УДК 517.5

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ФУРЬЕ ПО СИСТЕМЕ ВСПЛЕСКОВ ДОБЕШИ $\{\psi_{jk}^{(2)}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$

И. В. Редько

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 14.10.2013 г.

Аннотация: работа посвящена изучению поведения коэффициентов Фурье положительных функций из симметричных пространств по системе простейших всплесков Добеши с четырьмя коэффициентами в маске. Исследована неотрицательность коэффициентов Фурье таких функций и получен критерий их бесконечной малости в инвариантных пространствах, удовлетворяющих специальному условию вогнутости. Кроме того, изучена зависимость нормы функции от поведения ее коэффициентов и эквивалентность системы всплесков Добеши с нулевыми сдвигами стандартному базису пространства l_p, $1 < p < \infty$. Данные свойства коэффициентов Фурье рассматриваются для симметричных пространств, определенных на отрезке $[-1, 2]$, однако, они естественным образом переносятся на симметричные пространства, определенные на любом конечном отрезке числовой прямой.

Ключевые слова: всплески, ортонормированные базисы, симметричные пространства.

ON FOURIER COEFFICIENTS WITH RESPECT TO THE SYSTEM OF DAUBECHIES WAVELETS $\{\psi_{jk}^{(2)}\}_{j,k\in Z}$

I. V. Redko

Abstract: the work is devoted to investigation of behavior of Fourier coefficients of positive functions from rearrangement invariant spaces with respect to the system of Daubechies simplest wavelets with four coefficients in the mask. Nonnegativity of Fourier coefficients of such functions is investigated and the criterion of their infinitesimality in rearrangement invariant spaces satisfying the special condition of concavity is obtained. In addition, dependence of function norm on behavior of its Fourier coefficients and equivalence of the above mentioned system of Daubechies wavelets of zero scale with integer shifts to the standard basis of the space l_p, $1 < p < \infty$, are studied. These properties of the Fourier coefficients are considered for rearrangement invariant spaces defined on the interval $[-1, 2]$, however, they are naturally transferred to the rearrangement invariant spaces defined on any finite interval of the number scale.

Keywords: wavelets, orthonormal bases, rearrangement invariant spaces.

ВВЕДЕНИЕ

В статье рассматриваются всплеск-функции Добеши. Основой для их описания (см., например, [4, с.193]) является функция $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$, являющаяся решением следующего функционального уравнения:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{3} c_k \varphi(2t - k),$$

где
$$c_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4},\ c_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4},\ c_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4},\ c_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4}.$$

Напомним, что это уравнение и определяемую им функцию $\varphi(t)$ называют *масштабирующими*. Известно, что носитель масштабирующей функции φ совпадает с отрезком $[0,3]$.

Всплеск-функция Добеши $\psi^{(2)}(t)$ (индекс 2 далее будем опускать) определяется с помощью масштабирующей функции $\varphi(t)$ следующим уравнением:

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{3}(-1)^k c_k \varphi(2t+k-1).$$

Будем рассматривать всплески Добеши со следующей нормировкой:

$$\psi_{jk}(t) = \psi(2^j t - k),\ j \geqslant 0,\ -(2^j-1) \leqslant k \leqslant 2(2^j-1), k \in \mathbb{Z};$$

$$\int_{-1}^{2} \psi_{jk}(t)\psi_{im}(t)dt = \begin{cases} 2^{-j}, & \text{если } j=i,\ k=m; \\ 0, & \text{если } (j,k)\ \neq (i,m). \end{cases}$$

Система всплесков $\{2^{\frac{j}{2}}\psi_{jk}(t)\}$ нормирована в $L_2(\mathbb{R})$.

Определение. Функциональное банахово пространство E на отрезке $[-1,2]$ с мерой Лебега называется *симметричным*, если выполнено следующее условие: если $y \in E$ и $x^*(t) \leqslant y^*(t)$ для всех $t \in [-1,2]$, то $x \in E$ и $\|x\|_E \leqslant \|y\|_E$, где $x^*(t)$ — перестановка [3, с.83] функции $x(t)$.

Пусть E — симметричное пространство, $x(t) \in E$. Обозначим: $c_{jk}(x) = 2^j \int\limits_{\frac{k-1}{2^j}}^{\frac{k+2}{2^j}} x(t)\psi_{j,k}(t)dt$ — коэффициенты Фурье по системе всплесков Добеши $\{\psi_{jk}(t)\}$, $d_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \int\limits_{\frac{k-1}{2^j}}^{\frac{k+2}{2^j}} x(t)\psi_{j,k}(t)dt$ — коэффициенты Фурье по системе всплесков Добеши $\{2^{\frac{j}{2}}\psi_{jk}(t)\}$, нормированной в $L_2(\mathbb{R})$. Очевидно, что $d_{j,k}(x) = 2^{-\frac{j}{2}}c_{jk}(x)$.

Пусть Ω — множество таких (j,k), что $j \in \mathbb{N}$, $-(2^j-1) \leqslant k \leqslant 2(2^j-1)$, $k \in \mathbb{Z}$. Выбор Ω связан с тем, что $(j,k) \in \Omega$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{supp} \psi_{jk} \subseteq [-1,2]$.

СВОЙСТВА КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ-ДОБЕШИ ФУНКЦИЙ ИЗ СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Найдем класс положительных функций, для которых на отрезке $[-1,2]$ выполняется следующее условие:

$$\forall (j,k \in \Omega)[\int\limits_{\frac{k-1}{2^j}}^{\frac{k+2}{2^j}} x(t)\varphi(2^j t-k)dt \geqslant 0]. \tag{1}$$

Представим последний интеграл в следующем виде:

$$\int\limits_{\frac{k-1}{2^j}}^{\frac{k+2}{2^j}} x(t)\varphi(2^j t-k)dt = \int\limits_{\frac{k-1}{2^j}}^{\frac{2k+1}{2^{j+1}}} x(t)\varphi(2^j t-k)dt + \int\limits_{\frac{2k+1}{2^{j+1}}}^{\frac{k+2}{2^j}} x(t)\varphi(2^j t-k)dt.$$

Первый интеграл в правой части равенства будет положительным, так как $x(t)$ — положительная по условию, а масштабирующая функция не принимает на этом участке отрицательных значений. Будем рассматривать только тот случай, когда второй интеграл в правой части отрицателен, — в противном случае задача тривиальна. Перепишем равенство в следующем виде:

$$\int\limits_{\frac{k-1}{2^j}}^{\frac{k+2}{2^j}} x(t)\varphi(2^jt-k)dt = \int\limits_{\frac{k-1}{2^j}}^{\frac{2k+1}{2^{j+1}}} x(t)\varphi(2^jt-k)dt - |\int\limits_{\frac{2k+1}{2^{j+1}}}^{\frac{k+2}{2^j}} x(t)\varphi(2^jt-k)dt| \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{\frac{k-1}{2^j}}^{\frac{2k+1}{2^{j+1}}} x(t)\varphi(2^jt-k)dt - \int\limits_{\frac{2k+1}{2^{j+1}}}^{\frac{k+2}{2^j}} x(t)|\varphi(2^jt-k)|dt.$$

Введем замену переменной $t = p - \frac{3}{2^{j+1}}$, тогда последний интеграл можно переписать следующим образом:

$$\int\limits_{\frac{2k+1}{2^{j+1}}}^{\frac{k+2}{2^j}} x(p)|\varphi(2^jp-k)|dp = \int\limits_{\frac{k-1}{2^j}}^{\frac{2k+1}{2^{j+1}}} x(t+\frac{3}{2^{j+1}})|\varphi(2^jt-k+\frac{3}{2^j})|dt.$$

С учетом этого последнее неравенство можно переписать в виде:

$$\int\limits_{\frac{k-1}{2^j}}^{\frac{k+2}{2^j}} x(t)\varphi(2^jt-k)dt \geqslant \int\limits_{\frac{k-1}{2^j}}^{\frac{2k+1}{2^{j+1}}} [x(t)\varphi(2^jt-k) - x(t+\frac{3}{2^{j+1}})|\varphi(2^jt-k+\frac{3}{2^j})|]dt.$$

Для того, чтобы последний интеграл был неотрицательным, достаточно, чтобы неотрицательным было подынтегральное выражение, т. е. чтобы при $t \in [\frac{k-1}{2^j}, \frac{2k+1}{2^{j+1}}]$ выполнялось следующее условие: $x(t) \geqslant x(t+\frac{3}{2^{j+1}})\frac{|\varphi(2^jt-k+\frac{3}{2^j})|}{\varphi(2^jt-k)}$.

Обозначим $\alpha = \max\limits_{t\in[-1,2]} \frac{|\varphi(2^jt-k+\frac{3}{2^j})|}{\varphi(2^jt-k)}$, $\alpha > 0$.

Таким образом, если $x(t)$ — такая положительная функция, для которой верно:

$$\forall(t\in[-1,2])\forall(j\in N)[x(t) \geqslant \alpha x(t+\frac{3}{2^{j+1}})], \tag{2}$$

то для нее последний интеграл будет неотрицательным.

Здесь и далее будем рассматривать специальный вид вогнутых функций, удовлетворяющих следующему условию:

$$x(\frac{t_1+t_2}{2}) \geqslant r[x(t_1)+x(t_2)],\ r > \frac{1}{2}. \tag{3}$$

Лемма 1. *Коэффициенты Фурье по системе всплесков Добеши $\{\psi^{(2)}_{jk}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ всякой вогнутой на $[-1,2]$ функции, удовлетворяющей условиям (2) и (3), неотрицательны.*

Доказательство. $c_{j-1,k}(x) = \int\limits_{\frac{k-1}{2^{j-1}}}^{\frac{k+2}{2^{j-1}}} x(t)\psi_{j-1,k}(t)dt = 2^{\frac{j-1}{2}}[c_3 \int\limits_{\frac{2k-2}{2^j}}^{\frac{2k+1}{2^j}} x(t)\varphi(2^j t-2k+2)dt -$

$c_2 \int\limits_{\frac{2k-1}{2^j}}^{\frac{2k+2}{2^j}} x(t)\varphi(2^j t-2k+1)dt + c_1 \int\limits_{\frac{2k}{2^j}}^{\frac{2k+3}{2^j}} x(t)\varphi(2^j t-2k)dt -$

$- c_0 \int\limits_{\frac{2k+1}{2^j}}^{\frac{2k+4}{2^j}} x(t)\varphi(2^j t-2k-1)dt] \ = \ 2^{\frac{j-1}{2}} \int\limits_{\frac{2k}{2^j}}^{\frac{2k+3}{2^j}} [c_3 x(t-\frac{2}{2^j}) - c_2 x(t-\frac{1}{2^j}) +$

$+ c_1 x(t) - c_0 x(t+\frac{1}{2^j})]\varphi(2^j t-k)dt \ \geqslant \ 2^{\frac{j-1}{2}} \int\limits_{\frac{2k}{2^j}}^{\frac{2k+3}{2^j}} [-c_0 x(t-\frac{1}{2^j}) + 2c_0 x(t) -$

$- c_0 x(t+\frac{1}{2^j})]\varphi(2^j t-k)dt \ \geqslant 0.$ □

Теорема 1. *Пусть E — симметричное пространство [3] на $[-1,2]$. Тогда для любой положительной вогнутой функции $x \in E$, удовлетворяющей условиям (2) и (3), верно:*

$$\lim_{j\to\infty} d_{j,k}(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ E \subset L^0_{2,\infty}.$$

Доказательство. 1. Необходимость. Предположим противное, т. е. что вложение $E \subset L^0_{2,\infty}$ не верно. Тогда существует такая положительная вогнутая функция $x \in E,\ x = x^*$, что:

$$\lim_{\tau\to 0}\sup \tau^{-\frac{1}{2}} \int\limits_0^{\tau} x(t)dt \geqslant 1.$$

По свойству верхнего предела:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = a \ \to \ \forall(\varepsilon > 0)\forall(n_1 \in N)\exists(n' > n_1)[x_{n'} > a-\varepsilon],$$

т. е. мы можем подобрать такое $\varepsilon > 0$, для которого $\exists(\{\tau_j\}_{j=0}^{\infty})$, что:

$$\int\limits_0^{\tau_j} x(t)dt \geqslant \tau_j^{\frac{1}{2}}.$$

Подберем такую последовательность $\{m_j\}_{j=0}^{\infty}$, что: $2^{-m_j-1} \leqslant \tau_j \leqslant 2^{-m_j}$, тогда:

$$\int\limits_0^{2^{-m_j}} x(t)dt \geqslant \int\limits_0^{\tau_j} x(t)dt \geqslant \tau_j^{\frac{1}{2}} \geqslant 2^{-\frac{m_j+1}{2}}.$$

Так как $x(t)$ — удовлетворяет условию (3), то: $x(\frac{t_1+t_2}{2}) \geqslant r[x(t_1)+x(t_2)]$, где $r > \frac{1}{2}$;

$$x(t_1)+x(t_2) \leqslant \frac{1}{r}x(\frac{t_1+t_2}{2}).$$

Тогда:

$$d_{m_j-1,0}(x) = 2^{\frac{m_j-1}{2}} \int\limits_{-2^{1-m_j}}^{2^{2-m_j}} x(t)\psi(2^{m_j-1}t)dt = 2^{\frac{m_j-1}{2}}[c_3 \int\limits_{-2^{1-m_j}}^{2^{-m_j}} x(t)\varphi(2^{m_j}t+2)dt -$$

$$- c_2 \int\limits_{2^{-m_j}}^{2^{1-m_j}} x(t)\varphi(2^{m_j}t+1)dt + c_1 \int\limits_{0}^{3\cdot 2^{-m_j}} x(t)\varphi(2^{m_j}t)dt - c_0 \int\limits_{2^{-m_j}}^{2^{2-m_j}} x(t)\varphi(2^{m_j}t -$$

$$- 1)dt] = \ 2^{\frac{m_j-1}{2}} \int\limits_{-2^{-m_j}}^{2^{1-m_j}} [c_3 x(t-\frac{1}{2^{m_j}}) - c_2 x(t) + c_1 x(t+\frac{1}{2^{m_j}}) - c_0 x(t+\frac{2}{2^{m_j}})]\varphi(2^{m_j}t +$$

$$+ 1)dt \geqslant c_3 \frac{1-2r}{r} 2^{\frac{m_j-1}{2}} \int\limits_{-2^{-m_j}}^{2^{1-m_j}} x(t)\varphi(2^{m_j}t+1)dt \geqslant \frac{1}{2} c_3 \frac{1-2r}{r} 2^{\frac{m_j-1}{2}} \int\limits_{0}^{(2^{m_j}+1)^{-1}} x(t)dt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} c_3 \frac{1-2r}{r} 2^{\frac{m_j-1}{2}} 2^{-\frac{m_j+2}{2}} = 2^{-\frac{5}{2}} c_3 \frac{1-2r}{r}.$$

2. Достаточность. Так как $x \in L^0_{2,\infty}$, то:

$$\lim_{\tau\to 0} \tau^{-\frac{1}{2}} \int\limits_0^{\tau} x^*(t)dt = 0,$$

где x^* — убывающая перестановка функции [1, с. 5].

$$|d_{j,k}(x)| = 2^{\frac{j}{2}} |\int\limits_{\frac{k-1}{2^j}}^{\frac{k+2}{2^j}} x(t)\psi_{j,k}(t)dt| 2^{\frac{j}{2}} \int\limits_{\frac{k-1}{2^j}}^{\frac{k+2}{2^j}} |x(t)||\psi_{j,k}(t)|dt \leqslant 2^{\frac{j}{2}+1} \int\limits_{\frac{k-1}{2^j}}^{\frac{k+2}{2^j}} |x(t)|dt \leqslant$$

$$\leqslant 2^{\frac{j}{2}+1} \sup_{mes(E)=\frac{3}{2^j}} \int\limits_E |x(t)|dt \leqslant 2^{\frac{j}{2}+1} \int\limits_0^{3\cdot 2^{-j}} x^*(t)dt = 2^{\frac{j}{2}+1} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \int\limits_0^{3\cdot 2^{-j}} x^*(t)dt =$$

$$= 2\sqrt{3} \frac{2^{\frac{j}{2}}}{\sqrt{3}} \int\limits_0^{3\cdot 2^{-j}} x^*(t)dt \to 0.$$

Последнее неравенство верно в силу свойства 1.c.3 [1, с. 5] перестановок функции. □

Верно более общее утверждение.

Теорема 2. *Пусть E — симметричное пространство на $[-1,2]$ и $1 < p < \infty$. Тогда для любой положительной вогнутой функции $x \in E$, удовлетворяющей условиям (2) и (3), верно:*

$$\lim_{j\to\infty} j^{-\frac{1}{p}} c_{j,k}(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ E \subset L^0_{p,\infty}.$$

Доказательство совершенно аналогично данному в теореме 1.

Теорема 3. *Пусть x — положительная вогнутая на $[-1;2]$ функция, удовлетворяющая условиям (2) и (3), $x \in L_1(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$. Тогда:*

$$x \in L_{p,\infty} \ \Leftrightarrow \ \sup_{j\in N} 2^{-\frac{j}{p}} c_{j,0}(x) < \infty.$$

Доказательство. 1. Необходимость. Так как $x \in L_{p,\infty}$, то $||x||_{L_{p,\infty}} < \infty$,

$$||x||_{L_{p,\infty}} = \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} t^{\frac{1}{p}-1} \int\limits_0^t x(s)ds = \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{p-1}{p}} \int\limits_0^t x(s)ds,$$

$$\sup_{j\in N} 2^{-\frac{j}{p}} c_{j,0}(x) = \sup_{j\in N} 2^{j(\frac{p-1}{p})} \int\limits_{-2^{-j}}^{2^{1-j}} x(t)\psi(2^j t)dt =$$

$$= \sup_{j\in N} 2^{j(\frac{p-1}{p})} \int\limits_{-2^{-j}}^{2^{1-j}} x(t)[c_3\varphi(2^{j+1}t + +2) - c_2\varphi(2^{j+1}t+1) + c_1\varphi(2^{j+1}t) - c_0\varphi(2^{j+1}t-1)]dt \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \sup_{j\in N} 2^{j(\frac{p-1}{p})} \int\limits_0^{3(2^{j+1})^{-1}} x(t)\varphi(2^{j+1}t)dt.$$

Разобьем отрезок $[0; \frac{3}{2^{j+1}}]$ пополам. С учетом того, что масштабирующая функция отрицательна практически на всей правой половине этого отрезка, получим:

$$c_1 \sup_{j\in N} 2^{j(\frac{p-1}{p})} \int\limits_0^{3(2^{j+1})^{-1}} x(t)\varphi(2^{j+1}t)dt = c_1 \sup_{j\in N} 2^{j(\frac{p-1}{p})} [\int\limits_0^{3(2^{j+2})^{-1}} x(t)\varphi(2^{j+1}t)dt +$$

$$+ \int\limits_{3(2^{j+2})^{-1}}^{3(2^{j+1})^{-1}} x(t)\varphi(2^{j+1}t)dt] \leqslant c_1 \sup_{j\in N} 2^{j(\frac{p-1}{p})} \int\limits_0^{3(2^{j+2})^{-1}} x(t)\varphi(2^{j+1}t)dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3}{2} c_1 \sup_{j\in N} 2^{j(\frac{p-1}{p})} \int\limits_0^{3(2^{j+2})^{-1}} x(t)dt.$$

Подберем такое s_j, что:

$$\frac{3}{2^{j+2}} \leqslant s_j \leqslant \frac{3}{2^{j+1}}, \quad 2^j < 2^{j+1} \leqslant \frac{3}{s_j} \leqslant 2^{j+2}.$$

С учетом этого получим:

$$\frac{3}{2} c_1 \sup_{j\in N} 2^{j(\frac{p-1}{p})} \int\limits_0^{3(2^{j+2})^{-1}} x(t)dt \leqslant \frac{3}{2} c_1 \sup_{0\leqslant s_j\leqslant 1} (\frac{3}{s_j})^{\frac{p-1}{p}} \int\limits_0^{s_j} x(t)dt = \frac{3^{\frac{2p-1}{p}} c_1}{2} \sup_{0\leqslant s_j\leqslant 1} s_j^{\frac{1}{p}-1} \int\limits_0^{s_j} x(t)dt < \infty.$$

Таким образом, $\sup\limits_{j\in N} 2^{-\frac{j}{p}} c_{j,0}(x) < \infty$.

2. Достаточность. Рассмотрим функцию $\varphi(t) = \int\limits_0^t x(s)ds$. Обозначим: $\varphi_j(t) = \int\limits_0^{2^{-j}} x(s)ds$.

Предположим: $\sup\limits_{j\in N} 2^{-\frac{j-1}{p}} c_{j-1,0}(x) \leqslant 1$. Тогда:

$$2^{\frac{j-1}{p}-(j-1)} \geqslant 2^{-(j-1)}c_{j-1,0}(x) = \int\limits_{-2^{1-j}}^{2^{2-j}} x(t)\psi(2^{j-1}t)dt = c_3 \int\limits_{-2^{1-j}}^{2^{-j}} x(t)\varphi(2^j t+$$

$$+ 2)dt - c_2 \int\limits_{-2^{-j}}^{2^{1-j}} x(t)\varphi(2^j t+1)dt + c_1 \int\limits_{0}^{3\cdot 2^{-j}} x(t)\varphi(2^j t)dt - c_0 \int\limits_{2^{-j}}^{2^{2-j}} x(t)\varphi(2^j t-1)dt =$$

$$= \int\limits_{-2^{-j}}^{2^{1-j}} [c_3 x(t-\frac{1}{2^j}) - c_2 x(t) + c_1 x(t+\frac{1}{2^j}) - c_0 x(t+\frac{2}{2^j})]\varphi(2^j t+1)dt.$$

Так как $x(t)$ — удовлетворяет условию (3), то $x(\frac{t_1+t_2}{2}) \geqslant r[x(t_1)+x(t_2)]$, где $r > \frac{1}{2}$;

$$x(t_1)+x(t_2) \leqslant \frac{1}{r}x(\frac{t_1+t_2}{2}).$$

Тогда, как было показано в доказательстве необходимого условия теоремы 7.a.1 (и так как выполнено условия (2) и (3)):

$$c_3 x(t-\frac{1}{2^j}) - c_2 x(t) + c_1 x(t+\frac{1}{2^j}) - c_0 x(t+\frac{2}{2^j}) \geqslant c_3 \frac{1-2r}{r} x(t).$$

Следовательно:

$$\int\limits_{-\frac{1}{2^j}}^{\frac{2}{2^j}} [c_3 x(t-\frac{1}{2^j}) - c_2 x(t) + c_1 x(t+\frac{1}{2^j}) - c_0 x(t+\frac{2}{2^j})]\varphi(2^j t+1)dt \geqslant$$

$$\geqslant c_3 \frac{1-2r}{r} \int\limits_{-\frac{1}{2^j}}^{\frac{2}{2^j}} x(t)\varphi(2^j t+1)dt \geqslant c_3 \frac{1-2r}{r} \int\limits_{0}^{\frac{1}{2^{j+1}}} x(t)dt,$$

т. е. $c_3 \frac{1-2r}{r}\varphi_{j+1}(t) = c_3\frac{1-2r}{r}\int\limits_0^{\frac{1}{2^{j+1}}} x(t)dt \leqslant 2^{\frac{j-1}{p}-(j-1)}$, или $2^{-\frac{j-1}{p}+(j-1)}\varphi_{j+1}(t) \leqslant \frac{r}{c_3(1-2r)}$.

Следовательно: $2^{-\frac{j}{p}+j}\varphi_{j+1}(t) \leqslant \frac{2^{1-\frac{1}{p}}r}{c_3(1-2r)}$;

$$||x||_{L_{p,\infty}} = \sup_{-1\leqslant t\leqslant 2} t^{\frac{1}{p}-1}\varphi(t) = \sup_t \frac{t^{\frac{1}{p}}}{t}\int\limits_0^t x(s)ds.$$

Пусть $\frac{1}{2^{j+2}} \leqslant t \leqslant \frac{1}{2^{j+1}}$, тогда $t^{\frac{1}{p}}\frac{1}{t} \leqslant 2^{-\frac{j+1}{p}+(j+2)} = 2^{-\frac{j}{p}-\frac{1}{p}+j+2} = 2^{-\frac{j}{p}+j}2^{2-\frac{1}{p}}$.

Значит: $\sup\limits_t \frac{t^{\frac{1}{p}}}{t}\int\limits_0^t x(s)ds \leqslant 2^{2-\frac{1}{p}}\sup\limits_t 2^{-\frac{j}{p}+1}\int\limits_0^{\frac{1}{2^{j+1}}} x(s)ds \leqslant 2^{2-\frac{1}{p}}2^{1-\frac{1}{p}}\frac{r}{c_3(1-2r)} = 2^{3-\frac{2}{p}}\frac{r}{c_3(1-2r)}$. $\square$

Лемма 2. *Пусть $1 < p < \infty$. Тогда существует такая константа $C = C(p) > 0$, что для любой последовательности $\{a_j\}_{j=0}^{\infty}$ верно следующее утверждение:*

$$\frac{1}{C}(\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|^p 2^{-(j+2)})^{\frac{1}{p}} \leqslant \left|\left|\sum_{j=0}^{\infty}a_j\psi_{j0}(t)\right|\right|_{L_p} \leqslant C(\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|^p 2^{-(j+2)})^{\frac{1}{p}}].$$

Доказательство. 1. Докажем оценку снизу. Так как всплески Добеши D4 образуют безусловный базис в пространстве L_p, то, по теореме 1.b.8 [1, с. 4], константа $C = C(p)$ — такая, что:

$$\left\|\sum_{j=0}^{\infty} a_j\psi_{j0}(t)\right\|_{L_p} \geqslant \frac{1}{C}\left\|(\sum_{j=0}^{\infty}[a_j\psi_{j0}(t)]^2)^{1/2}\right\|_{L_p} =$$

$$= \frac{1}{C}(\int\limits_0^1(\sum_{j=0}^{\infty}[a_j\psi_{j0}(t)]^2)^{p/2}dt)^{1/p} \geqslant \frac{1}{C}(\int\limits_0^1\sum_{j=0}^{\infty}(|a_j\psi_{j0}(t)|^2)^{p/2}dt)^{1/p} =$$

$$= \frac{1}{C}(\int\limits_0^1\sum_{j=0}^{\infty}|a_j\psi_{j0}(t)|^p dt)^{1/p} = \frac{1}{C}(\int\limits_0^1\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|^p|\psi_{j0}(t)|^p dt)^{1/p} =$$

$$= \frac{1}{C}(\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|^p\int\limits_0^1|\psi(2^jt)|^p dt)^{1/p} \geqslant \frac{1}{C}(\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|^p\int\limits_{\frac{1}{2^{j+2}}}^{\frac{1}{2^{j+1}}}|\psi(2^jt)|^p dt)^{1/p} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{C}(\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|^p\int\limits_{\frac{1}{2^{j+2}}}^{\frac{1}{2^{j+1}}}dt)^{1/p} = \frac{1}{C}(\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|^p2^{-(j+2)})^{\frac{1}{p}}.$$

2. Докажем оценку сверху.

$$\left\|\sum_{j=0}^{\infty} a_j\psi_{j0}(t)\right\|_{L_p} = \sup_{\{b_j\}\neq 0}\frac{\int\limits_0^1(\sum_{j=0}^{\infty}b_j\psi_{j0}(t))(\sum_{j=0}^{\infty}a_j\psi_{j0}(t))dt}{\left\|\sum_{j=0}^{\infty}b_j\psi_{j0}(t)\right\|_{L_q}} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\{b_j\}\neq 0}\frac{\int\limits_0^1(\sum_{j=0}^{\infty}b_j\psi_{j0}(t))(\sum_{j=0}^{\infty}a_j\psi_{j0}(t))dt}{\frac{1}{C}(\sum_0^{\infty}|b_j|^q2^{-(j+2)})^{1/q}} = \sup_{\{b_j\}\neq 0}\frac{C\sum_{j=0}^{\infty}(a_j2^{-\frac{j+2}{p}})(b_j2^{-\frac{j+2}{q}}}{(\sum_0^{\infty}|b_j|^q2^{-(j+2)})^{1/q}}.$$

Применяя неравенство Гёльдера, получим:

$$\sup_{\{b_j\}\neq 0}\frac{C\sum_{j=0}^{\infty}a_jb_j2^{-(j+2)}}{(\sum_0^{\infty}|b_j|^q2^{-(j+2)})^{1/q}} = \sup_{\{b_j\}\neq 0}\frac{C\sum_{j=0}^{\infty}(a_j2^{-\frac{j+2}{p}})(b_j2^{-\frac{j+2}{q}}}{(\sum_0^{\infty}|b_j|^q2^{-(j+2)})^{1/q}} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\{b_j\}\neq 0}\frac{C(\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|^p2^{-(j+2)})^{1/p}(\sum_{j=0}^{\infty}|b_j|^q2^{-(j+2)})^{1/q}}{(\sum_0^{\infty}|b_j|^q2^{-(j+2)})^{1/q}} = C(\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|^p2^{-(j+2)})^{\frac{1}{p}}.$$

Таким образом,

$$\left\|\sum_{j=0}^{\infty} a_j\psi_{j0}(t)\right\|_{L_p} = \sup_{\{b_j\}\neq 0}\frac{\int\limits_0^1(\sum_{j=0}^{\infty}b_j\psi_{j0}(t))(\sum_{j=0}^{\infty}a_j\psi_{j0}(t))dt}{\left\|\sum_{j=0}^{\infty}b_j\psi_{j0}(t)\right\|_{L_q}} \leqslant C(\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|^p2^{-(j+2)})^{\frac{1}{p}}. \quad \square$$

Доказанные утверждения верны для симметричных пространств, определенных не только на $[-1, 2]$, но и на любом конечном отрезке числовой прямой.

Полученные результаты являются аналогами утверждений о коэффициентах Фурье-Хаара из [1, с. 51–55].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Novikov I.Ja. Haar series and linear operators / I.Ja. Novikov, E.M. Semenov. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1996. — 218 p.

[2] Добеши И. Десять лекций по вейвлетам / И. Добеши. — Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001. — 464 с.

[3] Крейн С.Г. Интерполяция линейных операторов / С.Г. Крейн, Ю.И. Петунин, Е.М. Семенов. — М.: Наука, 1978. — 400 с.

[4] Новиков И.Я. Теория Всплесков / И.Я. Новиков, В.Ю. Протасов, М.А. Скопина. — М.: Физматлит, 2005. — 616 с.

REFERENCES

[1] Novikov, I.Ya., Semenov E.M. Haar series and linear operators. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1996, 218 p.

[2] Daubechies I. Ten Lectures on Wavelets. [Dobeshi I. Desyat' lekcij po vejvletam]. Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, 2001, 464 p.

[3] Krein S.G., Petunin Yu.I., Semenov E.M. Interpolation of linear operators. [Krejn S.G., Petunin Yu.I., Semenov E.M. Interpolyaciya linejnyx operatorov]. Moscow: Nauka, 1978, 400 p.

[4] Novikov I.Ya., Protasov V.Yu., Skopina M.A. Wavelet Theory. [Novikov I.Ya., Protasov V.Yu., Skopina M.A. Teoriya Vspleskov]. Moscow: Fismatlit, 2005, 616 p.

Редько Илья Вячеславович, аспирант кафедры функционального анализа и операторных уравнений математического факультета Воронежского Государственного Университета, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: gewissmail@gmail.com
Тел.: +7(908)–131–94–33

Redko Ilya Vyacheslavovich, graduate student of the department of functional analysis and operator equations of mathematical faculty of Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: gewissmail@gmail.com
Tel.: +7(908)–131–94–33