2 - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right)^2. \tag{105}$$

Уравнения (99) можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + ((\mathbf{u} + \alpha)\,\nabla)\,\omega = 0, \tag{106}$$

где вектор α определяется из системы линейных относительно него уравнений

$$(\alpha \nabla)\,\omega = -(\omega \nabla)\,\mathbf{u} - \nabla \times \left(-\frac{\nabla P}{\rho} + \frac{\nabla \sigma}{\rho} + \frac{\mathbf{F}}{\rho}\right). \tag{107}$$

Рассмотрим замену переменных

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) + \alpha(\mathbf{r}, t),$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}\,(\mathbf{r}_0, t) \text{ и } \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0\,(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r}_0|_{t=0} = \mathbf{r}. \tag{108}$$

В этих переменных выражение (106) запишется в виде

$$\frac{d\omega}{dt} = 0 \tag{109}$$

или

$$\omega = \omega_0(\mathbf{r}_0), \tag{110}$$

где $\omega_0(\mathbf{r}_0)$ начальное распределение завихренности ω. Замена переменных (108) означает, что

$$\frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial t} + (\mathbf{u} + \alpha) \cdot \nabla \mathbf{r}_0 = 0. \tag{111}$$

Следовательно, мы имеем переопределенную систему из 18-ти дифференциальных уравнений в частных производных (97), (98), (100) – (103), (114), (111) от 17-ти неизвестных ρ, $\mathbf{u}$, ω, P, T, s, ψ, $\mathbf{r_0}$, $\mathbf{q}$ [2].

В связи с этим интерес представляет следующая задача. Так преобразовать координаты и неизвестные в системе (97), (98), (100) – (103), (114), (111), чтобы выполнялось условие (32). Тогда не нужно будет задавать краевые условия к соответствующей системе уравнений с пониженной на единицу размерностью для незамкнутой поверхности.

Пусть в нестационарном бесконечном потоке движется поверхность. С помощью метода переопределения, в силу его общности, мы можем вообще преобразовать нестационарные уравнения гидродинамики к пониженной размерности системе большого числа "стационарных" уравнений, где производные по времени будут отсутствовать. Тогда внешний поток будет определяться *краевыми и граничными* условиями только на этой поверхности в любой момент времени для этих "стационарных" уравнений. С помощью выбранного метода переопределения (в частности, дополнительных величин и их частных производных) в любой момент времени, зная информацию на рассматриваемой поверхности, можно, решив эту систему уравнений, определить весь внешний поток. Поверхность, движущаяся согласно уравнениям, получающимся из метода переопределения, через этот механизм может учитывать внешний поток сама в себе, т.е. через величины, определенные на этой поверхности.

4.3 Сжимаемая неравномерно нагретая жидкость в двумерном потоке

Рассмотрим уравнения гидродинамики в двумерном случае в виде:

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = 0, \tag{112}$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} = 0, \tag{113}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_x\frac{\partial \rho}{\partial x} + u_y\frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right) = 0, \tag{114}$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u_x\frac{\partial s}{\partial x} + u_y\frac{\partial s}{\partial y} = 0, \quad s = s\left(\rho, P\right). \tag{115}$$

Преобразуем (112), (113) к виду

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = 0, \tag{116}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u_x\frac{\partial \omega}{\partial x} + u_y\frac{\partial \omega}{\partial y} + \omega\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right) + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0, \tag{117}$$

$$\omega = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}. \tag{118}$$

Из (114) и (117) следует, что

$$\frac{\partial \omega}{\omega\partial t} - \frac{\partial \rho}{\rho\partial t} + u_x\left(\frac{\partial \omega}{\omega\partial x} - \frac{\partial \rho}{\rho\partial x}\right) + u_y\left(\frac{\partial \omega}{\omega\partial y} - \frac{\partial \rho}{\rho\partial y}\right) + \frac{1}{\omega\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0. \tag{119}$$

Из (119) следует,

$$u_y = -\beta u_x - \alpha, \tag{120}$$

где

$$\alpha = \frac{\frac{\partial \omega}{\omega\partial t} - \frac{\partial \rho}{\rho\partial t} + \frac{1}{\omega\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \omega}{\omega\partial y} - \frac{\partial \rho}{\rho\partial y}\right)}, \quad \beta = \frac{\left(\frac{\partial \omega}{\omega\partial x} - \frac{\partial \rho}{\rho\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial \omega}{\omega\partial y} - \frac{\partial \rho}{\rho\partial y}\right)}. \tag{121}$$

После подстановки (120) в (118) и (114) получим

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} + \beta \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_x \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \omega = 0, \tag{122}$$

$$-\beta \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_x}{\partial x} - u_x \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \beta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) - \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \alpha = 0. \tag{123}$$

Выражая $\partial u_x / \partial x$, $\partial u_x / \partial y$ из уравнений (122) и (123), находим

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} + A u_x + B = 0, \tag{124}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + C u_x + D = 0, \tag{125}$$

где

$$A = \frac{\beta \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \beta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \frac{\partial \beta}{\partial x}}{1 + \beta^2}, \quad B = \frac{\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \beta \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \omega - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \beta + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \alpha \beta}{1 + \beta^2},$$

$$C = \frac{\beta \frac{\partial \beta}{\partial x} - \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \beta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)}{1 + \beta^2}, \quad D = \frac{\beta \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \beta \omega + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \alpha}{1 + \beta^2}. \tag{126}$$

Дифференцируя уравнения (124) и (125) по x и y, соответственно, находим

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial A}{\partial x} - AC \right) u_x + \frac{\partial B}{\partial x} - AD = 0, \tag{127}$$

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial C}{\partial y} - AC \right) u_x + \frac{\partial D}{\partial y} - CB = 0. \tag{128}$$

Из уравнений (127), (128) следует:

$$u_x = \frac{\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial D}{\partial y} + CB - AD}{\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial x}}. \tag{129}$$

Выражения (124), (125), если туда подставить (129), получены строго из (112) - (114). Но это не означает, что (124) и (125) есть следствия друг друга. Таким образом, мы имеем переопределенную систему уравнений (115), (116), (120), (124), (125), (129) для ω, ρ, P, u_x, u_y, где теоретически возможно сократить размерность на единицу. Т.е. мы можем свести систему уравнений (115), (116), (120), (124), (125), (129) на плоскости к системе на любой кривой, где количество неизвестных и уравнений совпадает. В частности, это позволяет выписать систему уравнений, описывающие эволюцию ударных волн в двумерном случае.

5. ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЕ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПУТЕМ УВЕЛИЧЕНИЯ ИХ РАЗМЕРНОСТИ

Рассмотрим теперь систему из pдифференциальных уравнений в частных производных первого порядка в пространстве $(\mathbf{r}, t)$

$$H_k \left(\mathbf{r}, t, S_v, \frac{\partial S_v}{\partial \mathbf{r}}, \frac{\partial S_v}{\partial t} \ldots \right) = 0, \quad v = 1 \ldots p, \quad k = 1 \ldots p. \tag{130}$$

Рассмотрим функцию

$$U(\mathbf{r}, t, \xi) = S_1(\mathbf{r}, t) + S_2(\mathbf{r}, t) \xi. \tag{131}$$

Очевидно выполняются следующие соотношения

$$S_2(\mathbf{r},t) = \frac{\partial U(\mathbf{r},t,\xi)}{\partial \xi}, \tag{132}$$

$$S_1(\mathbf{r},t) = U(\mathbf{r},t,\xi) - \frac{\partial U(\mathbf{r},t,\xi)}{\partial \xi}\xi. \tag{133}$$

Поставим (132), (133) в выражения (130). Следовательно получим,

$$H_k\left(\mathbf{r},\xi,t,U,\frac{\partial U}{\partial \xi},\frac{\partial U}{\partial t},\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \mathbf{r}},\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial \mathbf{r}},S_v,\frac{\partial S_v}{\partial \mathbf{r}},\frac{\partial S_v}{\partial t}\ldots\right) = 0, \quad v = 3\ldots p, \quad k = 1\ldots p. \tag{134}$$

Если мы рассмотрим (134) как систему из p уравнений в пространстве $(\mathbf{r},t,\xi)$ для $p-1$ неизвестных функций $U(\mathbf{r},t,\xi)$, $S_v(\mathbf{r},t,\xi)$,$v = 3\ldots p$, то мы будем иметь переопределённую одним уравнением систему дифференциальных уравнений. Эта система уравнений (134) фактически содержит решения системы (130). Ничего не мешает рассмотреть функцию

$$U(\mathbf{r},t,\xi) = S_1(\mathbf{r},t) + S_2(\mathbf{r},t)\xi + \ldots + S_p(\mathbf{r},t)\frac{\xi^{p-1}}{(p-1)!} \tag{135}$$

и с помощью нее аналогично преобразовать систему (130) к системе из p уравнений

$$H_k\left(\mathbf{r},\xi,t,U,\frac{\partial U}{\partial \xi},\frac{\partial U}{\partial t},\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \mathbf{r}},\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial \mathbf{r}},\ldots\frac{\partial^{p-1} U}{\partial \xi^{p-1}},\frac{\partial^{p} U}{\partial \xi^{p-1} \partial \mathbf{r}}\ldots\right) = 0, \quad k = 1\ldots p, \tag{136}$$

которая содержит всего одну неизвестную функцию $U(\mathbf{r},t,\xi)$.

Если к системе уравнений (134) заданы начальные данные Коши

$$S_v|_{t=0} = S_v^0(\mathbf{r}), \quad v = 1\ldots p, \tag{137}$$

то, чтобы их учесть при снижении размерности, можно, например, в (130) сделать замену неизвестных функций

$$S_v = S_v^0(\mathbf{r})\,S'_v, \quad v = 1\ldots p. \tag{138}$$

Тогда

$$S'_v\big|_{t=0} = 1, \quad v = 1\ldots p. \tag{139}$$

Очевидно также, что если система уравнений (134) линейна относительна неизвестных функций и их производных, то системы уравнений (138) и (140), получающиеся из нее, также линейны относительно своих неизвестных.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сокращение размерности в уравнениях гидродинамики является важной задачей, которая позволяет упростить расчеты гидродинамических потоков [3]–[7]. В целом, в приложениях при конструировании двигателей внутреннего сгорания, ракетных двигателей, газовых турбин и др. данное исследование необходимо для снижения вычислительных мощностей, затрачиваемых для решения этих задач в настоящее время. В частности, снижение размерности может позволить сократить продолжительность таких расчетов на один или несколько порядков. Снижение размерности также может быть использовано, чтобы верифицировать полные расчеты гидродинамических потоков, используя упрощенные расчеты на основе результатов, полученных авторами, как тестовые. Метод переопределения полной системы уравнений гидродинамики позволяет выписать замкнутые системы поверхностных интегро-дифференциальных уравнений, описывающих движение гидродинамических разрывов в самом общем трехмерном случае. Соответствующая компьютерная программа могла бы напрямую (пользуясь информацией только на поверхности) рассчитать гидродинамические разрывы с учетом вязкости, образования звука и других изменений плотности газов и жидкостей. Предлагаемый в данной статье метод разработан и применим к любым системам дифференциальных уравнений в частных производных, и позволяет существенно продвинуться в решении общей проблемы разрешения малых масштабов по времени и пространству. А это уже имеет большое практическое применение, например, при моделировании движения фронта турбулентного пламени (см. [19]). Принципиально новое в статье – это новые способы переопределения уравнений гидродинамики. Трудность заключается в выписывании сотен и тысяч уравнений пониженной размерности, понимании их структуры и исследовании. Действительно, из утверждений 1 и 2 следует, что количество уравнений пониженной на единицу размерности не изменяется, если они рассматриваются на неподвижной поверхности. Однако их порядок становится равным p и при следующем снижении размерности количество уравнений становится порядка p^2, потом p^4 и т.д. В п. 3 и п. 4 количество переопределенных уравнений гидродинамики порядка 10, т.е. $p \approx 10$. Если мы рассматриваем подвижную поверхность, то из утверждения 3 следует, что количество уравнений на этой поверхности становится сразу порядка p^2. Кроме того видно, что при многократном дифференцировании возникает очень сложная структура уравнений на поверхности. Статья в большей мере предназначена для программистов, которые в будущем должны решить эту проблему.

Отметим, что в данной работе в отличие от работы [14] найдено достаточное условие независимости уравнения связи (32), которое, однако, не является необходимым, и поэтому оно может быть теоретически в некотором смысле ослаблено. Произведена верификация этого условия на некоторых примерах. Для переопределенных систем уравнений гидродинамики, приведенных в данной работе, в силу их чрезвычайной сложности условие независимости в данном смысле не проверялось. Данная задача снижения размерности уравнений гидродинамики в общем случае, возможно, может быть поставлена для будущих исследований.

Данный метод может быть также использован для поиска частных решений любой системы дифференциальных уравнений. Достаточно выписать некоторое дополнительное уравнение связи, которое выполняется, например, для какого-нибудь частного решения. Если будет возможно постепенно сократить размерность полученной переопределенной системы вплоть до аналитического решения, то мы найдем частные решения исходной системы дифференциальных уравнений, для которых выполняется уравнение связи.

Возникает вопрос: что происходит с граничными условиями при переходе из трёхмерной области на поверхность? Можно ли применить наш метод к поверхностям, где задаются граничные условия? Здесь возможны следующие ситуации:

Граничные условия влияют на внешний поток. Как показано в рассуждениях после утверждения 2 “достаточно хорошая” система уравнений пониженной размерности его “чувствует” через свои начальные данные. О влиянии внешнего потока говорилось также в разд. 3.2 и разд. 4.2.

Для уравнений гидродинамики, например, (87) - (88) при понижении размерности, скажем, до аналитического решения мы найдем, что в явном виде выражаются только достаточно высокие производные от $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$, а другие просто сокращаются. Тогда мы будем иметь просто уравнение вида $\partial^n\omega / \partial t^k \partial x^l \partial y^m = const$, решая которое мы очевидным образом можем учесть все начальные и краевые условия.

При переходе от трехмерной области к поверхности повышаются требования к гладкости для рассматриваемых решений. Т.е. наш метод применим не на всякой поверхности в области решений. Например, для уравнения Лапласа условие дополнительной гладкости решения приводит также к сокращению размерности (см. приложение Б). На граничных поверхностях возможны разрывы непрерывности в производных у решений.

Подобно рассуждениям в п. 5 краевые условия можно учесть заменой неизвестных функций.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Найдем определитель матрицы $A = (a_{i,j})$, $i, j = 1 \dots n$, которая определяется подобно (33) по формуле:

$$a_{i+1,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} f_{k,j}, \quad i, j, k = 1 \dots n \quad , \tag{140}$$

где строка $a_{1,j} = a_j^0$ и матрица $F = (f_{i,j})$, $i, j = 1 \dots n$ заранее известны. Из формулы (140) следует, что каждая $i+1$- ая строка матрицы $A = (a_{i,j}$ определяется по формуле

$$(a_{i+1,j}) = \left(a_j^0\right) \overbrace{FF \dots F}^{i}. \tag{141}$$

Представим матрицу F в виде [20]

$$F = S^{-1} E_\lambda S, \tag{142}$$

где

$$E_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & & 0 \\ 0 & & \dots & & \\ & & & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

и $\lambda_1, \dots \lambda_n$ — собственные числа матрицы F. Обозначим

$$\left(a_j^s\right) = \left(a_j^0\right) S^{-1}. \tag{143}$$

Подставим (142) в (141) и после преобразований получим, что каждая $i+1$- ая строка матрицы $A = (a_{i,j}$ определяется по формуле

$$(a_{i+1,j}) = \left(a_j^s\right) \overbrace{E_\lambda E_\lambda \dots E_\lambda}^{i} S = (\lambda_1^i a_1^s, \lambda_2^i a_2^s \dots \lambda_n^i a_n^s) S, \quad i = 0 \dots n-1. \tag{144}$$

Таким образом, из (144) матрица $A = (a_{i,j})$, где $i, j = 1 \dots n$, имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_1^s & a_2^s & \dots. & a_{n-1}^s & a_n^s \\ \lambda_1 a_1^s & \lambda_2 a_2^s & & \lambda_{n-1} a_{n-1}^s & \lambda_n a_n^s \\ \dots & & \dots & & \dots \\ & & & & \\ \lambda_1^{n-1} a_1^s & \lambda_2^{n-1} a_2^s & \dots & \lambda_{n-1}^{n-1} a_{n-1}^s & \lambda_n^{n-1} a_n^s \end{pmatrix} S. \tag{145}$$

Ее определитель равен

$$|A| = a_1^s \cdot \dots \cdot a_n^s \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots. & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & & \lambda_{n-1} & \lambda_n \\ \dots & & \dots & & \dots \\ & & & & \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_{n-1}^{n-1} & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} |S| = \pm a_1^s \cdot \dots \cdot a_n^s \prod_{j>i} (\lambda_j - \lambda_i) \, |S| \, . \tag{146}$$

Определитель матрицы преобразования $|S| \neq 0$. Следовательно, условие того, что определитель $|A|$ отличен от нуля имеет вид

$$a_j^s \neq 0 \text{ и } \lambda_j \neq \lambda_i, \quad i \neq j, \quad i, j = 1 \dots n. \tag{147}$$

Таким образом, мы уточнили формулу (32) и доказали, что она не равна тождественно нулю в общем случае. Детерминант (32) определяется конкретной структурой выражений (26) и (27).

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Рассмотрим в двумерной области G уравнение Лапласа [1]

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \tag{148}$$

Величины $\partial\varphi/\partial n$ и φ на границе G связаны между собой формулой Грина [1] (см. рис. 3)

$$\pi\varphi(\mathbf{r}) = \oint \left[\frac{\partial \varphi(\mathbf{r}_s)}{\partial n_s} \ln|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| - \varphi(\mathbf{r}_s)\, \mathbf{n}_s \cdot \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|^2} \right] dl(\mathbf{r}_s), \tag{149}$$

где индекс s означает интегрирование по всей границе. В области G выполняется, очевидно, также уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = 0. \tag{150}$$

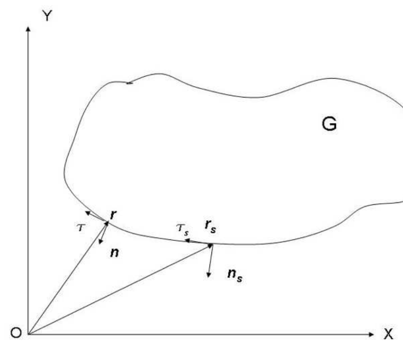

Рис. 3. *Область G*

Для него также можно выписать формулу Грина

$$\pi\frac{\partial \varphi}{\partial x}(\mathbf{r}) = \oint \left[\frac{\partial\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)(\mathbf{r}_s)}{\partial n_s} \ln|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\mathbf{r}_s)\, \mathbf{n}_s \cdot \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|^2} \right] dl(\mathbf{r}_s). \tag{151}$$

Преобразуем эту формулу, используя очевидные соотношения на границе (см. рис. 3):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \left(n_x \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \tau_x \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right) \tag{152}$$

и

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial n^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial \tau^2} = 0\,. \tag{153}$$

Имеем после подстановки (152) в (151),

$$\pi\left(n_x\frac{\partial\varphi}{\partial n} + \tau_x\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)(\mathbf{r}) =$$

$$= \oint\left[\frac{\partial\left(n_{xs}\frac{\partial\varphi}{\partial n_s} + \tau_{xs}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau_s}\right)(\mathbf{r}_s)}{\partial n_s}\ln|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| - \left(n_{xs}\frac{\partial\varphi}{\partial n_s} + \tau_{xs}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau_s}\right)(\mathbf{r}_s)\,\mathbf{n}_s\cdot\frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|^2}\right]dl\,(\mathbf{r}_s) \tag{154}$$

или

$$\pi\left(n_x\frac{\partial\varphi}{\partial n} + \tau_x\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)(\mathbf{r}) =$$

$$= \oint\left[\left(n_{xs}\frac{\partial^2\varphi}{\partial n_s^2} + \tau_{xs}\frac{\partial^2\varphi}{\partial n_s\partial\tau_s}\right)(\mathbf{r}_s)\ln|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| - \left(n_{xs}\frac{\partial\varphi}{\partial n_s} + \tau_{xs}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau_s}\right)(\mathbf{r}_s)\,\mathbf{n}_s\cdot\frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|^2}\right]dl\,(\mathbf{r}_s) \tag{155}$$

или, учитывая (153),

$$\pi\left(n_x\frac{\partial\varphi}{\partial n} + \tau_x\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)(\mathbf{r}) =$$

$$= \oint\left[\left(-n_{xs}\frac{\partial^2\varphi}{\partial \tau_s^2} + \tau_{xs}\frac{\partial^2\varphi}{\partial n_s\partial\tau_s}\right)(\mathbf{r}_s)\ln|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| - \left(n_{xs}\frac{\partial\varphi}{\partial n_s} + \tau_{xs}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau_s}\right)(\mathbf{r}_s)\,\mathbf{n}_s\cdot\frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|^2}\right]dl\,(\mathbf{r}_s)\,. \tag{156}$$

Таким образом, мы получила два интегро-дифференциальных уравнения (149) и (156) на границе области G для двух поверхностных неизвестных $\partial\varphi/\partial n$ и φ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. — М.: Наука, 1966. — 742 с.

[2] Самарский А.А. Разностные методы решения задач газовой динамики / А.А. Самарский, Ю.П. Попов. — М.: Наука, 1980. — 352 с.

[3] Bychkov V.V. Nonlinear equation for a curved stationary flame and the flame velocity / V.V. Bychkov // Phys. Fluids. — 1998. — V. 10. — P. 2091.

[4] Bychkov V. Coordinate-free description of corrugated flames with realistic gas expansion / V. Bychkov, M. Zaytsev, V. Akkerman // Phys. Rev. E. — 2003. — V. 68. — P. 026312.

[5] Зайцев М.Л. К нелинейной теории движения поверхностей гидродинамических разрывов / М.Л. Зайцев, В.Б. Аккерман // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 2009. — Т. 135, № 4. — С. 800–819.

[6] Sivashinsky G.I. Nonlinear analysis of hydrodynamics instability in laminar flames. Derivation of basic equations / G.I. Sivashinsky // Acta Astronaut. — 1977. — Vol. 4. — P. 1177.

[7] Frankel M. An equation of surface dynamics modeling flame fronts as density discontinuities in potential flows / M. Frankel // Phys. Fluids A. — 1990. — Vol. 2. — P. 1879.

[8] Ландау Л.Д. Теоретическая физика: Гидродинамика. Т. VI / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. — М: Наука, 1986. — 736 с.

[9] Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1, 2 / Л.И. Седов. — М.: Наука, 1978. — 568 с.

[10] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. — М.: Наука, 1987. — 840 с.

[11] Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа / М. Ван-Дайк. — М.: Мир, 1986. — 181 с.

[12] Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред / Дж. Мейз. — М.: Мир, 1974. — 318 с.

[13] Хаппель Д. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса / Д. Хаппель, Г. Бреннер. — М.: Мир, 1976. — 630 с.

[14] Аккерман В.Б. Снижение размерности в уравнениях гидродинамики / В.Б. Аккерман, М.Л. Зайцев // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2011. — Т. 51, № 8. — С. 1518–1530.

[15] Курант Р. Уравнения с частными производными / Р. Курант. — М.: Мир, 1964. — 830 с.

[16] Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными / И.Г. Петровский. — М.: Физматгиз, 1961. — 400 с.

[17] Зайцев М.Л. Свободная поверхность и задача обтекания в вязкой жидкости / М.Л. Зайцев, В.Б. Аккерман // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 2011. — Т. 140, № 4. — С. 814–819.

[18] Зайцев М.Л. Метод описания стационарного фронта реакции в двухмерном потоке / М.Л. Зайцев, В.Б. Аккерман // Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 2010. — Т. 92, № 11. — С. 813–816.

[19] Математическая теория горения и взрыва / Я.Б. Зельдович, Г.И. Баренблатт, В.Б. Либрович, Г.М. Махвиладзе. — М.: Наука, 1980. — 480 с.

[20] Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д.В. Беклемишев. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 304 с.

REFERENCES

[1] Tikhonov A.N., Samarskii A.A. Equations of Mathematical Physics. [Tixonov A.N., Samarskij A.A. Uravneniya matematicheskoj fiziki]. Moscow: Nauka, 742 p.

[2] Samarskii A.A., Popov Yu.P. Difference Methods for Solving Problems of Gas Dynamics. [Samarskij A.A., Popov Yu.P. Raznostnye metody resheniya zadach gazovoj dinamiki]. Moscow: Nauka, 1980, 352 p.

[3] Bychkov V.V. Nonlinear equation for a curved stationary flame and the flame velocity. Phys. Fluids, 1998, vol. 10, p. 2091.

[4] Bychkov V., Zaytsev M., Akkerman V. Coordinate-free description of corrugated flames with realistic gas expansion. Phys. Rev. E., 2003, vol. 68, p. 026312.

[5] Zaytsev M.L., Akkerman V.B., A Nonlinear Theory for the Motion of Hydrodynamic Discontinuity Surfaces. [Zajcev M.L., Akkerman V.B. K nelinejnoj teorii dvizheniya poverxnostej gidrodinamicheskix razryvov]. *Zhurnal e'ksperimental'noj i teoreticheskoj fiziki — Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 2009, vol. 135, iss. 4, pp. 800–819.

[6] Sivashinsky G.I. Nonlinear analysis of hydrodynamics instability in laminar flames. Derivation of basic equations. Acta Astronaut, 1977, vol. 4, p. 1177.

[7] Frankel M. An equation of surface dynamics modeling flame fronts as density discontinuities in potential flows. Phys. Fluids A., 1990, vol. 2, p. 1879.

[8] Landau L.D., Lifshitz E.M. Course of Theoretical Physics, Vol. 6: Fluid Mechanics. [Landau L.D., Lifshic E.M. Teoreticheskaya fizika: Gidrodinamika. T. VI]. Moscow: Nauka, 1986, 736 p.

[9] Sedov L.I. Mechanics of Continuous Media, Vols. 1, 2. [Sedov L.I. Mexanika sploshnoj sredy. T. 1, 2]. Moscow: Nauka, 1978, 568 p.

[10] Loitsyanskii L. G., Mechanics of Liquids and Gases. [Lojcyanskij L.G. Mexanika zhidkosti i gaza]. Moscow: Nauka, 1987, 840 p.

[11] Van Dyke M. Album of Fluid Motion. [Van-Dajk M. Al'bom techenij zhidkosti i gaza]. Moscow: Mir, 1986, 181 p.

[12] Mase G. Theory and Problems of Continuum Mechanics. [Mejz Dzh. Teoriya i zadachi mexaniki sploshnyx sred]. Moscow: Mir, 1974, 318 p.

[13] Happel J., Brenner H. Low Reynolds Number Hydrodynamics. [Xappel' D., Brenner G. Gidrodinamika pri malyx chislax Rejnol'dsa]. Moscow: Mir, 1976, 630 p.

[14] Akkerman V.B., Zaytsev M.L. Dimension Reduction in Fluid Dynamics Equations. [Akkerman V.B., Zajcev M.L. Snizhenie razmernosti v uravneniyax gidrodinamiki]. *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki — Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2011, vol. 51, iss. 8, pp. 1518–1530.

[15] Kurant R. Partial Differential Equations. [Kurant R. Uravneniya s chastnymi proizvodnymi]. Moscow: Mir, 1964, 830 p.

[16] Petrovskii I. G., Lectures on partial differential equations. [Petrovskij I.G. Lekcii ob uravneniyax s chastnymi proizvodnymi]. Moscow: Fizmatgiz, Moscow, 1961, 400 p.

[17] Zaytsev M.L., Akkerman V.B. Free Surface and Flow Problem for a Viscous Liquid. [Zajcev M.L., Akkerman V.B. Svobodnaya poverxnost' i zadacha obtekaniya v vyazkoj zhidkosti]. *Zhurnal e'ksperimental'noj i teoreticheskoj fiziki — Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 2011, vol. 140, iss. 4, pp. 814–819.

[18] Zaytsev M.L., Akkerman V.B. Method for Describing the Steady-State Reaction Front in a Two-Dimensional Flow. [Zajcev M.L., Akkerman V.B. Metod opisaniya stacionarnogo fronta reakcii v dvuxmernom potoke]. *Pis'ma v Zhurnal e'ksperimental'noj i teoreticheskoj fiziki — Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters (JETP Letters)*, 2010, vol. 92, iss. 11, pp. 813–816.

[19] Zel'dovich Ya.B., Barenblat G.I., Librovich V.B., Makhviladze G.M. The Mathematical Theory of Combustion and Explosion. [Zel'dovich Ya.B., Barenblatt G.I., Librovich V.B., Maxviladze G.M. Matematicheskaya teoriya goreniya i vzryva]. Moscow: Nauka, 1980, 480 p.

[20] Beklemishev D.V. Course of analytical geometry and linear algebra. [Beklemishev D.V. Kurs analiticheskoj geometrii i linejnoj algebry]. Moscow: Fizmatlit, 2005, 304 p.

Зайцев Максим Леонидович, аспирант, Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, Москва, Российская Федерация
E-mail: mlzaytsev@gmail.com
Тел.: 8(495)955–22–83

Maxim L. Zaytsev, PhD student, Nuclear Safety Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
E-mail: mlzaytsev@gmail.com
Tel.: 8(495)955–22–83

Аккерман Вячеслав Борисович, кандидат физико-математических наук, преподаватель, PhD, Университет Западной Вирджинии, США
E-mail: Vyacheslav.Akkerman@mail.wvu.edu
Тел.: +1.304.293.0802

Vyacheslav B. Akkerman, Assistant Professor, PhD, Department of Mechanical and Aerospace Engineering West Virginia University, USA
E-mail: Vyacheslav.Akkerman@mail.wvu.edu
Tel.: +1.304.293.0802