УДК 517.95

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЯ И ЕГО ПЕРВЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЗАДАЧИ О СТАЦИОНАРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕПЛА В БИМАТЕРИАЛЕ ВБЛИЗИ МЕЖФАЗНОЙ ТРЕЩИНЫ

А. С. Черникова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 03.06.2014 г.

Аннотация: рассматривается задача трансмиссии (сопряжения), описывающая стационарное распределение тепла в плоскости, состоящей из двух полуплоскостей, заполненных различными неоднородными материалами, с конечной трещиной на границе их сопряжения. Предполагается, что коэффициенты внутренней теплопроводности материалов имеют экспоненциальный вид.

В отличие от раннее опубликованных, в настоящей работе сняты условия согласования граничных функций, наличие которых приводило к существованию классического решения поставленной задачи. Введено понятие обобщенного решения сформулированной задачи. При такой постановке в асимптотических представлениях первых производных решения задачи (тепловых потоках) вблизи концов трещины появляются сингулярные компоненты, сами же решения остаются непрерывными и равномерно ограниченными функциями.

Ключевые слова: задача трансмиссии, обобщенное решение, краевые условия, уравнение стационарной теплопроводности, трещина, асимптотика.

ASYMPTOTIC REPRESENTATIONS OF THE SOLUTION AND ITS FIRST DERIVATIVES OF THE PROBLEM OF THE STATIONARY HEAT DISTRIBUTION IN A BIMATERIAL NEAR AN INTERPHASE CRACK

A. S. Chernikova

Abstract: a problem of transmission is considered. It describes the stationary heat distribution in the plane consisting of two half-planes filled with different non-homogeneous materials with a finite crack at the boundary of their conjugation. It is assumed that the coefficients of the thermal conductivity of the materials have an exponential form.

Unlike the results given in the previously published research the consistency conditions of the boundary functions are removed in this research. Their presence leads to the existence of the classical solution of the stated problem. The concept of the generalized solution of the problem is introduced. In this formulation the singular components appear in the asymptotic representations of the first derivatives of the solution of the problem (of the heat flows) near the ends of the crack. The solutions remain continuous and uniformly bounded functions.

Keywords: transmission problem, general solution, boundary conditions, steady heat conduction equation, crack, asymptotics.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается задача трансмиссии о стационарном распределении тепла в плоскости, составленной из двух полуплоскостей, состоящих из неоднородных материалов с различными экспоненциальными коэффициентами внутренней теплопроводности, с трещиной на границе их сопряжения. Граничные условия задают скачки температуры и теплового потока.

Эта работа является третьей из цикла статей, посвященных изучению качественных свойств решения поставленной задачи. В первой статье цикла построено классическое решение указанной задачи, а также доказано, что, при некоторых ограничениях на граничные функции, оно и его первые производные являются непрерывными и ограниченными функциями вплоть до границы. Во второй статье граничные функции представляются в виде суммы гладкой функции, а также функции, чей образ Фурье легко вычисляется. С помощью такого представления исходную задачу можно разбить на две, первая из них, граничные функции которой являются трижды непрерывно дифференцируемыми, описывает распределение тепла в биматериале с полуограниченной межфазной трещиной. Эта задача была изучена во второй работе указанного цикла, построено ее явное решение, а также доказано, что и это решение, и его первые производные являются непрерывными, ограниченными вплоть до границы функциями. Указанные статьи находятся в настоящее время в печати.

Таким образом, данная работа посвящена изучению оставшейся задачи, получающейся после указанного выше представления граничных функций, и, следовательно, сингулярные компоненты асимптотического представления решения этой задачи, согласно результатам работ цикла, будут совпадать с сингулярными составляющими асимптотического представления решения изначально поставленной задачи первой статьи. Эти сингулярные составляющие возникают в связи со снятием дополнительных ограничений на граничные функции, которые были наложены ранее.

Некоторые результаты, касающиеся поставленной задачи, а также задач, близким к ней, можно найти в работах [1]–[7].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, через $\mathbb{R}^2_+$ и $\mathbb{R}^2_-$ будем соответственно обозначать множества точек $\mathbb{R}^2_+ = \{x|\ x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 > 0\}$, $\mathbb{R}^2_- = \{x|\ x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 < 0\}$. Приведем задачу, рассматриваемую в работе [7], она моделируется следующей системой дифференциальных уравнений с частными производными

$$\Delta u_1(x) + k_1 \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_2} = 0,\ x \in \mathbb{R}^2_+, \tag{1}$$

$$\Delta u_2(x) + k_2 \frac{\partial u_2(x)}{\partial x_2} = 0,\ x \in \mathbb{R}^2_- \tag{2}$$

с условиями на границе материалов $\Gamma = \{x|\ x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 = 0\}$

$$u_1(x_1, +0) - u_2(x_1, -0) = q_0(x_1),\ x_1 \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u_1(x_1, +0)}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2(x_1, -0)}{\partial x_2} = q_1(x_1),\ x_1 \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Функции $q_0(x_1)$ и $q_1(x_1)$ финитны, $\operatorname{supp} q_0(x_1) = \operatorname{supp} q_1(x_1) = [-1; 1]$, $q_0(x_1), q_0(x_1) \in C^3([-1; 1])$. Условия (3) и (4) понимаются в смысле главного значения.

Уравнения (1) и (2) получены из уравнения стационарной теплопроводности для материала без тепловых источников $\operatorname{div}(k(x) \operatorname{grad} u(x)) = 0$, где $k(x)$ — коэффициент внутренней теплопроводности. При получении уравнений (1), (2) предполагалось, что в полуплоскостях $\mathbb{R}^2_\pm$

коэффициенты внутренней теплопроводности имеют вид $k(x) = c_{1,5\mp 0,5}e^{k_{1,5\mp 0,5}x_2}$, где $c_{1,5\mp 0,5}$ — произвольные, отличные от нуля константы, а $k_{1,5\mp 0,5}$ — произвольные положительные константы.

Левые части граничных условий (3) и (4) представляют собой скачки температуры и теплового потока через границу Γ. Из условий, наложенных на функции $q_0(x_1)$ и $q_1(x_1)$, следует, что на границе полуплоскостей $\mathbb{R}^2_+$ и $\mathbb{R}^2_-$ — прямой Γ, вне отрезка трещины $l = [-1;1] \times \{0\}$, указанные скачки обнуляются.

Приведем определение классического решения задачи (1)-(4), сформулированное в первой статье цикла, указанного во введении.

Определение 1. Решением задачи (1)-(4) назовем пару функций $u_1(x)$ и $u_2(x)$, заданных соответственно на $\mathbb{R}^2_+$ и $\mathbb{R}^2_-$, таких что $u_1(x) \in C^2(\mathbb{R}^2_+) \cap C^1(\overline{\mathbb{R}^2_+})$, $u_2(x) \in C^2(\mathbb{R}^2_-) \cap C^1(\overline{\mathbb{R}^2_-})$, которые в обычном смысле удовлетворяют уравнениям (1) и (2), условиям (3) и (4), и такие, что функции $e^{0,5k_1x_2}u_1(x)$, $e^{0,5k_1x_2}\dfrac{\partial u_1(x)}{\partial x_1}$, $e^{0,5k_1x_2}\dfrac{\partial u_1(x)}{\partial x_2}$ ограничены на $\mathbb{R}^2_+$, функции $e^{0,5k_2x_2}u_2(x)$, $e^{0,5k_2x_2}\dfrac{\partial u_2(x)}{\partial x_1}$, $e^{0,5k_2x_2}\dfrac{\partial u_2(x)}{\partial x_2}$ ограничены на $\mathbb{R}^2_-$, функции $e^{0,5k_1x_2}\dfrac{\partial^2 u_1(x)}{\partial x_1^2}$, $e^{0,5k_1x_2}\dfrac{\partial^2 u_1(x)}{\partial x_2^2}$ ограничены при $x_2 \geqslant \delta > 0$, функции $e^{0,5k_2x_2}\dfrac{\partial^2 u_2(x)}{\partial x_1^2}$, $e^{0,5k_2x_2}\dfrac{\partial^2 u_2(x)}{\partial x_2^2}$ ограничены при $x_2 \leqslant -\delta < 0$, функция $e^{0,5k_1x_2}u_1(x)$ принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R}^2_+)$, функция $e^{0,5k_2x_2}u_2(x)$ принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R}^2_-)$, а функции $u_1(x_1,+0)$, $u_2(x_1,-0)$, $\dfrac{\partial u_1(x_1,+0)}{\partial x_2}$, $\dfrac{\partial u_2(x_1,-0)}{\partial x_2}$ существуют и принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R})$.

Как говорилось выше, функции $q_p(x_1), p = 0;1$ можно представить в виде

$$q_p(x_1) = Q_p(x_1) + \tilde{\tilde{q}}_p(x_1),\ p = 0;1, \tag{5}$$

где $\tilde{\tilde{q}}_p(x_1)$ при $p = 0;1$ принадлежат классу $\Im = \{f(x) |\, f(x) \in C^3(\mathbb{R}); f(x) = 0, x < -1; f^{(k)}(-1) = 0, k = \overline{0;3}; \left|f^{(k)}(x)\right| \leqslant Ce^{-x}, x \geqslant -1, k = \overline{0;3}\}$ и

$$\begin{gathered}
Q_p(x_1) = e^{-(x_1+1)}\Theta(x_1+1)\left[q_p(-1) + (x_1+1)\left(q_p'(-1) + q_p(-1)\right) + \right.\\
+0,5(x_1+1)^2\left(q_p''(-1) + 2q_p'(-1) + q_p(-1)\right) + \frac{1}{6}(x_1+1)^3\left(q_p'''(-1) + \right.\\
\left.\left. +3q_p''(-1) + 3q_p'(-1) + q_p(-1)\right)\right] - e^{-(x_1-1)}\Theta(x_1-1)\left[q_p(1) + (x_1-1)\left(q_p'(1) + \right.\right.\\
+ q_p(1)) + 0,5(x_1-1)^2\left(q_p''(1) + 2q_p'(1) + q_p(1)\right) + \frac{1}{6}(x_1-1)^3\left(q_p'''(1) + 3q_p''(1) + \right.\\
\left.\left. + 3q_p'(1) + q_p(1)\right)\right], p = 0;1.
\end{gathered} \tag{6}$$

Замечание 1. Справедливость представлений (5) будет доказана ниже.

Таким образом, как говорилось в [7], задачу (1)-(4) можно разбить на следующие две задачи:

1) задачу, состоящую из уравнений (1), (2) и следующих граничных условий

$$u_1(x_1,+0) - u_2(x_1,-0) = \tilde{\tilde{q}}_0(x_1),\ x_1 \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2}(x_1,+0) - \frac{\partial u_2}{\partial x_2}(x_1,-0) = \tilde{\tilde{q}}_1(x_1),\ x_1 \in \mathbb{R}; \tag{8}$$

2) задачу, состоящую из уравнений (1), (2) и граничных условий

$$u_1(x_1,+0) - u_2(x_1,-0) = Q_0(x_1),\ x_1 \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2}(x_1,+0) - \frac{\partial u_2}{\partial x_2}(x_1,-0) = Q_1(x_1),\ x_1 \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Условия (7)-(10) понимаются в смысле главного значения.

Задача (1), (2), (7), (8) была рассмотрена во второй работе цикла, указанного во введении, и основным результатом являлось доказательство следующего утверждения.

Утверждение. Решение задачи (1), (2), (7), (8) и его первые производные являются непрерывными, ограниченными функциями.

Таким образом, осталось рассмотреть задачу (1), (2), (9), (10). Согласно указанному утверждению, сингулярные составляющие асимптотических представлений решения и его первых производных задачи (1)-(4) совпадают с соответствующими сингулярными компонентами асимптотических представлений решения и его первых производных задачи (1), (2), (9), (10).

Введем обозначения: $r_{-1}(x) = \sqrt{(x_1+1)^2 + x_2^2}$ и $r_{+1}(x) = \sqrt{(x_1-1)^2 + x_2^2}$.

Сформулируем основные теоремы, доказанные в данной работе.

Теорема 1. Для компонентов вектор-функции $(u_1(x), u_2(x))$, которая является решением задачи (1)-(4), справедливы следующие свойства:
1. функция $e^{0,5k_1x_2}u_1(x)$ принадлежит пространству $L_2\left(\mathbb{R}^2_+\right)$, а функция $e^{0,5k_2x_2}u_2(x)$ — пространству $L_2\left(\mathbb{R}^2_-\right)$;
2. выполнены равенства

$$\lim_{x_2\to+0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(u_1(x)-u_2(x)-q_0(x_1)\right)^2dx_1=0,\ \lim_{x_2\to+0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial u_1(x)}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2(x)}{\partial x_2}-q_1(x_1)\right)^2dx_1=0.$$

Теорема 2. Для компонентов вектор-функции $(u_1(x), u_2(x))$, которая является решением задачи (1)-(4), и их первых производных справедливы следующие асимптотические разложения вблизи точек $(\pm1; 0)$:

$$u_1(x) = R_1(x),\ u_2(x) = R_2(x),$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_j(x)}{\partial x_1} = e^{-0,5k_jx_2}\left(\left(-(2\pi)^{-1}x_2r_{-1}^{-2}(x) + (8\pi)^{-1}(k_1+k_2)\ln r_{-1}(x)\right)q_0(-1)-\right.\\ -\left(-(2\pi)^{-1}x_2r_{+1}^{-2}(x)+(8\pi)^{-1}(k_1+k_2)\ln r_{+1}(x)\right)q_0(1)-(2\pi)^{-1}\ln r_{-1}(x)q_1(-1)+\\ \left.+(2\pi)^{-1}\ln r_{+1}(x)q_1(1)\right)+R_{j+2}(x), j=1;2,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_j(x)}{\partial x_2} = e^{-0,5k_jx_2}\left((2\pi)^{-1}(x_1+1)r_{-1}^{-2}(x)q_0(-1)-(2\pi)^{-1}(x_1-1)r_{+1}^{-2}(x)q_0(1)-\right.\\ \left.-(2\pi)^{-1}\ln r_{-1}(x)q_0'(-1)+(2\pi)^{-1}\ln r_{+1}(x)q_0'(1)\right)+R_{j+4}(x), j=1;2,\end{gathered}$$

где $r_{-1}(x) = \sqrt{(x_1+1)^2+x_2^2}$ и $r_{+1}(x) = \sqrt{(x_1-1)^2+x_2^2}$, а функции $R_1(x)$, $R_3(x)$, $R_5(x)$ ($R_2(x)$, $R_4(x)$, $R_6(x)$) являются равномерно ограниченными на любом компакте $K_1 \subset \overline{\mathbb{R}^2_+}$ ($K_2 \subset \overline{\mathbb{R}^2_-}$).

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СПРАВЕДЛИВОСТИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ (5)

Докажем справедливость представлений (5), которыми пользовались еще во второй работе цикла, указанного во введении. Рассмотрим некоторую функцию $f(x_1)$: $\operatorname{supp} f(x_1) = [-1;1]; f(x_1) \in C^3([-1;1])$. Построим функцию

$$\begin{gathered}\widetilde{f}(x_1) = f(x_1) - e^{-(x_1+1)}\Theta(x_1+1)\left[f(-1)+(x_1+1)\left(f'(-1)+a_1f(-1)\right)+\right.\\ +0,5(x_1+1)^2\left(f''(-1)\ +a_2f'(-1)+a_3f(-1)\right)+\frac{1}{6}(x_1+1)^3\left(f'''(-1)+\right.\\ \left.\left.+\ a_4f''(-1)+a_5f'(-1)+a_6f(-1)\right)\right],\end{gathered}\tag{11}$$

где коэффициенты $a_k, k = \overline{1;6}$ находятся из условий $\widetilde{f}^{(k)}(-1) = 0, k = \overline{0;3}$, то есть $\widetilde{f}(x_1) \in C^3([-\infty;1])$. Воспользовавшись равенством (11), можно получить представления $\widetilde{f}^{(k)}(x_1), k = \overline{1;3}$, при подстановке в которые $x_1 = -1$, имеем

$$\widetilde{f}(-1) = f(-1) - f(-1) = 0, \tag{12}$$

$$\widetilde{f}'(-1) = f'(-1) - f'(-1) + (1-a_1)f(-1) = (1-a_1)f(-1), \tag{13}$$

$$\widetilde{f}''(-1) = -(a_2-2)f'(-1) - (1-2a_1+a_3)f(-1), \tag{14}$$

$$\widetilde{f}'''(-1) = (3-a_4)f''(-1) - (3-3a_2+a_5)f'(-1) + (1-3a_1+3a_3-a_6)f(-1). \tag{15}$$

Коэффициенты $a_k, k = \overline{1;6}$ определяются из системы $\widetilde{f}^{(k)}(-1) = 0, k = \overline{0;3}$, с учетом равенств (12)-(15). Таким образом, $a_1 = a_3 = a_6 = 1$, $a_2 = 2$, $a_4 = a_5 = 3$. Подставим полученные $a_k, k = \overline{1;6}$ в представление (11), $\widetilde{f}(x_1)$ примет вид

$$\begin{gathered}\widetilde{f}(x_1) = f(x_1) - e^{-(x_1+1)}\Theta(x_1+1)\Big[f(-1) + (x_1+1)\Big(f'(-1) + f(-1)\Big) + \\ +0{,}5(x_1+1)^2\Big(f''(-1) + 2f'(-1) + f(-1)\Big) + \frac{1}{6}(x_1+1)^3\Big(f'''(-1) + \\ + 3f''(-1) + 3f'(-1) + f(-1)\Big)\Big].\end{gathered} \tag{16}$$

Теперь построим функцию

$$\begin{gathered}\widetilde{\widetilde{f}}(x_1) = \widetilde{f}(x_1) + e^{-(x_1-1)}\Theta(x_1-1)\Big[f(1) + (x_1-1)\Big(f'(1) + b_1 f(1)\Big) + \\ +0{,}5(x_1-1)^2\Big(f''(1) + b_2 f'(1) + b_3 f(1)\Big) + \frac{1}{6}(x_1-1)^3\Big(f'''(1) + b_4 f''(1) + \\ +b_5 f'(1) + b_6 f(1)\Big)\Big],\end{gathered} \tag{17}$$

где коэффициенты $b_k, k = \overline{1;6}$ находятся из условий $\widetilde{\widetilde{f}}^{(k)}(1+0) = \widetilde{f}^{(k)}(1-0)$, $k = \overline{0;3}$, то есть $\widetilde{\widetilde{f}}(x_1) \in C^3(\mathbb{R})$. Действуя так же, как и при нахождении коэффициентов $a_k, k = \overline{1;6}$ в представлении (11), получим, что $b_1 = b_3 = b_6 = 1$, $b_2 = 2$, $b_4 = b_5 = 3$. Таким образом, представление (17) примет вид

$$\begin{gathered}\widetilde{\widetilde{f}}(x_1) = \widetilde{f}(x_1) + e^{-(x_1-1)}\Theta(x_1-1)\Big[f(1) + (x_1-1)\Big(f'(1) + f(1)\Big) + \\ +0{,}5(x_1-1)^2\Big(f''(1) + 2f'(1) + f(1)\Big) + \frac{1}{6}(x_1-1)^3\Big(f'''(1) + 3f''(1) + \\ +3f'(1) + f(1)\Big)\Big].\end{gathered} \tag{18}$$

Согласно представлениям (16) и (18), функция $f(x_1)$ представима в виде

$$\begin{gathered}f(x_1) = \widetilde{\widetilde{f}}(x_1) + e^{-(x_1+1)}\Theta(x_1+1)\Big[f(-1) + (x_1+1)\Big(f'(-1) + f(-1)\Big) + \\ +0{,}5(x_1+1)^2\Big(f''(-1) + 2f'(-1) + f(-1)\Big) + \frac{1}{6}(x_1+1)^3\Big(f'''(-1) + 3f''(-1) + \\ + 3f'(-1) + f(-1)\Big)\Big] - e^{-(x_1-1)}\Theta(x_1-1)\Big[f(1) + (x_1-1)\Big(f'(1) + f(1)\Big) + \\ +0{,}5(x_1-1)^2\Big(f''(1) + 2f'(1) + f(1)\Big) + \frac{1}{6}(x_1-1)^3\Big(f'''(1) + 3f''(1) + \\ +3f'(1) + f(1)\Big)\Big],\end{gathered} \tag{19}$$

где $\widetilde{\widetilde{f}}(x_1) \in C^3(\mathbb{R})$.

Если в качестве функции $f(x_1)$ в равенстве (19) использовать $q_p(x_1), p = 0;1$, тогда получим представления (5), где $\widetilde{\widetilde{q}}_p(x_1) \in C^3(\mathbb{R})$ при $p = 0;1$, а функции $Q_p(x_1), p = 0;1$ будут задаваться равенствами (6).

4. ЗАДАЧА (1), (2), (9), (10)

Перейдем к изучению задачи (1), (2), (9), (10), воспользуемся заменами

$$\begin{gathered} u_p(x) = e^{-0,5k_p x_2} v_p(x),\ p = 1;2, \\ v_2(x_1, x_2) = z(x_1, -x_2), \end{gathered} \tag{20}$$

тогда задача (1), (2), (9), (10) примет вид

$$\Delta v_1(x) - 0{,}25k_1^2 v_1(x) = 0,\ \ x \in \mathbb{R}_+^2, \tag{21}$$

$$\Delta z(x) - 0{,}25k_2^2 z(x) = 0,\ \ x \in \mathbb{R}_+^2, \tag{22}$$

$$v_1(x_1, +0) - z(x_1, +0) = Q_0(x_1),\ \ x_1 \in \mathbb{R}, \tag{23}$$

$$-\frac{k_1}{2} v_1(x_1, +0) + \frac{\partial v_1(x_1, +0)}{\partial x_2} + \frac{k_2}{2} z(x_1, +0) + \frac{\partial z(x_1, +0)}{\partial x_2} = Q_1(x_1),\ \ x_1 \in \mathbb{R}. \tag{24}$$

Легко видеть, что для построения решения задачи (1), (2), (9), (10) достаточно построить решение задачи (21)-(24) и воспользоваться формулами (20).

Введем в рассмотрение функции

$$V_1(x) = \begin{cases} v_1(x), & x_2 > 0, \\ v_1(x_1, -x_2), & x_2 < 0 \end{cases} \text{ и } V_2(x) = \begin{cases} z(x), & x_2 > 0, \\ z(x_1, -x_2), & x_2 < 0, \end{cases} \tag{25}$$

где $(v_1(x), z(x))$ — решение задачи (21)-(24).

Рассмотрим обобщенную задачу о нахождении решений $V_1(x)$ и $V_2(x)$ из $S'\left(\mathbb{R}^2\right)$ уравнений

$$\Delta V_p(x) - 0{,}25k_p^2 V_p(x) = 2\frac{\partial V_p(x_1, +0)}{\partial x_2} \cdot \delta(x_2), p = 1;2, \tag{26}$$

и, подобно тому, как предполагалось в [8], обобщенным решением задачи (1)-(4) назовем решение указанной обобщенной задачи с учетом замен (5), (20) и (25).

Аналогично тому, как рассуждали в [5], можно получить, что представление решения задачи (26) имеет вид

$$V_p(x) = F^{-1}_{s_1, s_2 \to x_1, x_2}\left[2\left(s_1^2 + 0{,}25k_p^2\right)^{0,5}\left(|s|^2 + 0{,}25k_p^2\right)^{-1} W_p^0(s_1)\right], p = 1;2, \tag{27}$$

где функции $W_p^0(s_1)$ при $p = 1;2$ задаются следующими равенствами

$$W_p^0(s_1) = -\frac{\mathrm{P}_1(s_1) + (-1)^p\left(\sqrt{s_1^2 + 0{,}25k_{3-p}^2} + (-1)^p 0{,}5k_{3-p}\right)\mathrm{P}_0(s_1)}{\sqrt{s_1^2 + 0{,}25k_1^2} + 0{,}5k_1 + \sqrt{s_1^2 + 0{,}25k_2^2} - 0{,}5k_2},\ \ p = 1;2, \tag{28}$$

$$\mathrm{P}_p(s_1) = F_{x_1 \to s_1}[Q_p(x_1)],\ \ p = 0;1. \tag{29}$$

5. СВОЙСТВА ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (21)-(24)

Докажем несколько свойств решения задачи (21)-(24). Согласно представлениям (25) и (27), функции $v_1(x)$ и $z(x)$ при $x_2 > 0$ представимы в следующем виде

$$v_1(x) = F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}\left[2\left(s_1^2 + 0{,}25k_1^2\right)^{0,5}\left(|s|^2 + 0{,}25k_1^2\right)^{-1} W_1^0(s_1)\right], \tag{30}$$

$$z(x) = F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}\left[2\left(s_1^2 + 0{,}25k_2^2\right)^{0,5}\left(|s|^2 + 0{,}25k_2^2\right)^{-1} W_2^0(s_1)\right], \tag{31}$$

где функции $W_p^0(s_1)$ при $p = 1; 2$ заданы равенствами (28).

Сформулируем и докажем лемму о принадлежности функций $v_1(x)$ и $z(x)$, заданных равенствами (30) и (31), пространству $L_2\left(\mathbb{R}^2_+\right)$.

Лемма 1. Функции $v_1(x)$ и $z(x)$, заданные равенствами (30) и (31), принадлежат пространству $L_2\left(\mathbb{R}^2_+\right)$ и могут быть изучены при помощи сведения к повторному интегралу.

Доказательство. Доказательство проведем на примере функции $v_1(x)$, для функции $z(x)$ доказательство проводится аналогично.

Функции $Q_p(x_1), p = 0; 1$ строились таким образом, чтобы можно было легко получить их образ Фурье, поэтому, с учетом представлений (29), очевидно, что

$$\begin{gathered}
\mathrm{P}_p(s_1) = q_p(-1)A_1(s_1) + \left(q_p^{'}(-1) + q_p(-1)\right)A_2(s_1) + 0{,}5\left(q_p^{''}(-1) + 2q_p^{'}(-1) +\right.\\
\left.+\, q_p(-1)\right)A_3(s_1) + \frac{1}{6}\left(q_p^{'''}(-1) + 3q_p^{''}(-1) + 3q_p^{'}(-1) + q_p(-1)\right)A_4(s_1) -\\
-q_p(1)A_5(s_1) - \left(q_p^{'}(1) + q_p(1)\right)A_6(s_1) - 0{,}5\left(q_p^{''}(1) + 2q_p^{'}(1) + q_p(1)\right)A_7(s_1) -\\
-\frac{1}{6}\left(q_p^{'''}(1) + 3q_p^{''}(1) + 3q_p^{'}(1) + q_p(1)\right)A_8(s_1),\ p = 0; 1,
\end{gathered} \tag{32}$$

где $A_j(s_1) = F_{x_1\to s_1}\left[e^{-\left(x_1+(-1)^{[m]}\right)}\left(x_1 + (-1)^{[m]}\right)^{-4\{m\}}\Theta\left(x_1 + (-1)^{[m]}\right)\right] = e^{(-1)^{[m]+1}is_1} \times (1 + is_1)^{-4\{m\}-1}$ при $j = \overline{1;8}$ и $m = 0{,}25(j-1)$.

Замечание 2. Функция $\tau_1(x) = [x]$ ставит в соответствие каждому $x \in \mathbb{R}^1$ его целую часть, а функция $\tau_2(x) = \{x\}$ — его дробную часть.

Обозначим $\zeta(s_1, s_2) = 2\left(s_1^2 + 0{,}25k_1^2\right)^{0,5}\left(|s|^2 + 0{,}25k_1^2\right)^{-1} W_1^0(s_1)$, то есть, согласно представлению (30), $v_1(x) = F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}\left[\zeta(s_1, s_2)\right]$ при $x_2 > 0$. Заметим, что функция $\zeta(s_1, s_2)$ принадлежит пространству $L_2\left(\mathbb{R}^2_+\right)$, поэтому ее преобразование Фурье также принадлежит пространству $L_2\left(\mathbb{R}^2_+\right)$. Рассмотрим последовательность функций $\zeta_k(s_1, s_2) = \zeta(s_1, s_2)\eta_k(s_1, s_2)$, принадлежащих пространству $L_2\left(\mathbb{R}^2_+\right) \cap L_1\left(\mathbb{R}^2_+\right)$ (см. [9]), где

$$\eta_k(s_1, s_2) = \begin{cases} 1, & -k \leqslant s_1 \leqslant k, -k \leqslant s_2 \leqslant k;\\ 0, & |s_1| \geqslant k, |s_2| \geqslant k \end{cases} \text{— срезающие функции.}$$

Очевидно, что $\|\zeta - \zeta_k\|_2 \to 0$ при $k \to 0$.

Преобразование Фурье функции $\zeta(s_1, s_2)$ определяется следующим образом $F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}[\zeta(s_1, s_2)] = \lim\limits_{k\to\infty} F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}\left[\zeta_k(s_1, s_2)\right]$, то есть

$$\lim_{k\to\infty}\left\|F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}\left[\zeta(s_1, s_2)\right] - F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}\left[\zeta_k(s_1, s_2)\right]\right\| = 0.$$

Очевидно, что

$$F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}\left[\zeta_k(s_1,s_2)\right] = (2\pi)^{-2}\int\limits_{-k\leqslant s_1\leqslant k,-k\leqslant s_2\leqslant k}\zeta_k(s_1,s_2)e^{-i(x,s)}ds =$$

$$= (2\pi)^{-1}\int\limits_{-k}^{k}\left((2\pi)^{-1}\int\limits_{-k}^{k}\zeta_k(s_1,s_2)e^{-ix_1s_1}ds_1\right)e^{-ix_2s_2}ds_2 = F^{-1}_{s_2\to x_2}\left[F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\zeta_k(s_1,s_2)\right]\right] =$$

$$= (2\pi)^{-1}\int\limits_{-k}^{k}\left((2\pi)^{-1}\int\limits_{-k}^{k}\zeta_k(s_1,s_2)e^{-ix_2s_2}ds_2\right)e^{-ix_1s_1}ds_1 = F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[F^{-1}_{s_2\to x_2}\left[\zeta_k(s_1,s_2)\right]\right].$$

Таким образом, справедливы равенства

$$v_1(x) = F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}\left[\zeta(s_1,s_2)\right] = F^{-1}_{s_2\to x_2}\left[F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\zeta(s_1,s_2)\right]\right] = F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[F^{-1}_{s_2\to x_2}\left[\zeta(s_1,s_2)\right]\right]. \quad (33)$$

Заметим, что $F^{-1}_{s_2\to x_2}\left[2\left(s_1^2+0{,}25k^2\right)^{0,5}\left(|s|^2+0{,}25k^2\right)^{-1}\right] = e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0{,}25k^2}}$ (см. [10]). Следовательно, согласно последнему и равенству (33), получаем, что

$$v_1(x) = F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0{,}25k_1^2}}W_1^0(s_1)\right]. \quad (34)$$

Аналогично можно доказать, что для $z(x)$ справедливо представление $z(x) = F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0{,}25k_2^2}}W_2^0(s_1)\right]$. Лемма доказана.

Замечание 3. Во второй работе цикла, указанной в разделе 1, рассматривалась задача (1), (2), (7), (8) и было доказано, что, с учетом замен вида (20), компонентами ее решения (обозначим их $\widetilde{\widetilde{v}}_1(x)$ и $\widetilde{\widetilde{z}}(x)$) являются функции вида (30) и (31), в которых в представлениях $W_p^0(s_1)$, $p=1;2$, заданных равенствами (28), выражения $\mathrm{P}_p(s_1) = F_{x_1\to s_1}[Q_p(x_1)]$ заменены $P_p(s_1) = F_{x_1\to s_1}[\widetilde{\widetilde{q}}_p(x_1)]$ при $p=0;1$. Действуя так же, как в предыдущей лемме, можно доказать, что эти $\widetilde{\widetilde{v}}_1(x)$ и $\widetilde{\widetilde{z}}(x)$ принадлежат пространству $L_2\left(\mathbb{R}^2_+\right)$. Следовательно, вернувшись обратно к исходной задаче, с помощью замен (5) и (20), получаем, что функция $e^{0,5k_1x_2}u_1(x)$ принадлежит пространству $L_2\left(\mathbb{R}^2_+\right)$, а функция $e^{0,5k_2x_2}u_2(x)$ — пространству $L_2\left(\mathbb{R}^2_-\right)$, где $(u_1(x),u_2(x))$ — решение задачи (1)-(4). Таким образом, доказано первое свойство из теоремы 1.

Понижение требований на граничные функций $Q_p(x_1), p=0;1$ не позволяет доказать выполнение граничных условий (23) и (24) по непрерывности аналогично тому, как это было сделано в первой и второй работах указанного во введении цикла статей, однако, можно доказать, что они выполнены в $L_2\left(\mathbb{R}\right)$. Сформулируем и докажем указанное утверждение в виде леммы, но прежде введем некоторое обозначение.

Пусть I — конечный или бесконечный интервал, а функция $g(x)$ определена на I. Через $O\left(g(x)\right)$ при $x\in I$ будем обозначать всякую функцию $f(x)$, для которой существует положительная константа c такая, что при $x\in I$ выполнена оценка $|f(x)|\leqslant c\,|g(x)|$.

Замечание 4. Легко доказать, что согласно вышеуказанному обозначению, $O\left((1+is_1)^{-1}\right) = O\left((1+|s_1|)^{-1}\right)$ при $s_1\in\mathbb{R}$. Действительно, справедлива следующая цепочка неравенств

$$\left|(1+is_1)^{-1}\right| = \left(1+s_1^2\right)^{-0,5} = \sqrt{2}\left(2(1+s_1^2)\right)^{-0,5} \leqslant \sqrt{2}\left(1+s_1^2+2s_1\right)^{-0,5} = \sqrt{2}(1+|s_1|)^{-1}.$$

Лемма 2. Для функций $v_1(x)$ и $z(x)$, заданных равенствами (30) и (31), справедливы следующие равенства

$$\lim_{x_2 \to +0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (v_1(x) - z(x) - Q_0(x_1))^2 \, dx_1 = 0, \tag{35}$$

$$\lim_{x_2 \to +0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{k_1}{2} v_1(x) + \frac{\partial v_1(x)}{\partial x_2} + \frac{k_2}{2} z(x) + \frac{\partial z(x)}{\partial x_2} - Q_1(x_1) \right)^2 dx_1 = 0. \tag{36}$$

Доказательство. Согласно равенству Парсеваля (см. [11]) и представлениям (29)-(31), левая часть равенства (35) примет вид

$$\lim_{x_2 \to +0} \int_{-\infty}^{+\infty} (v_1(x) - z(x) - Q_0(x_1))^2 \, dx_1 =$$
$$= (2\pi)^{-1} \lim_{x_2 \to +0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| F_{x_1 \to s_1} [v_1(x)] - F_{x_1 \to s_1} [z(x)] - F_{x_1 \to s_1} [Q_0(x_1)] \right|^2 ds_1 =$$
$$= (2\pi)^{-1} \lim_{x_2 \to +0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| e^{-x_2 \sqrt{s_1^2 + 0{,}25 k_1^2}} W_1^0(s_1) - e^{-x_2 \sqrt{s_1^2 + 0{,}25 k_2^2}} W_2^0(s_1) - \mathrm{P}_0(s_1) \right|^2 ds_1.$$

Применив равенство Парсеваля (см. [11]) также к равенству (36), получаем, что доказательство равенств (35) и (36) равносильно доказательству равенств

$$\lim_{x_2 \to +0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |J_p(s_1, x_2)|^2 \, ds_1 = 0, p = 1; 2, \tag{37}$$

где $J_1(s_1, x_2)$ и $J_2(s_1, x_2)$ имеют вид

$$J_1(s_1, x_2) = e^{-x_2 \sqrt{s_1^2 + 0{,}25 k_1^2}} W_1^0(s_1) - e^{-x_2 \sqrt{s_1^2 + 0{,}25 k_2^2}} W_2^0(s_1) - \mathrm{P}_0(s_1),$$

$$J_2(s_1, x_2) = -\left(\sqrt{s_1^2 + 0{,}25 k_1^2} + 0{,}5 k_1 \right) \cdot \exp(-x_2 \sqrt{s_1^2 + 0{,}25 k_1^2}) \cdot W_1^0(s_1) -$$
$$- \left(\sqrt{s_1^2 + 0{,}25 k_2^2} - 0{,}5 k_2 \right) \cdot \exp(-x_2 \sqrt{s_1^2 + 0{,}25 k_2^2}) \cdot W_2^0(s_1) - \mathrm{P}_1(s_1).$$

Заметим, что при $p = 1; 2$

$$\sqrt{s_1^2 + 0{,}25 k_p^2} = 0{,}25 k_p^2 \left(\sqrt{s_1^2 + 0{,}25 k_p^2} + |s_1| \right)^{-1} + |s_1| . \tag{38}$$

С учетом представлений (38), получаем, что $e^{-x_2 \sqrt{s_1^2 + 0{,}25 k_p^2}}$, $p = 1; 2$ можно представить в виде

$$e^{-x_2 \sqrt{s_1^2 + 0{,}25 k_p^2}} = e^{-x_2 |s_1|} \cdot e^{-0{,}25 x_2 k_p^2 \left(\sqrt{s_1^2 + 0{,}25 k_p^2} + |s_1| \right)^{-1}}, p = 1; 2. \tag{39}$$

Легко видеть, что $e^{-0{,}25 x_2 k_p^2 \left(\sqrt{s_1^2 + 0{,}25 k_p^2} + |s_1| \right)^{-1}} = 1 + O\left(x_2 \left(1 + |s_1| \right)^{-1} \right)$, где $p = 1; 2$, согласно формуле Тейлора. Тогда из представлений (39) и последних равенств получаем, что

$$e^{-x_2 \sqrt{s_1^2 + 0{,}25 k_p^2}} = e^{-x_2 |s_1|} + e^{-x_2 |s_1|} O \left(x_2 (1 + |s_1|)^{-1} \right), \text{ где } p = 1; 2. \tag{40}$$

С учетом представлений (28) и (40), $J_1(s_1, x_2)$ и $J_2(s_1, x_2)$ примут вид

$$J_1(s_1, x_2) = \left(W_1^0(s_1) - W_2^0(s_1) \right) \left(e^{-x_2 |s_1|} + e^{-x_2 |s_1|} O \left(x_2 (1 + |s_1|)^{-1} \right) \right) - \mathrm{P}_0(s_1) =$$
$$= \left(e^{-x_2 |s_1|} - 1 + e^{-x_2 |s_1|} O \left(x_2 (1 + |s_1|)^{-1} \right) \right) \mathrm{P}_0(s_1),$$

$$J_2(s_1, x_2) = -\left(\left(\sqrt{s_1^2 + 0{,}25 k_1^2} + 0{,}5 k_1 \right) W_1^0(s_1) + \left(\sqrt{s_1^2 + 0{,}25 k_2^2} - 0{,}5 k_2 \right) W_2^0(s_1) \right) \left(e^{-x_2 |s_1|} + \right.$$
$$\left. + e^{-x_2 |s_1|} O \left(x_2 (1 + |s_1|)^{-1} \right) \right) - \mathrm{P}_1(s_1) = \left(e^{-x_2 |s_1|} - 1 + e^{-x_2 |s_1|} O \left(x_2 (1 + |s_1|)^{-1} \right) \right) \mathrm{P}_1(s_1),$$

то есть $J_{p+1}(s_1,x_2)=\left(e^{-x_2|s_1|}-1+e^{-x_2|s_1|}O\left(x_2(1+|s_1|)^{-1}\right)\right)\mathrm{P}_p(s_1)$, где $p=0;1$.

Перейдем к оценкам $|J_{p+1}(s_1,x_2)|$, $p=0;1$. Согласно последним представлениям, справедливы следующие цепочки неравенств

$$\begin{gathered}|J_{p+1}(s_1,x_2)|=\left|\left(e^{-x_2|s_1|}-1+e^{-x_2|s_1|}O\left(x_2(1+|s_1|)^{-1}\right)\right)\mathrm{P}_p(s_1)\right|\leqslant\\ \leqslant\left(\left|e^{-x_2|s_1|}-1\right|+\left|O\left(x_2(1+|s_1|)^{-1}\right)\right|\right)|\mathrm{P}_p(s_1)|\,,\ \text{где p=0;1}\ .\end{gathered}\tag{41}$$

Оценим $\left|e^{-x_2|s_1|}-1\right|$ при $x_2\to+0$. Заметим, что справедливо равенство $e^{-x_2|s_1|}-1=-x_2\,|s_1|\int_0^1 e^{-x_2|s_1|\xi}d\xi$, тогда $\left|e^{-x_2|s_1|}-1\right|^\varepsilon\leqslant x_2^\varepsilon\,|s_1|^\varepsilon$ при некотором положительном ε. Следовательно, справедлива следующая оценка

$$\left|e^{-x_2|s_1|}-1\right|=\left|e^{-x_2|s_1|}-1\right|^\varepsilon\left|e^{-x_2|s_1|}-1\right|^{1-\varepsilon}\leqslant x_2^\varepsilon\,|s_1|^\varepsilon\left(e^{-x_2|s_1|}+1\right)^{1-\varepsilon}\leqslant 2^{1-\varepsilon}x_2^\varepsilon\,|s_1|^\varepsilon\,.\tag{42}$$

С учетом оценки (42), неравенства (41) можно продолжить следующим образом: $|J_{p+1}(s_1,x_2)|\leqslant\left(2^{1-\varepsilon}x_2^\varepsilon\,|s_1|^\varepsilon+\left|O\left(x_2(1+|s_1|)^{-1}\right)\right|\right)|\mathrm{P}_p(s_1)|$, где $p=0;1$. Легко заметить, что $2^{1-\varepsilon}x_2^\varepsilon\,|s_1|^\varepsilon+\left|O\left(x_2(1+|s_1|)^{-1}\right)\right|=|O\left(x_2^\varepsilon(1+|s_1|)^\varepsilon\right)|$, следовательно, для $|J_{p+1}(s_1,x_2)|$, где $p=0;1$, справедливы неравенства

$$|J_{p+1}(s_1,x_2)|\leqslant|O\left(x_2^\varepsilon(1+|s_1|)^\varepsilon\right)|\,|\mathrm{P}_p(s_1)|\,,p=0;1.\tag{43}$$

Согласно представлениям (32) для функций $\mathrm{P}_p(s_1)$, где $p=0;1$, и замечанию 4, справедливы следующие представления

$$\mathrm{P}_p(s_1)=O\left((1+|s_1|)^{-1}\right),p=0;1.\tag{44}$$

Из (43) и (44) получаем, что справедливы следующие оценки

$$|J_p(s_1,x_2)|\leqslant\left|O\left(x_2^\varepsilon(1+|s_1|)^{\varepsilon-1}\right)\right|,p=1;2.\tag{45}$$

Таким образом, воспользовавшись оценками (45) и определением $O\left(x_2^\varepsilon(1+|s_1|)^{\varepsilon-1}\right)$, получаем, что

$$|J_p(s_1,x_2)|\leqslant c\left|x_2^\varepsilon(1+|s_1|)^{\varepsilon-1}\right|=cx_2^\varepsilon(1+|s_1|)^{\varepsilon-1},p=1;2,\tag{46}$$

где c — некоторая положительная константа. В последних оценках будем считать, что $\varepsilon<0{,}5$. Согласно неравенствам (46) получаем, что

$$\lim_{x_2\to+0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|J_p(s_1,x_2)|^2\,ds_1\leqslant c^2\lim_{x_2\to+0}x_2^{2\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(1+|s_1|)^{2\varepsilon-2}\,ds_1.$$

Заметим, что степень s_1 последнего подынтегрального выражения меньше -1, тогда $\lim\limits_{x_2\to+0}x_2^{2\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty}(1+|s_1|)^{2\varepsilon-2}=0$, согласно теореме Лебега о мажорируемой сходимости (см. [8]), а из этого следует справедливость равенств (37). Лемма доказана.

Замечание 5. Для функций $\widetilde{\widetilde{v}}_1(x)$ и $\widetilde{\widetilde{z}}(x)$ (см. замечание 3) справедливы равенства (35) и (36) с точностью до замены $v_1(x)$ на $\widetilde{\widetilde{v}}_1(x)$, $z(x)$ на $\widetilde{\widetilde{z}}(x)$, $Q_p(x_1)$ на $\widetilde{\widetilde{q}}_p(x_1)$ при $p=0;1$. Таким образом, применив равенства (5) и (20), получаем, что компоненты вектор-функции $(u_1(x),u_2(x))$, являющейся решением задачи (1)-(4), удовлетворяют равенствам теоремы 1. С учетом замечания 3, теорема 1 полностью доказана.

6. ВЫДЕЛЕНИЕ СИНГУЛЯРНЫХ КОМПОНЕНТ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (21)-(24) И ЕГО ПЕРВЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Воспользовавшись представлениями (25), (28), (32) и видом функций $v_1(x)$ и $z(x)$, полученными в лемме 1, выражения $V_p(x)$, $\dfrac{\partial V_p(x)}{\partial x_1}$ и $\dfrac{\partial V_p(x)}{\partial x_2}$, где $p = 1;2$, при $x_2 > 0$ примут вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial^\alpha V_p(x)}{\partial x_j^\alpha} = -q_1(-1)S^{(p)}_{1,\beta}(x) - \left(q_1'(-1) + q_1(-1)\right) S^{(p)}_{2,\beta}(x) - 0{,}5\left(q_1''(-1)+\right.\\ \left.+\,2q_1'(-1) + q_1(-1)\right) S^{(p)}_{3,\beta}(x) - \frac{1}{6}\left(q_1'''(-1) + 3q_1''(-1) + 3q_1'(-1) + q_1(-1)\right) S^{(p)}_{4,\beta}(x)+\\ +q_1(1)S^{(p)}_{5,\beta}(x) + \left(q_1'(1) + q_1(1)\right) S^{(p)}_{6,\beta}(x) + 0{,}5\left(q_1''(1) + 2q_1'(1) + q_1(1)\right) S^{(p)}_{7,\beta}(x)+\\ +\frac{1}{6}\left(q_1'''(1) + 3q_1''(1) + 3q_1'(1) + q_1(1)\right) S^{(p)}_{8,\beta}(x) - q_0(-1)S^{(p)}_{9,\beta}(s_1) - \left(q_0'(-1)+\right.\\ \left.+\,q_0(-1)\right) S^{(p)}_{10,\beta}(x) - 0{,}5\left(q_0''(-1) + 2q_0'(-1) + q_0(-1)\right) S^{(p)}_{11,\beta}(x) - \frac{1}{6}\left(q_0'''(-1)+\right.\\ \left.+3q_0''(-1) + 3q_0'(-1) + q_0(-1)\right) S^{(p)}_{12,\beta}(x) + q_0(1)S^{(p)}_{13,\beta}(x) + \left(q_0'(1) + q_0(1)\right) S^{(p)}_{14,\beta}(x)+\\ +0{,}5\left(q_0''(1) + 2q_0'(1) + q_0(1)\right) S^{(p)}_{15,\beta}(x) + \frac{1}{6}\left(q_0'''(1) + 3q_0''(1) + 3q_0'(1) + q_0(1)\right) S^{(p)}_{16,\beta}(x),\end{gathered}\tag{47}$$

где $p, j = 1;2$, $\alpha = 0;1$, $\beta = [0{,}5(3\alpha + j + 1)]$,

$$S^{(p)}_{\gamma,\beta}(x) = F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\frac{A_{8\{m\}+1}(s_1)}{e^{x_2\sqrt{s_1^2+\frac{k_p^2}{4}}}}\cdot\frac{(-1)^{p[m]+\alpha}\left(s_1^2+\dfrac{k_p^2}{4}\right)^{0,5(j-1)}\left(\sqrt{s_1^2+\dfrac{k_{3-p}^2}{4}}+(-1)^p\dfrac{k_{3-p}}{2}\right)^{[m]}}{(is_1)^{\alpha(j-2)}\left(\sqrt{s_1^2+\dfrac{k_1^2}{4}}+\dfrac{k_1}{2}+\sqrt{s_1^2+\dfrac{k_2^2}{4}}-\dfrac{k_2}{2}\right)}\right]$$

при $p, j = 1;2$, $\gamma = \overline{1;16}$, $\alpha = 0;1$, $\beta = [0{,}5(3\alpha + j + 1)]$ и $m = 0{,}125(\gamma - 1)$.

Замечание 6. В выражениях $S^{(p)}_{\gamma,\beta}(x)$, где $p, j = 1;2$, $\gamma = \overline{1;16}$, $m = 0{,}125(\gamma - 1)$ и $\beta = [0{,}5(3\alpha + j + 1)]$, преобразование Фурье определяется следующим образом:

$$S^{(p)}_{\gamma,\beta}(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^{p[m]+\alpha}A_{8\{m\}+1}(s_1)\left(s_1^2+\dfrac{k_p^2}{4}\right)^{0,5(j-1)}\left(\sqrt{s_1^2+\dfrac{k_{3-p}^2}{4}}+(-1)^p\dfrac{k_{3-p}}{2}\right)^{[m]}ds_1}{(is_1)^{\alpha(j-2)}e^{ix_1s_1+x_2\sqrt{s_1^2+\frac{k_p^2}{4}}}\left(\sqrt{s_1^2+\dfrac{k_1^2}{4}}+\dfrac{k_1}{2}+\sqrt{s_1^2+\dfrac{k_2^2}{4}}-\dfrac{k_2}{2}\right)}.$$

Рассмотрим отдельно все слагаемые (47) и выясним, какие из них дают сингулярный вклад в асимптотики $V_p(x)$, $\dfrac{\partial V_p(x)}{\partial x_1}$ и $\dfrac{\partial V_p(x)}{\partial x_2}$, где $p = 1;2$, при $x_2 > 0$.

Замечание 7. Справедливы следующие асимптотические разложения при $|s_1| \to +\infty$ и $x_2 \to +\infty$:

$$\left(\sqrt{s_1^2+0{,}25k_1^2}+0{,}5k_1+\sqrt{s_1^2+0{,}25k_2^2}-0{,}5k_2\right)^{-1} = 0{,}5(1+|s_1|)^{-1} + O\left(1+|s_1|\right)^{-2},$$

$$\begin{gathered}\left(\sqrt{s_1^2+0{,}25k_{3-p}^2}+(-1)^p 0{,}5k_{3-p}\right)\left(\sqrt{s_1^2+0{,}25k_1^2}+0{,}5k_1+\sqrt{s_1^2+0{,}25k_2^2}-0{,}5k_2\right)^{-1} =\\ = 0{,}5 + 0{,}125(-1)^{p+1}(k_1+k_2)\left(1+|s_1|\right)^{-1} + O\left((1+|s_1|)^{-2}\right),\end{gathered}$$

$$e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0{,}25k_p^2}} = e^{-x_2|s_1|} - 0{,}125x_2e^{-x_2|s_1|}k_p^2(1+|s_1|)^{-1} + e^{-x_2|s_1|}O\left(x_2(1+|s_1|)^{-2}\right).$$

В указанных разложениях $p = 1;2$.

Докажем несколько вспомогательных лемм.

Лемма 3. Пусть $x_2 > 0$, $|s_1| \to +\infty$ и

$$\Lambda_p^n(x) = F^{-1}_{s_1 \to x_1}\left[\frac{e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}e^{(-1)^n is_1}}{1+is_1}\right] = (2\pi)^{-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ix_1s_1}e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}e^{(-1)^n is_1}}{1+is_1}ds_1,$$

где $n,p = 1;2$, тогда функции $\Lambda_p^n(x)$ непрерывны и равномерно ограничены на любом компакте $K \subset \overline{\mathbb{R}^2_+}$ при $n,p = 1;2$.

Доказательство. С учетом (40), выражения $\Lambda_p^n(x)$, где $n,p = 1;2$, примут вид

$$\Lambda_p^n(x) = (2\pi)^{-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_1s_1}e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k_p^2}}e^{(-1)^n is_1}(1+is_1)^{-1}ds_1 =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ix_1s_1}e^{-x_2|s_1|}e^{(-1)^n is_1}}{1+is_1}ds_1 + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ix_1s_1}e^{-x_2|s_1|}e^{(-1)^n is_1}}{1+is_1}O\left(\frac{x_2}{1+|s_1|}\right)ds_1. \quad (48)$$

Сначала рассмотрим второе слагаемое в правой части (48), оценим его

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ix_1s_1}e^{-x_2|s_1|}e^{(-1)^n is_1}}{1+is_1}O\left(\frac{x_2}{1+|s_1|}\right)ds_1\right| \leqslant cx_2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(1+|s_1|)^{-2}\,ds_1 \leqslant c_1x_2.$$

Остается рассмотреть лишь первое слагаемое представлений (48)

$$(2\pi)^{-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_1s_1}e^{-x_2|s_1|}e^{(-1)^n is_1}(1+is_1)^{-1}ds_1 = (2\pi)^{-1}\left(I_1(x)+I_2(x)\right), \quad (49)$$

где $I_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{-0}\frac{e^{-\left(-x_2+i\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)\right)s_1}}{1+is_1}ds_1$, $I_2(x) = \int\limits_{+0}^{+\infty}\frac{e^{-\left(x_2+i\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)\right)s_1}}{1+is_1}ds_1$.

Вычислим отдельно каждый интеграл из правой части (49), начнем с $I_2(x)$. Обозначим $r = \sqrt{\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)^2+x_2^2}$; $\cos\varphi = r^{-1}\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)$; $\sin\varphi = r^{-1}x_2$; $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \geqslant 0$; $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, тогда интеграл $I_2(x)$ можно переписать в виде

$$I_2(x) = \int\limits_{+0}^{+\infty}\frac{e^{-\left(x_2+i\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)\right)s_1}}{1+is_1}ds_1 = \int\limits_{+0}^{+\infty}e^{-(\sin\varphi+i\cos\varphi)rs_1}(r+irs_1)^{-1}d\left(rs_1\right).$$

Введем в рассмотрение функции $r_1(\xi), r_2(\xi) \in C^\infty([0;\infty))$ такие, что $r_1(\xi)+r_2(\xi) \equiv 1$; $r_1(\xi) = 1$ при $\xi \in [0;\delta]$, $r_2(\xi) = 1$ при $\xi \in [2\delta;\infty)$, $0 \leqslant r_1(\xi), r_2(\xi) \leqslant 1$.

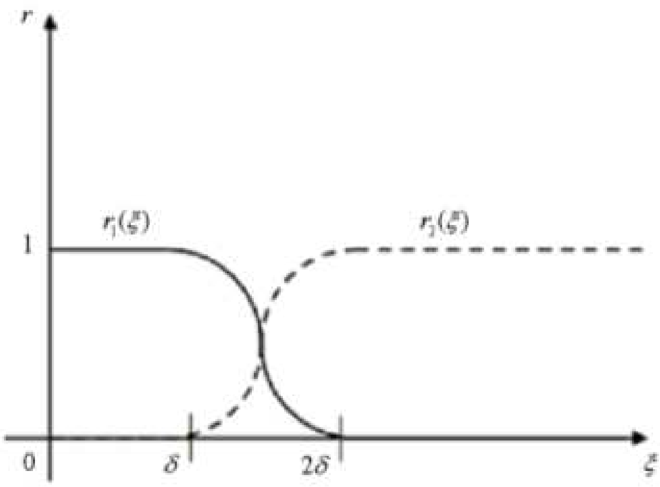

Рис. 1. Вид срезающих функций $r_1(\xi)$ и $r_2(\xi)$

Сделаем замены $\xi = rs_1$ и $1 = r_1(\xi) + r_2(\xi)$, тогда интеграл $I_2(x)$ примет вид

$$I_2(x) = \int\limits_{+0}^{+\infty} (r_1(\xi) + r_2(\xi))\, e^{-(\sin\varphi + i\cos\varphi)\xi}(r + i\xi)^{-1} d\xi = I_2^1(x) + I_2^2(x),$$

где $I_2^j = \int_{+0}^{+\infty} r_j(\xi) e^{-(\sin\varphi + i\cos\varphi)\xi}(r + i\xi)^{-1} d\xi$, $j = 1; 2$.

С учетом вида функции $r_2(\xi)$ и при помощи интергирования по частям, получим, что интеграл I_2^2 примет вид

$$\begin{gathered} I_2^2 = \int_{+0}^{+\infty} r_2(\xi) e^{-(\sin\varphi + i\cos\varphi)\xi}(r + i\xi)^{-1} d\xi = \int_{\delta}^{+\infty} r_2(\xi) e^{-(\sin\varphi + i\cos\varphi)\xi}(r + i\xi)^{-1} d\xi = \\ = -\Big(e^{-(\sin\varphi + i\cos\varphi)\xi} r_2(\xi)(r + i\xi)^{-1}\Big|_{\delta}^{+\infty} - \int_{\delta}^{+\infty} r_2'(\xi) e^{-(\sin\varphi + i\cos\varphi)\xi}(r + i\xi)^{-1} d\xi + \\ + i\int_{\delta}^{+\infty} r_2(\xi) e^{-(\sin\varphi + i\cos\varphi)\xi}(r + i\xi)^{-2} d\xi\Big) (\sin\varphi + i\cos\varphi)^{-1} = I_2^{2,1} - I_2^{2,2}, \end{gathered}$$

где (с учетом $r_2'(\xi) = 0$ при $\xi > 2\delta$)

$$\begin{gathered} I_2^{2,1} = (\sin\varphi + i\cos\varphi)^{-1} \int_{\delta}^{2\delta} r_2'(\xi) e^{-(\sin\varphi + i\cos\varphi)\xi}(r + i\xi)^{-1} d\xi, \\ I_2^{2,2} = i\,(\sin\varphi + i\cos\varphi)^{-1} \int_{\delta}^{+\infty} r_2(\xi) e^{-(\sin\varphi + i\cos\varphi)\xi}(r + i\xi)^{-2} d\xi. \end{gathered}$$

Оценим $\left|I_2^{2,1}\right|$ и $\left|I_2^{2,2}\right|$. Так как $\varphi \in [0; \pi]$, $\sin\varphi \geqslant 0$, $r_2(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R})$, $|r_2(\xi)| \leqslant C$ и $|\sin\varphi + i\cos\varphi| = 1$, то получаем следующие цепочки неравенств

$$\begin{gathered} \left|I_2^{2,1}\right| = \left|\int_{\delta}^{2\delta} r_2'(\xi) e^{-(\sin\varphi + i\cos\varphi)\xi}(r + i\xi)^{-1} d\xi\right| \leqslant \int_{\delta}^{2\delta} \left|r_2'(\xi)\right| e^{-\sin\varphi\xi} \left|(r + i\xi)^{-1}\right| d\xi \leqslant \\ \leqslant C\int_{\delta}^{2\delta} \left(r^2 + \xi^2\right)^{-0,5} d\xi \leqslant C\int_{\delta}^{2\delta} \xi^{-1} d\xi = C\ln 2. \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \left|I_2^{2,2}\right| = \left|i\,(\sin\varphi + i\cos\varphi)^{-1} \int_{\delta}^{+\infty} r_2(\xi) e^{-(\sin\varphi + i\cos\varphi)\xi}(r + i\xi)^{-2} d\xi\right| \leqslant \\ \leqslant \int_{\delta}^{+\infty} |r_2(\xi)| \cdot \left|(r + i\xi)^{-2}\right| d\xi \leqslant C\int_{\delta}^{+\infty} (r^2 + \xi^2)^{-1} d\xi \leqslant C\int_{\delta}^{+\infty} \xi^{-2} d\xi = C\delta^{-1}. \end{gathered}$$

Таким образом, $I_2^{2,1}(x)$ и $I_2^{2,2}(x)$ — непрерывные и равномерно по $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \geqslant 0$ ограниченные функции, следовательно, $I_2^2(x)$ — также непрерывная и равномерно по $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \geqslant 0$ ограниченная функция.

Перейдем к I_2^1. Учитывая вид функции $r_1(\xi)$, получим

$$I_2^1 = \int\limits_{+0}^{+\infty} \frac{r_1(\xi)e^{-(\sin\varphi + i\cos\varphi)\xi}}{r+i\xi}d\xi = \int\limits_{+0}^{2\delta} \frac{r_1(\xi)e^{-(\sin\varphi + i\cos\varphi)\xi}}{r+i\xi}d\xi = I_2^{1,0} + I_2^{1,1},$$

где $I_2^{1,0} = \int\limits_{+0}^{\delta} e^{-(\sin\varphi + i\cos\varphi)\xi}(r+i\xi)^{-1}d\xi$, $I_2^{1,1} = \int\limits_{\delta}^{2\delta} r_1(\xi)e^{(\sin\varphi + i\cos\varphi)\xi}(r+i\xi)^{-1}d\xi$.

Оценим интеграл $I_2^{1,1}$. Из представления функции $r_1(\xi)$ легко видеть, что $|r_1(\xi)| \leqslant C$, $\delta \leqslant \xi \leqslant 2\delta$, тогда $\left|I_2^{1,1}\right| \leqslant C\int\limits_{\delta}^{2\delta}(r^2+\xi^2)^{-0,5}d\xi \leqslant C\int\limits_{\delta}^{2\delta}\xi^{-1}d\xi = C\ln 2$. Данная оценка свидетельствует о том, что функция $I_2^{1,1}(x)$ непрерывна и равномерно по $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \geqslant 0$ ограничена.

Перейдем к оценке интеграла $I_2^{1,0}$. Отметим, что

$$e^{-(\sin\varphi + i\cos\varphi)\xi} = 1 - (\sin\varphi + i\cos\varphi)\,\xi\int\limits_0^1 e^{-(\sin\varphi + i\cos\varphi)\xi z}dz. \tag{50}$$

Обозначим $f(\xi,\varphi) = -(\sin\varphi + i\cos\varphi)\,\xi\int\limits_0^1 e^{-(\sin\varphi + i\cos\varphi)\xi z}dz$. Так как $\varphi \in [0;\pi]$, то $\sin\varphi \geqslant 0$, следовательно, справедлива оценка: $|f(\xi,\varphi)| = \xi\int\limits_0^1 e^{-\sin\varphi\xi z}dz \leqslant \xi\int\limits_0^1 dz = \xi$.

С помощью тождества (50) интеграл $I_2^{1,0}$ запишем в виде: $I_2^{1,0} = G_1 + G_2$, где $G_1 = \int\limits_{+0}^{\delta}(r+i\xi)^{-1}d\xi$, $G_2 = \int\limits_{+0}^{\delta} f(\xi,\varphi)(r+i\xi)^{-1}d\xi$.

Воспользовавшись полученной оценкой $f(\xi,\varphi)$, оценим G_2

$$|G_2| \leqslant \int\limits_{+0}^{\delta}|f(\xi,\varphi)|\,(r^2+\xi^2)^{-0,5}d\xi \leqslant \int\limits_{+0}^{\delta}\xi(r^2+\xi^2)^{-0,5}d\xi \leqslant \int\limits_{+0}^{\delta}1\cdot d\xi = \delta.$$

Таким образом, функция $G_2(x)$ непрерывна и равномерно по $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \geqslant 0$ ограничена. Перейдем к $G_1 = \int\limits_{+0}^{\delta}(r+i\xi)^{-1}d\xi = \int\limits_{+0}^{\delta}(r-i\xi)(r^2+\xi^2)^{-1}d\xi = G_1^0 + G_1^1$, где $G_1^0 = r\int\limits_{+0}^{\delta}(r^2+\xi^2)^{-1}d\xi = \operatorname{arctg}(r^{-1}\delta)$, $G_1^1 = -i\int_{+0}^{\delta}\xi(r^2+\xi^2)^{-1}d\xi$. Так как $G_1^0 = \operatorname{arctg}(r^{-1}\delta) \in [-0,5\pi; 0,5\pi]$, то функция $G_1^0(x)$ непрерывна и равномерно по $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \geqslant 0$ ограничена. Наконец, перейдем к G_1^1 и сделаем замену $y = \xi^2$, тогда

$$G_1^1 = -i\int\limits_{+0}^{\delta}\xi(r^2+\xi^2)^{-1}d\xi = -0,5i\int\limits_{+0}^{\delta^2}(r^2+y)^{-1}dy = 0,5i\ln r^2 - 0,5i\ln\left(r^2+\delta^2\right).$$

Функция $-0{,}5i\ln\left(r^2+\delta^2\right)$ непрерывна по $r=\sqrt{\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)^2+x_2^2}$ и равномерно ограничена на любом компакте $K\subset\overline{\mathbb{R}^2_+}$. Выражение $0{,}5i\ln r^2$ можно записать в виде $i\ln r$.

Вернемся к интегралу $I_2(x)$. Из полученных выше результатов следует, что

$$I_2(x)=i\ln\sqrt{\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)^2+x_2^2}+h^n_{1,p}(x), \tag{51}$$

где функции $h^n_{1,p}(x)$, $n,p=1;2$ непрерывны и равномерно ограничены на любом компакте $K\subset\overline{\mathbb{R}^2_+}$.

Действуя так же, как и при рассмотрении интеграла $I_2(x)$, можно получить, что интеграл $I_1(x)$ представим в виде

$$I_1(x)=-i\ln\sqrt{\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)^2+x_2^2}+h^n_{2,p}(x), \tag{52}$$

где функции $h^n_{2,p}(x)$, $n,p=1;2$ непрерывны и равномерно ограничены на любом компакте $K\subset\overline{\mathbb{R}^2_+}$.

Вернемся к равенству (49), с учетом представлений (51) и (52). При суммировании $I_1(x)$ и $I_2(x)$ выражение вида $\pm i\ln\sqrt{\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)^2+x_2^2}$ исчезает. Следовательно, $\Lambda^n_p(x)=H^n_p(x)$ при $n,p=1;2$, где функции $H^n_p(x)$ непрерывны и равномерно ограничены на любом компакте $K\subset\overline{\mathbb{R}^2_+}$. Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть $x_2>0$ и при $n,p,\tau=1;2$ введем обозначения:

$$J^*_\tau(x)=\int\limits_{+0}^{+\infty}e^{(-1)^{\tau+1}((-1)^\tau x_2+i(x_1-(-1)^n))s_1}(1+s_1)^{-1}ds_1,$$

$$D^{n,1}_p(x)=F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\frac{e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0{,}25k_p^2}}\left(\sqrt{s_1^2+0{,}25k^2_{3-p}}+(-1)^p0{,}5k_{3-p}\right)}{\sqrt{s_1^2+0{,}25k_1^2}+0{,}5k_1+\sqrt{s_1^2+0{,}25k_2^2}-0{,}5k_2}\cdot\frac{e^{(-1)^nis_1}}{1+is_1}\right],$$

$$\Psi^{n,1}_p(x)=F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\frac{e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0{,}25k_p^2}}(-is_1)}{\sqrt{s_1^2+0{,}25k_1^2}+0{,}5k_1+\sqrt{s_1^2+0{,}25k_2^2}-0{,}5k_2}\cdot\frac{e^{(-1)^nis_1}}{1+is_1}\right],$$

$$\Sigma^n_p(x)=F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\frac{e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0{,}25k_p^2}}e^{(-1)^nis_1}\left(\sqrt{s_1^2+0{,}25k^2_{3-p}}+(-1)^p0{,}5k_{3-p}\right)}{\sqrt{s_1^2+0{,}25k_1^2}+0{,}5k_1+\sqrt{s_1^2+0{,}25k_2^2}-0{,}5k_2}\right],$$

$$\Phi^{n,\tau}_p(x)=F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\frac{e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0{,}25k_p^2}}e^{(-1)^nis_1}(-is_1)\left(\sqrt{s_1^2+0{,}25k^2_{3-p}}+(-1)^p0{,}5k_{3-p}\right)}{\left(\sqrt{s_1^2+0{,}25k_1^2}+0{,}5k_1+\sqrt{s_1^2+0{,}25k_2^2}-0{,}5k_2\right)(1+is_1)^\tau}\right],$$

$$T^{n,\tau}_p(x)=F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\frac{-e^{-x_2\sqrt{s_1^2+k_p^2/4}}\sqrt{s_1^2+k_p^2/4}\left(\sqrt{s_1^2+k^2_{3-p}/4}+(-1)^pk_{3-p}/2\right)}{\sqrt{s_1^2+k_1^2/4}+k_1/2+\sqrt{s_1^2+k_2^2/4}-k_2/2}\cdot\frac{e^{(-1)^nis_1}}{(1+is_1)^\tau}\right],$$

$$N^{n,1}_p(x)=F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\frac{-e^{-x_2\sqrt{s_1^2+k_p^2/4}}\sqrt{s_1^2+0{,}25k_p^2}}{\sqrt{s_1^2+0{,}25k_1^2}+0{,}5k_1+\sqrt{s_1^2+0{,}25k_2^2}-0{,}5k_2}\cdot\frac{e^{(-1)^nis_1}}{1+is_1}\right].$$

Тогда при $|s_1|\to+\infty$ справедливы следующие асимптотические разложения:

$$J^*_\tau(x)=-\ln\sqrt{\left(x_1+(-1)^{n+1}\right)^2+x_2^2}+Jh^*_\tau(x), D^{n,1}_p(x)=Dh^{n,1}_p(x),$$

$$\Psi_p^{n,1}(x) = (2\pi)^{-1} \ln \sqrt{(x_1 + (-1)^{n+1})^2 + x_2^2} + \Psi h_p^{n,1}(x),$$

$$\Sigma_p^n(x) = \frac{x_2}{2\pi\left((x_1 - (-1)^n)^2 + x_2^2\right)} + (-1)^p \frac{k_1 + k_2}{8\pi} \ln \sqrt{(x_1 + (-1)^{n+1})^2 + x_2^2} + \Sigma h_p^n(x),$$

$$\Phi_p^{n,1}(x) = \frac{-x_2}{2\pi\left((x_1 - (-1)^n)^2 + x_2^2\right)} + (-1)^{p+1} \frac{k_1 + k_2}{8\pi} \ln \sqrt{(x_1 + (-1)^{n+1})^2 + x_2^2} + \Phi h_p^{n,1}(x),$$

$$\Phi_p^{n,2}(x) = \Phi h_p^{n,2}(x),$$

$$T_p^{n,1}(x) = \frac{x_1 + (-1)^{n+1}}{2\pi\left((x_1 + (-1)^{n+1})^2 + x_2^2\right)} + \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(x_1 + (-1)^{n+1})^2 + x_2^2} + iTh_p^{n,1}(x),$$

$$T_p^{n,2}(x) = -(2\pi)^{-1} \ln \sqrt{(x_1 + (-1)^{n+1})^2 + x_2^2} + Th_p^{n,2}(x), N_p^{n,1}(x) = Nh_p^{n,1}(x),$$

где $n, p, \tau = 1; 2$ и функции $Jh_\tau^*(x)$, $Dh_p^{n,1}(x)$, $\Psi h_p^{n,1}(x)$, $\Sigma h_p^n(x)$, $\Phi h_p^{n,\tau}(x)$, $Th_p^{n,\tau}(x)$, $Nh_p^{n,1}(x)$ непрерывны и равномерно ограничены на любом компакте $K \subset \overline{\mathbb{R}_+^2}$ при $n, p, \tau = 1; 2$.

Доказательство. Справедливость всех указанных асимптотических разложений доказывается аналогично. Необходимо использовать лемму 3, теорему Лебега о мажорируемой сходимости (см. [8]) и разложения из замечания 7. Приведем для примера доказательство разложений $D_p^{n,1}(x)$, где $n, p = 1; 2$.

В формулировке леммы преобразование Фурье определяется аналогично замечанию 6, то есть функции $D_p^{n,1}(x)$, где $n, p = 1; 2$, имеют вид

$$D_p^{n,1}(x) = F_{s_1 \to x_1}^{-1} \left[\frac{e^{-x_2\sqrt{s_1^2 + 0{,}25k_p^2}} \left(\sqrt{s_1^2 + 0{,}25k_{3-p}^2} + (-1)^p 0{,}5k_{3-p}\right)}{\sqrt{s_1^2 + 0{,}25k_1^2} + 0{,}5k_1 + \sqrt{s_1^2 + 0{,}25k_2^2} - 0{,}5k_2} \cdot \frac{e^{(-1)^n i s_1}}{1 + i s_1} \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_1 s_1} \frac{e^{-x_2\sqrt{s_1^2 + 0{,}25k_p^2}} e^{(-1)^n i s_1}}{1 + i s_1} \cdot \frac{\left(\sqrt{s_1^2 + 0{,}25k_{3-p}^2} + (-1)^p 0{,}5k_{3-p}\right) ds_1}{\sqrt{s_1^2 + 0{,}25k_1^2} + 0{,}5k_1 + \sqrt{s_1^2 + 0{,}25k_2^2} - 0{,}5k_2}.$$

Согласно замечанию 7 и обозначениям леммы 3, последние равенства примут вид

$$\begin{aligned} D_p^{n,1}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_1 s_1} \frac{e^{-x_2\sqrt{s_1^2 + 0{,}25k_p^2}} e^{(-1)^n i s_1}}{1 + i s_1} \left(\frac{1}{2} + O\left((1 + |s_1|)^{-1} \right) \right) ds_1 = \\ &= \frac{\Lambda_p^n(x)}{2} + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_1 s_1} \frac{e^{-x_2\sqrt{s_1^2 + 0{,}25k_p^2}} e^{(-1)^n i s_1}}{1 + i s_1} O\left((1 + |s_1|)^{-1} \right) ds_1; n, p = 1; 2. \end{aligned} \tag{53}$$

Оценим второй интеграл в правой части представления (53) при $x_2 > 0$ и $n, p = 1; 2$

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_1 s_1} \frac{e^{-x_2\sqrt{s_1^2 + 0{,}25k_p^2}} e^{(-1)^n i s_1}}{1 + i s_1} O\left((1 + |s_1|)^{-1} \right) ds_1 \right| \leqslant c x_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds_1}{(1 + s_1|)^2} \leqslant c_1 x_2. \tag{54}$$

Применение результатов леммы 3 и оценок (54) к выражениям (53) завершает доказательство справедливости представлений $D_p^{n,1}(x)$, $n, p = 1; 2$. Лемма доказана.

Вернемся к представлениям (47) функций $V_p(x)$, $\dfrac{\partial V_p(x)}{\partial x_1}$ и $\dfrac{\partial V_p(x)}{\partial x_2}$ при $x_2>0$, где $p=1;2$. Легко заметить, что, согласно обозначениям леммы 4,

$$S^{(p)}_{9,1}=-D^{1,1}_p, S^{(p)}_{13,1}=-D^{1,2}_p;$$
$$S^{(p)}_{1,2}=\Psi^{1,1}_p, S^{(p)}_{5,2}=\Psi^{2,1}_p, S^{(p)}_{9,2}=(-1)^p\Phi^{1,1}_p, S^{(p)}_{10,2}=(-1)^p\Phi^{1,2}_p, S^{(p)}_{13,2}=(-1)^p\Phi^{2,1}_p,$$
$$S^{(p)}_{14,2}=(-1)^p\Phi^{2,2}_p;$$
$$S^{(p)}_{1,3}=N^{1,1}_p, S^{(p)}_{5,3}=N^{2,1}_p, S^{(p)}_{9,3}=(-1)^pT^{1,1}_p, S^{(p)}_{10,3}=(-1)^pT^{1,2}_p, S^{(p)}_{13,3}=(-1)^pT^{2,1}_p,$$
$$S^{(p)}_{14,3}=(-1)^pT^{2,2}_p,$$

где $p=1;2$. Остальные же слагаемые представлений $V_p(x)$, $\dfrac{\partial V_p(x)}{\partial x_1}$ и $\dfrac{\partial V_p(x)}{\partial x_2}$ при $x_2>0$, где $p=1;2$, по теореме Лебега о мажорируемой сходимости (см. [8]) не вносят сингулярных компонент в асимптотические разложения $V_p(x)$, $\dfrac{\partial V_p(x)}{\partial x_1}$ и $\dfrac{\partial V_p(x)}{\partial x_2}$, где $p=1;2$, при $x_2>0$, так как подынтегральные выражения этих слагаемых мажорируются функцией $c\,(1+|s_1|)^{-2}$, где c — некоторая положительная константа.

Таким образом, с учетом обозначений, введенных в разделе 2, функции $V_p(x)$, $\dfrac{\partial V_p(x)}{\partial x_1}$ и $\dfrac{\partial V_p(x)}{\partial x_2}$, где $p=1;2$, при $x_2>0$ имеют следующие асимптотические разложения:

$$V_p(x)=\widetilde{R}_{p,0}(x), \tag{55}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial V_p(x)}{\partial x_1}=-(2\pi)^{-1}\ln r_{-1}(x)q_1(-1)+(2\pi)^{-1}\ln r_{+1}(x)q_1(1)-\\ -(-1)^p\left(\left(-(2\pi)^{-1}x_2r^{-2}_{-1}(x)+(-1)^{p+1}(8\pi)^{-1}(k_1+k_2)\ln r_{-1}(x)\right)q_0(-1)-\right.\\ \left.-\left(-(2\pi)^{-1}x_2r^{-2}_{+1}(x)+(-1)^{p+1}(8\pi)^{-1}(k_1+k_2)\ln r_{+1}(x)\right)\right)q_0(1)+\widetilde{R}_{p,1}(x),\end{gathered} \tag{56}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial V_p(x)}{\partial x_2}=(-1)^{p+1}\left((2\pi)^{-1}(x_1+1)r^{-2}_{-1}(x)q_0(-1)-(2\pi)^{-1}(x_1-1)r^{-2}_{+1}(x)q_0(1)-\right.\\ \left.-(2\pi)^{-1}\ln r_{-1}(x)q_0'(-1)+(2\pi)^{-1}\ln r_{+1}(x)q_0'(1)\right)+\widetilde{R}_{p,2}(x)\end{gathered} \tag{57}$$

при $p=1;2$, где функции $\widetilde{R}_{p,j}(x)$, где $p=1;2$ и $j=0;1;2$, равномерно ограничены на любом компакте $K\subset\overline{\mathbb{R}^2_+}$.

Замечание 8. Асимптотические разложения (55)-(57) были получены при $x_2>0$. Воспользовавшись представлениями (20) и (25), можно выписать асимптотические разложения для функций $u_1(x)$ и $u_2(x)$ и их первых производных при $x_2\to\pm0, x_1\in[-1,1]$. Данные результаты сформулированы в теореме 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Глушко А. В. Построение стационарного поля температуры для двух связных полупространств с межфазовой трещиной / А. В. Глушко, А. С. Рябенко, А. С. Черникова // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения–XXIII". — Воронеж, 2012. — С. 49–50.

[2] Черникова А. С. Асимптотики решения задачи о сопряжении двух неоднородных материалов с трещиной на границе / А. С. Черникова // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения–XXIV". — Воронеж, 2013. — С. 216–217.

[3] Глушко А. В. Задача о распределении тепла при сопряжении двух неоднородных материалов с трещиной / А. В. Глушко, А. С. Черникова // Дифференциальные уравнения, теория функций, нелинейный анализ и оптимизация: труды Всероссийской научно-практической конференции. Москва, 23-26 апреля 2013 г. — М., 2013. — С. 58–59.

[4] Черникова А. С. Об асимптотике вблизи границ решения задачи о стационарном распределении тепла в плоскости с крестообразной трещиной / А. С. Черникова // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения–XXII". — Воронеж: ИПЦ ВГУ, 2011. — С. 205–207.

[5] Черникова А. С. Задача о распределении тепла в биматериале с полуограниченной межфазной трещиной / А. С. Черникова // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения–XXV". — Воронеж: ИПЦ «Научная книга», 2014. — С. 193–194.

[6] Черникова А. С. Асимптотика решения задачи о распределении тепла в плоскости, состоящей из двух неоднородных материалов, с межфазной трещиной / А. С. Черникова // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения–XXV". — Воронеж: ИПЦ «Научная книга», 2014. — С. 192–193.

[7] Черникова А. С. Задача о стационарном распределении тепла в плоскости, состоящей из двух различных неоднородных материалов, с межфазной трещиной / А. С. Черникова // XL Гагаринские чтения. Научные труды Международной научной конференции в 9 т. Москва, 7-11 апреля 2014 г. — М.: МАТИ, 2014. Т. 5. — С. 191–193.

[8] Владимиров В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. — М.: Наука, 1976. — 527 с.

[9] Смирнов В. И. Курс высшей математики: в 5 т. Т. 4 ч. 1 / В. И. Смирнов. — М.: Гл. ред. физ.-мат. лит. изд-ва Наука, 1974. — 336 с.

[10] Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 572 с.

[11] Сборник задач по уравнениям математической физики / В. С. Владимиров, В. П. Михайлов, А. А. Вашарин [и др.]. — М.: Наука, 1982. — 256 с.

REFERENCES

[1] Glushko A. V., Ryabenko A. S., Chernikova A. S. Construction of the stationary temperature field for two connected halfspaces with the interphase crack. [Glushko A. V., Ryabenko A. S., Chernikova A. S. Postroenie statsionarnogo polya temperatury dlya dvukh svyaznykh poluprostranstv s mezhfazovoy treshchinoy]. Modern methods of the theory of boundary value problems: materials of the Voronezh Spring Mathematical School «Pontryagin read–XXIII», Voronezh, 2012, pp. 49–50.

[2] Chernikova A. S. Asymptotics of the solution of the problem of conjugation of two inhomogeneous materials with a crack on the boundary. [Chernikova A. S. Asimptotiki resheniya zadachi o sopryazhenii dvukh neodnorodnykh materialov s treshchinoy na granitse]. Modern methods of the theory of boundary value problems: materials of the Voronezh Spring Mathematical School «Pontryagin read–XXIV», Voronezh: Voronezh State University, 2013, pp. 216–217.

[3] Glushko A. V., Chernikova A. S. The problem of the heat distribution under conjugation two inhomogeneous materials with a crack. [Glushko A. V., Chernikova A. S. Zadacha o raspredelenii tepla pri sopryazhenii dvukh neodnorodnykh materialov s treshchinoy]. Differential equations, function theory, and nonlinear analysis and optimization: Proceedings of the All-Russian scientific-practical conference. Moscow, 23-26 April 2013, Moscow: Peoples' Friendship University of Russia, 2013, pp. 58–59.

[4] Chernikova A. S. On the asymptotic behavior near the boundary of the solution of the

problem of the stationary heat distribution in the plane with the cross crack. [Chernikova A. S. Ob asimptotike vblizi granits resheniya zadachi o statsionarnom raspredelenii tepla v ploskosti s krestoobraznoy treshchinoy]. Modern methods of the theory of boundary value problems: materials of the Voronezh Spring Mathematical School «Pontryagin read–XXII», Voronezh: Voronezh State University, 2011, pp. 205–207.

[5] Chernikova A. S. The problem of the heat distribution in a bimaterial with a semi-bounded interphase crack. [Chernikova A. S. Zadacha o raspredelenii tepla v bimateriale s poluogranichennoj mezhfaznoj treshhinoj]. Modern methods of the theory of boundary value problems: materials of the Voronezh Spring Mathematical School «Pontryagin read–XXV», Voronezh: «Nauchnaya kniga», 2014, pp. 193–194.

[6] Chernikova A. S. Asymptotics of the solution of the problem of the heat distribution in a plane consisting of two non-homogeneous materials with an interphase crack. [Chernikova A. S. Asimptotika resheniya zadachi o raspredelenii tepla v ploskosti, sostoyashhej iz dvux neodnorodnyx materialov, s mezhfaznoj treshhinoj]. Modern methods of the theory of boundary value problems: materials of the Voronezh Spring Mathematical School «Pontryagin read–XXV», Voronezh: «Nauchnaya kniga», 2014, pp. 192–193.

[7] Chernikova A. S. The problem of the stationary heat distribution in a plane, consisting of two different non-homogeneous materials with an interphase crack. [Chernikova A. S. Zadacha o statsionarnom raspredelenii tepla v ploskosti, sostoyashchey iz dvukh razlichnykh neodnorodnykh materialov, s mezhfaznoy treshchinoy]. XL Gagarin read. Scientific proceedings of the international scientific conference in 9 volumes. Moscow, 7-11 April 2014, Moscow: Moscow Aviation Technological Institute, 2014, Vol. 5, pp. 191–193.

[8] Vladimirov V. S. Equations of mathematical physics. [Vladimirov V. S. Uravneniya matematicheskoy fiziki]. Moscow: Nauka, 1976, 527 p.

[9] Smirnov V. I. The course of Higher Mathematics: in 5 volumes. Vol. 4 part 1. [Smirnov V. I. Kurs vysshej matematiki: v 5 t. T. 4 ch. 1]. Moscow: Main editorial office of Physics and Mathematics of literary publishing house «Nauka», 1974, 336 p.

[10] Kolmogorov A. N., Fomin S. V. Elements of the theory of functions and the functional analysis. 7 edition. [Kolmogorov A. N., Fomin S. V. Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza. 7 izdanie]. Moscow: FIZMATLIT, 2004, 572 p.

[11] Vladimirov V. S., Mikhailov V. P., Vasharin A. A. and oth. Collection of tasks on equations of mathematical physics. [Vladimirov V. S., Mikhailov V. P., Vasharin A. A. i dr. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki]. Moscow: Nauka, 1982, 256 p.

Черникова А. С., аспирант кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: chernikova-an@mail.ru
Тел.: (473)220–86–18

Chernikova A. S., PhD Student, Department of partial differential equations and probability theory, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: chernikova-an@mail.ru
Tel.: (473)220–86–18