

# АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО СЛОЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ НАГРЕВЕ СВЕРХУ

О. А. Прозоров

*Южный Федеральный Университет*

Поступила в редакцию 03.02.2014 г.

**Аннотация:** статья посвящена асимптотическому анализу задачи о возникновении конвекции Рэлея–Марангони в горизонтальном слое при нагреве сверху. При больших по абсолютной величине отрицательных числах Рэлея и Марангони методом пограничного слоя Вишика–Люстерника исследуется колебательная неустойчивость и строятся формулы для критических значений числа Рэлея при заданном тепловом потоке на твердой стенке. Построены первый и следующий за ним члены разложения спектрального параметра и динамического числа Бонда. Показано, что главные члены асимптотики совпадают с соответствующими формулами для случая изотермической твердой стенки. Полученные асимптотические разложения позволяют эффективно находить начальные приближения для нейтральных кривых. Показано, что нейтральные кривые могут состоять из нескольких ветвей и иметь точки самопересечения.

**Ключевые слова:** конвекция Рэлея–Марангони, поверхностные волны, внутренние волны, метод Вишика–Люстерника, погранслоевая асимптотика собственных значений, недеформируемая свободная поверхность.

## ASYMPTOTIC ANALYSIS OF THE HORIZONTAL VISCOUS LIQUID LAYER HEATED FROM ABOVE

O. A. Prozorov

**Abstract:** the paper is devoted to the asymptotic analysis of the spectral problem arising in the Rayleigh–Marangoni convection problem in the horizontal layer heated from above. Rayleigh and Marangoni numbers are assumed to be negative with large absolute values. Mechanical equilibrium oscillatory instability is studied and boundary layer expansion is constructed via Vishik–Lyusternik method. The heat flux on a rigid bottom is held fixed. Principal and next terms of spectral parameter and dynamical Bond number expansion are constructed. Principal terms are shown to coincide with the corresponding formulae for the case of isothermal rigid boundary. The expansions obtained are used as initial points for neutral curve calculation. Neutral curves may consist of separated branches with self-intersections.

**Keywords:** Rayleigh–Marangoni convection, surface waves, inner waves, Vishik–Lyusternik method, boundary layer asymptotic, undeformable free surface.

### ВВЕДЕНИЕ

Задача о возникновении конвекции в горизонтальном слое теплопроводной жидкости при нагреве сверху изучалась различными авторами [1], [2], [3], [4]. В [1] показано, что для слоя с твердыми границами имеет место устойчивость механического равновесия, причем сначала все моды затухают монотонно, а при достижении некоторого критического числа Рэлея

появляются комплексно-сопряженные декременты. В [2] исследованы границы монотонной и колебательной устойчивости в предельном случае больших чисел Прандтля  $Pr$  и Рэлея  $Ra$  при конечном числе Грасгофа  $Gr = Ra/Pr$ . Для случая термокапиллярной конвекции с учетом деформируемости свободной границы в [3] была численно обнаружена колебательная неустойчивость. Возникновение конвекции Рэлея–Марангони в слое с недеформируемой свободной границей исследовано в [4] и найдена колебательная неустойчивость при больших по абсолютной величине отрицательных числах Рэлея и Марангони.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается задача о движении вязкой жидкости в горизонтальном слое, ограниченном снизу твердой стенкой, а сверху — свободной поверхностью. На свободной поверхности учитывается поверхностное натяжение с коэффициентом, который линейно зависит от температуры. Система уравнений для скорости  $\mathbf{v}$ , температуры  $T$  и давления  $p$  записывается в безразмерной форме [5]

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -\nabla p + \Delta \mathbf{v} - (1 - \varepsilon T) Ga \boldsymbol{\gamma}, \\ \frac{dT}{dt} &= Pr^{-1} \Delta T, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

На недеформируемой свободной поверхности  $z = 0$  заданы условия

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial z} &= \frac{Ma}{Pr} \frac{\partial T}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial v_2}{\partial z} = \frac{Ma}{Pr} \frac{\partial T}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial T}{\partial x_3} - Bi(T - T_g) &= 0, \quad v_3 = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

На твердой стенке  $z = 1$  заданы условие прилипания и смешанное краевое условие для температуры

$$z = 1 : \quad \mathbf{v} = 0, \quad B_1 \frac{\partial T}{\partial x_3} + B_0(T - T_r) = 0. \quad (3)$$

Здесь  $\varepsilon$  — параметр Буссинеска,  $Ga$  — число Галилея,  $Pr$  — число Прандтля,  $Ma$  — число Марангони,  $Bi$ ,  $B_0$ ,  $B_1$  — числа Био,  $T_r$  — температура подложки, на которой находится слой,  $T_g$  — температура газа над жидкостью,  $\boldsymbol{\gamma}$  — единичный вектор вдоль оси  $Oz$  ( $x_3 \equiv z$ ).

Рассматривается линейная задача устойчивости решения (1)–(3), которое соответствует механическому равновесию с линейным профилем температуры. Возмущения равновесия разыскиваются в виде  $\tilde{f}(x_1, x_2, z, t) = f(z)e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)}e^{\lambda t}$ . Система дифференциальных уравнений для амплитуд возмущений нормальной компоненты скорости  $W$  и температуры  $T$  имеет вид [4], [5]:

$$\lambda' LW = L^2 W + Ra \alpha^2 T, \quad \lambda' Pr T = LT - W, \quad (4)$$

$$z = 0 : \quad W = D^2 W - Ma \alpha^2 T = DT - Bi T = 0, \quad (5)$$

$$z = 1 : \quad W = DW = B_1 DT + B_0 T = 0, \quad (6)$$

$$D = \frac{d}{dz}, \quad L = D^2 - \alpha^2.$$

Здесь  $Ra = Ga \varepsilon Pr$  — число Рэлея,  $\alpha$  — волновое число,  $\lambda'$  — спектральный параметр.

## 2. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Нагреву горизонтального слоя со стороны свободной поверхности соответствуют отрицательные числа Рэлея  $Ra$  и Марангони  $Ma$ . Аналогично [4] исследуется случай, когда оба параметра стремятся к  $-\infty$  так, что их отношение — динамическое число Бонда  $\beta = Ra/Ma$  имеет конечное значение. Параметр  $\beta$  определяется только физическими свойствами жидкости и не зависит от градиента температуры. Число Прандтля  $Pr$  предполагается конечным, вводится малый параметр  $\varepsilon = \sqrt[4]{-PrRa^{-1}}$ . С помощью замен  $\lambda' = \frac{\lambda}{\varepsilon^2}$ ,  $T = \frac{\varepsilon^2\theta}{Pr}$  задача (4)–(6) приводится к виду

$$\lambda LW = \varepsilon^2 L^2 W - \alpha^2 \theta, \quad \lambda \theta = \frac{\varepsilon^2}{Pr} L \theta - W, \quad (7)$$

$$z = 0: \quad W = 0, \quad \beta \varepsilon^2 D^2 W + \alpha^2 \theta = 0, \quad D\theta - Bi\theta = 0, \quad (8)$$

$$z = 1: \quad W = DW = 0, \quad B_1 D\theta + B_0 \theta = 0. \quad (9)$$

Система (7)–(9) содержит малый параметр при старшей производной, далее применяется метод пограничного слоя Вишика–Люстерника [6], [7]. Решение (7)–(9) представляется в виде суммы

$$W = w(z) + \bar{w}(\bar{z}) + \tilde{w}(\tilde{z}), \quad \theta = T(z) + \bar{T}(\bar{z}) + \tilde{T}(\tilde{z}). \quad (10)$$

В разложении (10)  $w(z)$ ,  $T(z)$  — решения вырожденной задачи,  $\bar{w}(\bar{z})$ ,  $\bar{T}(\bar{z})$ ,  $\bar{z} = \frac{1-z}{\varepsilon}$  — погранслоиные решения при  $z = 1$ ,  $\tilde{w}(\tilde{z})$ ,  $\tilde{T}(\tilde{z})$  — погранслоиные решения при  $z = 0$ ,  $\tilde{z} = \frac{z}{\varepsilon}$ . Для параметров задачи  $\beta$  и  $\lambda$  разложения разыскиваются в форме

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \varepsilon^2 \lambda_2 \dots, \quad \beta = \beta_0 + \varepsilon \beta_1 + \varepsilon^2 \beta_2 + \dots \quad (11)$$

С учетом (10), (11), краевые условия (8), (9) записываются в виде

$$z = 0: \quad w(0) + \tilde{w}(0) = \beta \tilde{D}^2 \tilde{w}(0) + \varepsilon^2 D^2 w(0) + \alpha^2 (T(0) + \tilde{T}(0)) = 0, \\ \tilde{D} \tilde{T}(0) + \varepsilon [DT(0) - Bi(T(0) + \tilde{T}(0))] = 0, \quad \tilde{D} = \frac{d}{d\tilde{z}}, \quad (12)$$

$$z = 1: \quad w(1) + \bar{w}(0) = 0, \quad \varepsilon Dw(1) - \bar{D} \bar{w}(0) = 0, \quad \bar{D} = \frac{d}{d\bar{z}}, \\ B_1 \bar{D} \bar{T}(0) - \varepsilon [B_1 DT(1) + B_0 (T(1) + \bar{T}(0))] = 0. \quad (13)$$

Неизвестные функции в (10) разыскиваются в виде рядов по степеням  $\varepsilon$  [8]

$$w = w_0(z) + \varepsilon w_1(z) + \dots, \quad T = T_0(z) + \varepsilon T_1(z) + \dots, \\ \tilde{w} = \tilde{w}_0(\tilde{z}) + \varepsilon \tilde{w}_1(\tilde{z}) + \dots, \quad \tilde{T} = \tilde{T}_0(\tilde{z}) + \varepsilon \tilde{T}_1(\tilde{z}) + \dots, \quad (14) \\ \bar{w} = \varepsilon [\bar{w}_0(\bar{z}) + \varepsilon \bar{w}_1(\bar{z}) + \dots], \quad \bar{T} = \varepsilon [\bar{T}_0(\bar{z}) + \varepsilon \bar{T}_1(\bar{z}) + \dots].$$

Подстановка (14) в (10), а затем в (7), (12), (13) дает серию задач для нахождения нулевого и последующих приближений. Далее рассматривается случай  $B_1 = 1$ ,  $B_0 = 0$ , что соответствует фиксированному тепловому потоку на твердой стенке, при этом предполагается, что  $1 - Pr = O(1)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . При нулевой степени  $\varepsilon$  для  $w_0$ ,  $T_0$ ,  $\tilde{w}_0$ ,  $\tilde{T}_0$ ,  $\bar{w}_0$ ,  $\bar{T}_0$  получается система

$$\lambda_0 L w_0 + \alpha^2 T_0 = 0, \quad \lambda_0 T_0 + w_0 = 0, \\ \lambda_0 \frac{d^2 \bar{w}_0}{d\bar{z}^2} = \frac{d^4 \bar{w}_0}{d\bar{z}^4}, \quad \lambda_0 \bar{T}_0 Pr = \frac{d^2 \bar{T}_0}{d\bar{z}^2} - \bar{w}_0 Pr, \quad (15) \\ \lambda_0 \frac{d^2 \tilde{w}_0}{d\tilde{z}^2} = \frac{d^4 \tilde{w}_0}{d\tilde{z}^4}, \quad \lambda_0 \tilde{T}_0 Pr = \frac{d^2 \tilde{T}_0}{d\tilde{z}^2} - \tilde{w}_0 Pr.$$

Уравнения (15) дополняются краевыми условиями

$$w_0(0) + \tilde{w}_0(0) = 0, \quad \alpha^2 \left( \tilde{T}_0(0) + T_0(0) \right) + \beta_0 \frac{d^2 \tilde{w}_0}{dz^2} \Big|_{z=0} = 0, \quad \frac{d\tilde{T}_0}{dz} \Big|_{z=0} = 0, \quad (16)$$

$$w_0(1) = \frac{dw_0}{dz} \Big|_{z=1} - \frac{d\bar{w}_0}{d\bar{z}} \Big|_{\bar{z}=0} = \frac{dT_0}{dz} \Big|_{z=1} - \frac{d\bar{T}_0}{d\bar{z}} \Big|_{\bar{z}=0} = 0. \quad (17)$$

Решения (15) имеют вид:

$$T_0(z) = A_0 \operatorname{ch} pz + C_0 \operatorname{sh} pz, \quad w_0(z) = -\lambda_0 T_0, \quad (18)$$

$$\bar{w}_0(\bar{z}) = \bar{A}_0 e^{-\sqrt{\lambda_0} \bar{z}}, \quad \bar{T}_0(\bar{z}) = \frac{\bar{A}_0 \operatorname{Pr} e^{-\sqrt{\lambda_0} \bar{z}}}{(1 - \operatorname{Pr}) \lambda_0} + \bar{C}_0 e^{-\sqrt{\operatorname{Pr}} \sqrt{\lambda_0} \bar{z}}, \quad (19)$$

$$\tilde{w}_0(\tilde{z}) = \tilde{A}_0 e^{-\sqrt{\lambda_0} \tilde{z}}, \quad \tilde{T}_0(\tilde{z}) = \frac{\tilde{A}_0 \operatorname{Pr} e^{-\sqrt{\lambda_0} \tilde{z}}}{(1 - \operatorname{Pr}) \lambda_0} + \tilde{C}_0 e^{-\sqrt{\operatorname{Pr}} \sqrt{\lambda_0} \tilde{z}}. \quad (20)$$

Для анализа колебательной потери устойчивости декремент  $\lambda_0$  полагается равным  $\lambda_0 = ic_0$ , где  $c_0 > 0$ . Из двух значений квадратного корня  $\sqrt{\lambda_0}$  выбирается то, вещественная часть которого положительна  $\sqrt{\lambda_0} = (1 + i)\sqrt{c_0}/\sqrt{2}$ . В этом случае решения (19)–(20) являются погранслойнными функциями. Число  $p$  определяется из характеристического уравнения

$$\lambda_0^2(p^2 - \alpha^2) - \alpha^2 = 0, \quad p = \alpha \sqrt{1 + \frac{1}{\lambda_0^2}}.$$

Подстановка (18)–(20) в краевые условия (16), (17) дает однородную систему линейных алгебраических уравнений  $M_0 \mathbf{C} = 0$  относительно коэффициентов  $\mathbf{C} = [A_0, C_0, \tilde{A}_0, \tilde{C}_0, \bar{A}_0, \bar{C}_0]$  с матрицей:

$$M_0 = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha^2 & 0 & m_{2,3} & \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\operatorname{Pr} \lambda_0^{-\frac{1}{2}}}{\operatorname{Pr} - 1} & -(\operatorname{Pr} \lambda_0)^{1/2} & 0 & 0 \\ -\lambda_0 \operatorname{ch} p & -\lambda_0 \operatorname{sh} p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_0 p \operatorname{sh} p & -\lambda_0 p \operatorname{ch} p & 0 & 0 & \sqrt{\lambda_0} & 0 \\ p \operatorname{sh} p & p \operatorname{ch} p & 0 & 0 & \frac{\operatorname{Pr} \lambda_0^{-1/2}}{\lambda_0(1 - \operatorname{Pr})} & (\operatorname{Pr} \lambda_0)^{1/2} \end{pmatrix}.$$

Здесь  $m_{2,3} = \frac{\alpha^2 \operatorname{Pr} + \beta_0 \lambda_0^2 (1 - \operatorname{Pr})}{(1 - \operatorname{Pr}) \lambda_0}$ . Дисперсионное соотношение задачи получается из равенства нулю определителя матрицы  $M_0$

$$\left( \alpha^2 + \beta_0 \lambda_0^2 (\sqrt{\operatorname{Pr}} + 1) \right) \operatorname{sh} p = 0. \quad (21)$$

Уравнение (21) имеет две ветви корней. Для первой ветви  $\operatorname{sh} p = 0$ , тогда  $p = iy$ ,  $y = \pi n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ; и

$$\lambda_0 = ic_0, \quad c_0 = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi^2 n^2 + \alpha^2}}. \quad (22)$$

Соответствующий собственный вектор равен

$$\mathbf{C}_1 = \left[ 0, 1, 0, 0, \sqrt{\lambda_0} p \operatorname{ch} p, \frac{p \operatorname{ch} p}{\sqrt{\lambda_0} (-1 + \operatorname{Pr}) \sqrt{\operatorname{Pr}}} \right]. \quad (23)$$

Собственный вектор комплексно-сопряженной матрицы  $M_0^*$  имеет вид

$$\mathbf{C}_1^* = \left[ \frac{\sqrt{i\text{Pr}}}{\sqrt{c_0}\alpha^2(\sqrt{\text{Pr}}+1)} \left( (1+\sqrt{\text{Pr}})\beta_0 c_0^2 + \alpha^2\sqrt{\text{Pr}} \right), \frac{\sqrt{-ic_0\text{Pr}}}{\alpha^2}, 1, \right. \\ \left. -\sqrt{i} \frac{\sqrt{\text{Pr}}[(1+\sqrt{\text{Pr}})\beta_0 c_0^2 - \alpha^2]}{\alpha^2(1+\sqrt{\text{Pr}})\sqrt{c_0} \cos y}, 0, 0 \right]. \quad (24)$$

Для собственных значений второй ветви получается соотношение

$$\lambda_0^2 = -\frac{\alpha^2}{\beta_0(\sqrt{\text{Pr}}+1)}, \quad (25)$$

из которого следует, что  $\lambda_0^2 < 0$ , само  $\lambda_0$  определяется на следующем шаге. Соответствующие собственные векторы матриц  $M_0$  и  $M_0^*$  выбираются в виде:

$$\mathbf{C}_2 = \left[ 1, -\text{cth } p, \lambda_0, \frac{\sqrt{\text{Pr}}}{\text{Pr}-1}, -\frac{\sqrt{\lambda_0}p}{\text{sh } p}, \frac{p}{\sqrt{\lambda_0}(1-\text{Pr})\text{sh } p\sqrt{\text{Pr}}} \right], \quad (26)$$

$$\mathbf{C}_2^* = \left[ \frac{-\alpha^2}{\lambda_0}, 1, \frac{i\alpha^2}{\sqrt{\text{Pr}}\sqrt{\lambda_0}}, 0, 0, 0 \right]. \quad (27)$$

Решения (22) соответствуют возникновению внутренних, а (25) — возникновению поверхностных волн [4]. Внутренние волны отвечают колебаниям вертикальных слоев в идеальной жидкости, а поверхностные волны являются продольными волнами растяжения и характеризуются значительными скоростями в пограничном слое вблизи свободной поверхности.

Неоднородная система для определения членов разложения первого порядка  $\mathbf{V}_1 = [w_1, T_1, \tilde{w}_1, \tilde{T}_1, \bar{w}_1, \bar{T}_1]$  имеет вид

$$\alpha^2 T_1 + \lambda_0 L w_1 = -\lambda_1 L w_0, \quad \lambda_0 T_1 + w_1 = -\lambda_1 T_0, \\ \frac{d^4 \tilde{w}_1}{dz^4} - \lambda_0 \frac{d^2 \tilde{w}_1}{dz^2} = \lambda_1 \frac{d^2 \tilde{w}_0}{dz^2}, \quad \frac{1}{\text{Pr}} \frac{d^2 \tilde{T}_1}{dz^2} - \tilde{w}_1 - \lambda_0 \tilde{T}_1 = \lambda_1 \tilde{T}_0, \quad (28)$$

$$\frac{d^4 \bar{w}_1}{dz^4} - \lambda_0 \frac{d^2 \bar{w}_1}{dz^2} = \lambda_1 \frac{d^2 \bar{w}_0}{dz^2}, \quad \frac{1}{\text{Pr}} \frac{d^2 \bar{T}_1}{dz^2} - \bar{w}_1 - \lambda_0 \bar{T}_1 = \lambda_1 \bar{T}_0, \\ w_1(0) + \tilde{w}_1(0) = 0, \quad \alpha^2 (T_1(0) + \tilde{T}_1(0)) + \beta_0 \frac{d^2 \tilde{w}_1}{dz^2} \Big|_{z=0} = -\beta_1 \frac{d^2 \tilde{w}_0}{dz^2} \Big|_{z=0}, \\ \frac{d\tilde{T}_1}{dz} \Big|_{z=0} = -\frac{dT_0}{dz} \Big|_{z=0} + \text{Bi}(\tilde{T}_0(0) + T_0(0)), \quad (29)$$

$$w_1(1) = -\bar{w}_0(0), \quad \frac{dw_1}{dz} \Big|_{z=1} - \frac{d\bar{w}_1}{dz} \Big|_{z=0} = \frac{dT_1}{dz} \Big|_{z=1} - \frac{d\bar{T}_1}{dz} \Big|_{z=0} = 0.$$

Вектор  $\mathbf{V}_1$  разыскивается как сумма общего решения однородной системы ( $\mathbf{V}_1^0$ ) и частного решения неоднородной системы ( $\mathbf{V}_1^1$ ), которое имеет вид

$$w_1^1 = -\lambda_0 T_1 - \lambda_1 T_0, \quad T_1^1 = -\frac{\lambda_1 (p^2 - \alpha^2) z (A_0 \text{ch } pz + C_0 \text{sh } pz)}{\lambda_0 p}.$$

Погранслоное решение вблизи свободной границы дается формулами

$$\tilde{w}_1^1 = -\frac{\lambda_1 \tilde{A}_0 \tilde{z} e^{-\sqrt{\lambda_0} \tilde{z}}}{2\sqrt{\lambda_0}}, \quad \tilde{T}_1^1 = \tilde{C}_{12} \tilde{z} e^{-\sqrt{\text{Pr}}\sqrt{\lambda_0} \tilde{z}} + (\tilde{C}_{13} + \tilde{C}_{14} \tilde{z}) e^{-\sqrt{\lambda_0} \tilde{z}},$$

$$\tilde{C}_{12} = -\frac{\sqrt{\text{Pr}}\lambda_1\tilde{C}_0}{2\sqrt{\lambda_0}}, \quad \tilde{C}_{13} = \frac{\tilde{A}_0\text{Pr}\lambda_1}{(\text{Pr}-1)\lambda_0^2}, \quad \tilde{C}_{14} = \frac{\tilde{A}_0\text{Pr}\lambda_1}{2\lambda_0^{3/2}(\text{Pr}-1)}.$$

Погранслоное решение, соответствующее твердой стенке, имеет вид

$$\bar{w}_1^1 = -\frac{\lambda_1\bar{A}_0\bar{z}e^{-\sqrt{\lambda_0}\bar{z}}}{2\sqrt{\lambda_0}}, \quad \bar{T}_1^1 = \bar{C}_{12}\bar{z}e^{-\sqrt{\text{Pr}}\sqrt{\lambda_0}\bar{z}} + (\bar{C}_{13} + \bar{C}_{14}\bar{z})e^{-\sqrt{\lambda_0}\bar{z}},$$

$$\bar{C}_{12} = -\frac{\sqrt{\text{Pr}}\lambda_1\bar{C}_0}{2\sqrt{\lambda_0}}, \quad \bar{C}_{13} = \frac{\bar{A}_0\text{Pr}\lambda_1}{(\text{Pr}-1)\lambda_0^2}, \quad \bar{C}_{14} = \frac{\bar{A}_0\text{Pr}\lambda_1}{2\lambda_0^{3/2}(\text{Pr}-1)}.$$

Структура общего решения однородной системы  $\mathbf{V}_1^0$  совпадает с (18)–(20).

Решение системы  $M_0\mathbf{C}_1 = \mathbf{F}_1$  существует, если выполняется условие разрешимости  $(\mathbf{F}_1, \mathbf{C}^*) = 0$ , где  $\mathbf{C}^*$  – решение комплексно-сопряженной однородной системы, см. формулы (24), (27). Из (29) находится вектор правых частей  $\mathbf{F}_1 = [f_1^1, f_2^1, f_3^1, f_3^1, f_5^1, f_6^1]$ . Для первой ветви (22) условие ортогональности приводит к равенству

$$p^2 - \left[ (p^2 - \alpha^2)\lambda_1 + p^2\sqrt{i}\sqrt{c_0} \right] \sqrt{-i}Q = 0 \tag{30}$$

с вещественной функцией

$$Q = \frac{\sqrt{\text{Pr}}\left( (1 + \sqrt{\text{Pr}})\beta_0c_0^2 - \alpha^2 \right)}{\sqrt{c_0}\alpha^2(1 + \sqrt{\text{Pr}})}.$$

Из равенства нулю мнимой и вещественных частей уравнения (30) получается

$$\lambda_1 = 0, \quad \beta_0 = \frac{\alpha^2(2\sqrt{\text{Pr}} + 1)}{c_0^2\sqrt{\text{Pr}}(\sqrt{\text{Pr}} + 1)}. \tag{31}$$

Для второй ветви собственных значений (25) собственный вектор сопряженной задачи дается формулой (27), а условие разрешимости записывается в виде:

$$\lambda_1 - \frac{\lambda_0}{\alpha^2} \left[ \frac{\alpha^2\text{Pr}\lambda_1}{\lambda_0(\text{Pr}-1)} + \lambda_0(\beta_0\lambda_1 + \beta_1\lambda_0) \right] +$$

$$\frac{\sqrt{\lambda_0}}{\sqrt{\text{Pr}}} \left[ \frac{\lambda_1\text{Pr}}{\sqrt{\lambda_0}(\text{Pr}-1)} + p \text{cth } p + \frac{\text{Bi}}{(\sqrt{\text{Pr}} + 1)} \right] = 0. \tag{32}$$

Вещественная часть (32) дает уравнение для  $p = iy$ :

$$y \text{cth } y = -\frac{\text{Bi}}{\sqrt{\text{Pr}} + 1}, \quad \sin y \neq 0.$$

Из мнимой части (32) получается соотношение, которое связывает  $\lambda_1$  и  $\beta_1$ :

$$\frac{2\lambda_1}{1 + \sqrt{\text{Pr}}} + \frac{\beta_1\lambda_0^3}{\alpha^2} = 0. \tag{33}$$

Аналогичная процедура применяется для вывода следующих членов разложений спектрального параметра и собственных функций. Далее исследование проводится по той же схеме, что и для первого приближения. Сначала находятся частные решения неоднородной задачи, затем из краевых условий получаются условия разрешимости. Для первой ветви (25) условие разрешимости имеет вид

$$p\lambda_0 \left( \frac{\beta_1\lambda_0^{5/2}\sqrt{\text{Pr}}p}{\alpha^2} - \frac{\text{Bi} (2\sqrt{\text{Pr}} + 1)p}{\lambda_0^2 (\text{Pr} + \sqrt{\text{Pr}})} \right) + \frac{\alpha^4 (\text{Pr} + 1)}{2\lambda_0^3\text{Pr}} - \frac{\alpha^2\lambda_2}{\lambda_0} = 0. \tag{34}$$

Далее используются обозначения  $\lambda_1 = ic_1$ ,  $\lambda_2 = ic_2$ . Из равенства нулю действительной и мнимой части (34) выводятся соотношения

$$\begin{aligned} \beta_1 &= -\frac{\sqrt{2}\alpha^6(\text{Pr} + 1)}{2c_0^{13/2}\text{Pr}^{3/2}y^2} + \frac{\sqrt{2}\alpha^2\text{Bi}(2\sqrt{\text{Pr}} + 1)}{c_0^{9/2}\sqrt{\text{Pr}}(\text{Pr} + \sqrt{\text{Pr}})}, \\ c_2 &= -\frac{y^2c_0^{9/2}\beta_1\sqrt{2}\sqrt{\text{Pr}}}{2\alpha^4}. \end{aligned} \quad (35)$$

Для второй ветви (22) получается линейное уравнение относительно  $\lambda_1$ :

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{\lambda_0}x^2\lambda_1}{\sqrt{\text{Pr}}\text{sh}^2p} \left( \frac{\text{ch}p\text{sh}p}{p} - \alpha^2 \right) + \frac{3\alpha^2\lambda_1^2\lambda_0^{-2}}{\sqrt{\text{Pr}} + 1} + \beta_2\lambda_0^2 - \frac{2\alpha^2\lambda_2}{\lambda_0(\sqrt{\text{Pr}} + 1)} + \\ &\frac{1}{\lambda_0} \left[ \frac{\alpha^2p^2}{\text{Pr}} - \frac{\alpha^2\text{Bi}}{(\sqrt{\text{Pr}} + 1)^2\text{ch}p} \left( \frac{\text{Bi}}{\sqrt{\text{Pr}}\text{ch}p} + \frac{\alpha^2x\text{sh}p}{p} \right) - \frac{(2 + \sqrt{\text{Pr}})\alpha^2}{(\sqrt{\text{Pr}} + 1)^2} + \right. \\ &\left. \alpha^4 \left( \frac{3\text{Pr}^{3/2} + 4\text{Pr} - 3\sqrt{\text{Pr}} - 2}{2\text{Pr}(\sqrt{\text{Pr}} + 1)^2} + \frac{1}{2\lambda_0^2\sqrt{\text{Pr}}} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Равенство нулю мнимой части последнего выражения дает уравнение для  $c_1$ . Таким образом, для каждой ветви найдены два члена асимптотического разложения спектрального параметра  $\lambda$  и критического параметра  $c$ :

$$c = c_0 + \varepsilon c_1 + \dots, \quad \beta = \beta_0 + \varepsilon \beta_1 + \dots \quad (37)$$

Главные члены асимптотики  $\beta_0$  и  $c_0$  совпадают с построенными в [4] коэффициентами для случая изотермической твердой стенки.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Построенные асимптотики позволили усовершенствовать численную схему решения задачи (7)–(9) с малым параметром при старшей производной. Вычисление спектрального параметра  $\lambda$  и критического значения числа Рэлея  $\text{Ra}$  в зависимости от волнового числа  $\alpha$  при прочих фиксированных параметрах проводилось следующим образом. Для исследования колебательной неустойчивости спектральный параметр представлялся в виде  $\lambda = ic$ . Решение системы уравнений (7) находилось аналитически.

Найденные решения подставлялись в краевые условия (8), (9) и из условия вырожденности полученной системы линейных уравнений, получалось комплекснозначное трансцендентное уравнение

$$f(\varepsilon, \alpha, \beta, \lambda) = 0.$$

При фиксированных значениях параметров  $\varepsilon^*$  и  $\alpha^*$  для нахождения параметров  $\beta$  и  $c$  методом Ньютона решалась система

$$\begin{cases} F_1(\beta, c) = \text{Re}(f(\varepsilon^*, \alpha^*, \beta, \lambda)) = 0, \\ F_2(\beta, c) = \text{Im}(f(\varepsilon^*, \alpha^*, \beta, \lambda)) = 0. \end{cases} \quad (38)$$

Для определения начальных точек каждой нейтральной кривой использовались асимптотические формулы (37) с коэффициентами разложений (22), (25).

На Рис. 1 слева представлены первые ветви спектрального параметра  $c(\alpha)$  в зависимости от волнового числа  $\alpha$  для внутренних волн (сплошная линия) и поверхностных волн (пунктир). Эти ветви соответствуют наименьшим корням уравнений (22) и (25), (32). Для значений

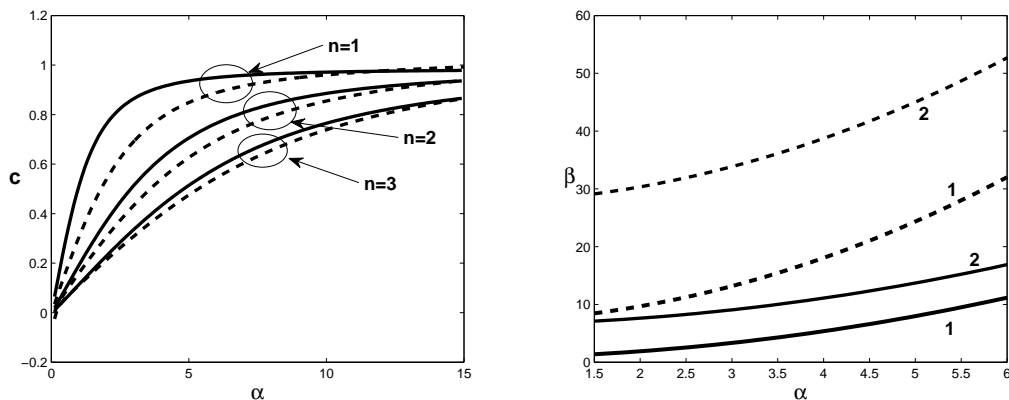


Рис. 1. Нейтральные кривые спектрального параметра  $c$  (слева) и  $\beta$  (справа) от  $\alpha$  для поверхностных волн (пунктир) и внутренних волн (сплошная линия) асимптотического разложения.

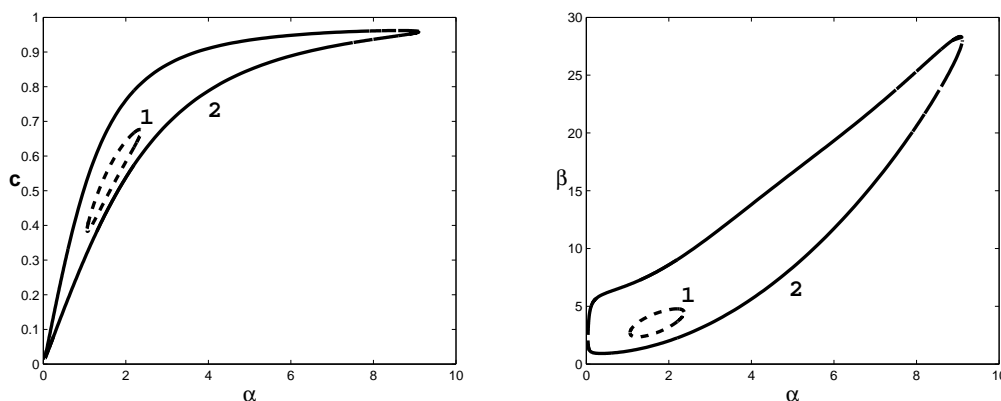


Рис. 2. Нейтральные кривые  $C(\alpha)$  (слева) и  $\beta(\alpha)$  (справа) при различных  $\varepsilon$ .  $\varepsilon = 0.044$  (кривая 1),  $\varepsilon = 0.01$  (кривая 2)

параметра  $\beta$  (отношения чисел Рэлея и Марангони) характерно значительное по величине расхождение критических значений для поверхностных и внутренних волн.

Результаты расчетов нейтральных кривых для спектрального параметра  $c$  и  $\beta$  при различных значениях  $\varepsilon$  приведены на Рис. 2. Обнаружено, что начиная с некоторого значения  $\varepsilon$ , на плоскости  $(\alpha, c)$  появляются замкнутые нейтральные кривые, которые состоят из двух частей, одна соответствует внутренним волнам, а другая — поверхностным. С уменьшением параметра  $\varepsilon$  появляются новые замкнутые ветви, а также увеличивается размер имеющихся ветвей.

Результаты, приведенные на Рис. 3 свидетельствуют о том, что асимптотическое разложение дает лучшее приближения для спектрального параметра  $c$ , чем для параметра  $\beta$ . Наибольшая погрешность получается вблизи пересечения двух ветвей собственных значений.

Вычисление  $\beta(\alpha)$  при фиксированном  $\varepsilon$  соответствует тому, что число Марангони  $Ma$  постоянно, а определять следует критическое значение числа Рэлея  $Ra$ . Так как параметры  $Ra$  и  $Ma$  зависят от градиента температуры, то физически более оправданным при фиксированном  $\beta$  является выбор числа Рэлея  $Ra$  в качестве управляющего конвекцией параметра. В этом случае из задачи (7)–(9) рассчитывается  $\varepsilon(\alpha)$  при фиксированном  $\beta$ . В качестве начального приближения при малых  $\varepsilon$  можно использовать  $\alpha$  и  $c_0$ , определяемые из уравнения  $\beta_0(\alpha, c_0) = \beta$ , где функция  $\beta_0$  дается формулой (37).



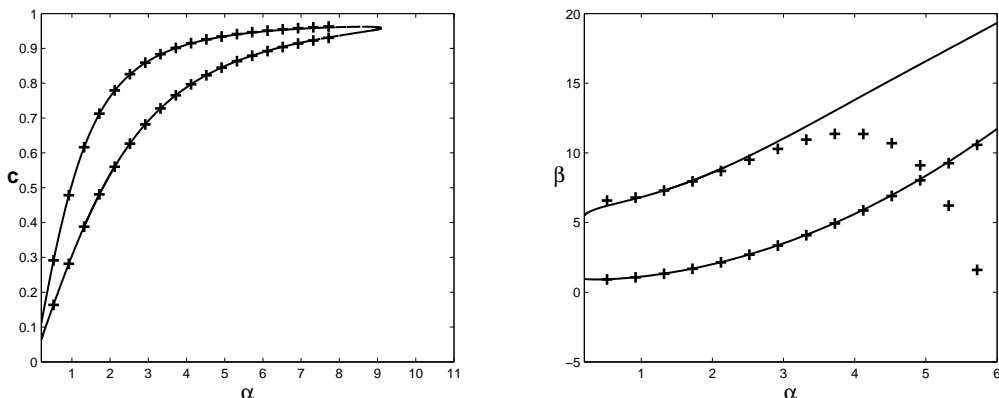


Рис. 3. Сравнение нейтральных кривых (сплошная линия) и асимптотика (крестики),  $\varepsilon = 0.01$ ,  $Pr = 6$ . Слева  $c(\alpha)$ , справа  $\beta(\alpha)$

Например, при  $\beta = 0.9$  и  $Pr = 6$ , получается следующее начальное приближение  $\alpha_0 = 0.761248$ ,  $\beta_1 = 9.05$ ,  $c_0 = 0.4320$ , которое соответствует вертикальной асимптоте нейтральной кривой  $Ra(\alpha)$ . Расчет нейтральной кривой начинается в этой точке, остальные значения вычисляются с помощью метода Ньютона.

При значении параметра  $\beta = 7$ , находятся уже три начальные точки, которые соответствуют двум ветвям нейтральных кривых:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 0.396167, & b_0 &= 7.00, & b_1 &= -98.3860, & c_0 &= 0.125113; \\ \alpha_0 &= 4.649784, & b_0 &= 6.9997, & b_1 &= 25.95, & c_0 &= 0.9463; \\ \alpha_0 &= 1.370636, & b_0 &= 6.9991, & b_1 &= 93.76, & c_0 &= 0.2789. \end{aligned}$$

Таким образом находятся начальные точки тех кривых, которые отвечают погранслойным асимптотикам. Количество начальных точек и их расположение на плоскости  $(\alpha, -Ra)$  определяет расположение соответствующих нейтральных кривых.

Нейтральные кривые в логарифмическом масштабе приведены на Рис. 4. Сплошной линией построена кривая при  $\beta = 0.9$ , а пунктиром — две кривые соответствующие  $\beta = 7$ .

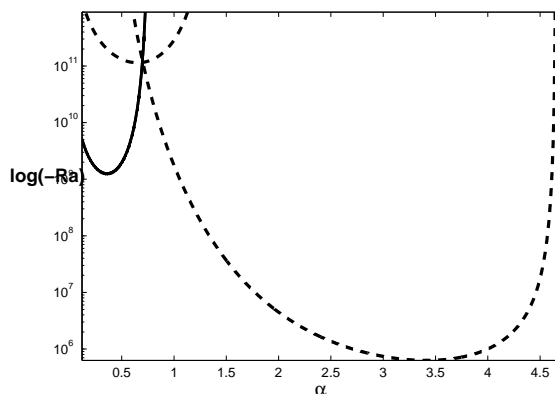


Рис. 4. Нейтральная кривая  $Ra(\alpha)$   $Pr = 6$ ,  $\beta = 0.9$  (сплошная линия),  $\beta = 7$  (пунктир).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гершуни Г.З. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости / Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкий. — М.: Наука, 1972. — 392 с.
- [2] Юдович В.И. О границе монотонной и колебательной конвективной устойчивости горизонтального слоя жидкости / В.И. Юдович // Прикладная механика и теоретическая физика. — 1991. — Т. 6. — С. 44–50.
- [3] Takashima M. Surface tension driven instability in a horizontal liquid layer with a deformable free surface. II. Overstability / M. Takashima // J. Phys. Soc. Japan. — 1981. — Vol. 50. — P. 2751–2756.
- [4] Rayleigh–Marangoni oscillatory instability in a horizontal liquid layer heated from above: coupling and mode mixing of internal and surface dilational waves / A.Ye. Rednikov, P. Colinet, M.G. Velarde, J.C. Legros // Journal of Fluid Mechanics. — 2000. — Vol. 405. — P. 57–77.
- [5] Colinet P. Nonlinear Dynamics of Surface-Tension-Driven Instabilities / P. Colinet, J.C. Legros, M.G. Velarde. — Wiley-VCH, 2001. — 512 p.
- [6] Вишик М.И. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром / М.И. Вишик, Л.А. Люстерник // Успехи математических наук. — 1957. — Т. 12, № 5. — С. 3–122.
- [7] Вишик М.И. Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений. I / М.И. Вишик, Л.А. Люстерник // Успехи математических наук. — 1960. — Т. 15, № 3. — С. 3–80.
- [8] Зеньковская С.М. Возникновение конвекции в горизонтальном слое со свободной поверхностью при нагреве сверху / С.М. Зеньковская, О.А. Прозоров. — Ростов-на-Дону, 2012. — 20 с. Рукопись деп. в ВИНТИ, № 442–В2012.

## REFERENCES

- [1] Gershuni G.Z., Zhuhovitskiy E.M. Convective Stability of Incompressible Fluids. [Gershuni G.Z., Zhuxovickij E.M. Konvektivnaya ustojchivost' neszhimaemoj zhidkosti]. Moscow: Nauka, 1972. 392 p.
- [2] Yudovich V.I. Boundary of monotonic and oscillatory convective stability of a horizontal fluid layer. [Yudovich V.I. O granice monotonnoj i kolebatel'noj konvektivnoj ustojchivosti gorizontaln'ogo sloya zhidkosti]. *Prikladnaya mexanika i teoreticheskaya fizika — Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1991, vol. 32, iss. 6, pp. 861–866.
- [3] Takashima M. Surface tension driven instability in a horizontal liquid layer with a deformable free surface. II. Overstability. *J. Phys. Soc. Japan*. 1981, vol. 50, pp. 2751–2756.
- [4] Rednikov A.Ye., Colinet P., Velarde M.G., Legros J.C. Rayleigh–Marangoni oscillatory instability in a horizontal liquid layer heated from above: coupling and mode mixing of internal and surface dilational waves. *Journal of Fluid Mechanics*. 2000, vol. 405, pp. 57–77.
- [5] Colinet P., Legros J.C., Velarde M.G. Nonlinear Dynamics of Surface-Tension-Driven Instabilities. Wiley-VCH, 2001, 512 p.
- [6] Vishik M.I., Lyusternik L.A. Regular degeneracy and boundary layer for linear differential equations small parameter. [Vishik M.I., Lyusternik L.A. Reguljarnoe vyrozhdenie i pograničnyj sloj dlya linejnyx differencial'nyx uravnenij s malym parametrom]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 1957, vol. 12, no. 5, p. 3–122.
- [7] Vishik M.I., Lyusternik L.A. The solution of some perturbation problems for matrices and selfadjoint or non-selfadjoint differential equations I. [Vishik M.I., Lyusternik L.A. Reshenie nekotoryx zadach o vozmushhenii v sluchae matric i samosopryazhennyx i nesamosopryazhennyx differencial'nyx uravnenij. I]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 1960, vol. 15, no. 3, pp. 1–73.

[8] Zenkovskaya S.M., Prozorov O.A. Onset of convection in a horizontal liquid layer with free boundary heated from above. [Zen'kovskaya S.M., Prozorov O.A. Voznikovenie konvekcii v gorizonta'nom sloe so svobodnoj poveryxnost'yu pri nagreve sverxu]. *Rostov-na-Donu, 2012. — 20 s. Rukopis' dep. v VINITI, № 442-V2012. — VINITI. 2012. № 442-V2012. 20 p.*

*Прозоров Олег Александрович, ассистент кафедры Вычислительной математики и математической физики Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, Южный Федеральный Университет, Ростов-на-Дону, Российская Федерация*

*E-mail: oaprozorov@gmail.com*

*Тел.: 8(8632)2975111 (доб. 214)*

*Prozorov Oleg Aleksandrovich, Assistant professor, The department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Institute for Mathematics, Mechanics, and Computer Science in the name of I.I. Vorovich, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation*

*E-mail: oaprozorov@gmail.com*

*Tel.: 8(8632)2975111 (доб. 214)*