УДК 517.9

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ*

А. В. Карпикова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 01.06.2014 г.

Аннотация: в статье рассматривается интегро-дифференциальный оператор $L : D(L) \subset L_2[0, 2\pi] \to L_2[0, 2\pi]$, который задается выражением $l(y) = -y'' - \int\limits_0^{2\pi} G(t, s)y(s)ds$ и периодическими краевыми условиями $y(0) = y(2\pi), y'(0) = y'(2\pi)$.

Результаты статьи связаны с изучением асимптотики собственных значений рассматриваемого оператора. Для исследования оператора L и получения его асимптотических оценок применяется метод подобных операторов. Суть этого метода состоит в преобразовании подобия исследуемого (возмущенного) оператора в оператор, спектральные свойства которого близки к спектральным свойствам невозмущенного оператора (в данном случае оператор A). Тем самым существенно упрощается изучение оператора L.

Основным результатом статьи является теорема 1, в которой получена асимптотика собственных значений рассматриваемого интегро-дифференциального оператора.

Ключевые слова: метод подобных операторов, спектр оператора, асимптотика спектра.

SPECTRUM ASYMPTOTIC OF INTEGRO-DIFFERENTIAL OPERATOR WITH PERIODIC BOUNDARY CONDITIONS

A. Karpikova

Abstract: in this paper considers the integro-differential operator $L : D(L) \subset L_2[0, 2\pi] \to L_2[0, 2\pi]$, which is given by the equation $l(y) = -y'' - \int\limits_0^{2\pi} G(t, s)y(s)ds$ with periodic boundary condition $y(0) = y(2\pi), y'(0) = y'(2\pi)$.

The results are connected with the studying of the eigenvalues of the operator and their asymptotic behavior. For studying the operator L and obtaining its asymptotic estimates is used the similar operators method. The essence of this method is in similarity transformation of the studied(perturbed) operator to operator, which spectral properties are closed to the spectral properties of the unperturbed operator (in this case, the operator A). Thus greatly simplifies the studying of the operator L.

The main result of this paper is the Theorem 1, in which the asymptotic behavior of the eigenvalues of the considered integral-differential operator is obtained.

Keywords: similar operators method, operator spectrum, spectrum asymptotic.

1. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $L_2[0, 2\pi]$ — гильбертово пространство комплексных измеримых на $[0, 2\pi]$ и суммируемых с квадратом модуля функций со скалярным произведением вида:

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 14-01-31196).

$$(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}x(\tau)\overline{y(\tau)}d\tau,\qquad x,y\in L_2[0,2\pi].$$

Рассматривается интегро-дифференциальный оператор $L:D(L)\subset L_2[0,2\pi]\to L_2[0,2\pi]$, который задается выражением

$$l(y)=-y''-\int\limits_0^{2\pi}G(t,s)y(s)ds$$

и периодическими краевыми условиями $y(0)=y(2\pi),y'(0)=y'(2\pi)$.

Оператор L представим в виде $L=A-B$, где оператор $A:D(A)=D(L)\subset L_2[0,2\pi]\to L_2[0,2\pi]$ задаётся дифференциальным выражением

$$l_0(y)=-y''$$

и указанными периодическими краевыми условиями, а оператор B — произвольный интегральный оператор Гильберта—Шмидта, т.е. конечна величина $\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|G(t,s)|^2dsdt$. При этом $\|B\|_2=\left(\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|G(t,s)|^2dsdt\right)^{\frac{1}{2}}$.

Оператор A является самосопряженным с компактной резольвентой. Его спектр $\sigma(A)$ имеет вид: $\sigma(A)=\{(n)^2,n\in\mathbb{Z}_+=\mathbb{N}\cup\{0\}\}$, $E_n^0=Span\{e_n^{(1)},e_n^{(2)}\}$ – собственное подпространство для собственного значения $(n)^2$, $n\neq 0$, где $e_n^{(1)}(t)=e_n(t)=e^{int},e_n^{(2)}(t)=e_{-n}(t)=e^{-int},t\in[0,2\pi]$.

В данной работе для исследования спектральных свойств интегро–дифференциального оператора используется метод подобных операторов, разработанный в [1]–[7]. Суть этого метода состоит в преобразовании подобия исследуемого оператора в оператор, спектральные свойства которого близки к спектральным свойствам оператора A. Таким образом существенно упрощается изучение исследуемого оператора L.

Одним из основных результатов статьи является теорема 1, в которой получена асимптотика собственных значений оператора L.

В условиях следующей леммы символом $l^p,p\geqslant 1$ обозначаются последовательности, суммируемые со степенью p.

Лемма 1. *Собственные значения* $\widetilde{\lambda}_n^{\pm},n\in\mathbb{N}$, *матрицы*

$$\mathcal{B}(n)+\mathcal{C}(n)=\begin{pmatrix}b_1(n)&b_2(n)\\b_3(n)&b_4(n)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_1(n)&c_2(n)\\c_3(n)&c_4(n)\end{pmatrix},n\in\mathbb{N},$$

где $b_k\in l^2,c_k\in l^1,1\leqslant k\leqslant 4$, *допускают представление вида*

$$\lambda_n^{\pm}=\mu_n^{\pm}+\varepsilon_n^{\pm},n\in\mathbb{N},$$

где $\mu_n^{\pm}$ *— собственные значения матрицы* $\mathcal{B}(n)=\begin{pmatrix}b_1(n)&b_2(n)\\b_3(n)&b_4(n)\end{pmatrix}$ *и последовательность* $(\varepsilon_n^{\pm})$ *принадлежит пространству* $l^{\frac{4}{3}}$.

В формулировке следующей теоремы вводится гильбертово пространство $\mathcal{H}=L_2[0,2\pi]$ и система ортопроекторов $P_n:L_2[0,2\pi]\to L_2[0,2\pi],n\in\mathbb{Z}_+$, вида:

$$P_nx=(x,e_n^{(1)})e_n^{(1)}+(x,e_n^{(2)})e_n^{(2)},$$

причем $AP_n=\lambda_nP_n,n\geqslant 0$. Символом $\mathcal{H}_n$ обозначается образ проекторов P_n, т.е. $\mathcal{H}_n=ImP_n$.

Теорема 1. *Существует число $m \in \mathbb{Z}_+$ такое, что спектр оператора L представим в виде*

$$\sigma(L) = \sigma_{(m)} \bigcup \left(\bigcup_{n \geqslant m+1} \sigma_n \right), \tag{1}$$

где $\sigma_{(m)}$ — конечное множество с числом элементов, не превосходящим $2m+1$, а множества $\sigma_n = \{\lambda_n^+, \lambda_n^-\}$, $n \geqslant m+1$, не более чем двухточечные и определяются равенствами

$$\widetilde{\lambda}_n^{\pm} = n^2 + \mu_n^{\pm} + \varepsilon_n^{\pm}, \qquad n \geqslant m+1, \tag{2}$$

где $\mu_n^{\pm}$– собственные значения матрицы $\mathcal{B}(n) = \begin{pmatrix} (Be_n^{(1)}, e_n^{(1)}) & (Be_n^{(2)}, e_n^{(1)}) \\ (Be_n^{(1)}, e_n^{(2)}) & (Be_n^{(2)}, e_n^{(2)}) \end{pmatrix}$ сужения оператора P_nBP_n на $\mathcal{H}_n$ в базисе $e_n^{(1)}, e_n^{(2)}$ и последовательность $(\varepsilon_n^{\pm})$ обладает свойством $\sum\limits_{n \geqslant m+1} |\varepsilon_n^{\pm}|^{\frac{4}{3}} < \infty$.

Отметим, что полученный результат об асимптотике спектра рассматриваемого оператора может быть существенно использован в спектральном анализе оператора, определенного дифференциальным выражением

$$\widetilde{l}(y) = -y'' - v(t)y$$

с периодическими краевыми условиями, где потенциал v принадлежит $L_2[0, 2\pi]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Баскаков А.Г. Гармонический анализ линейных операторов / А.Г. Баскаков. — Воронеж: Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 1987. — 165 с.

[2] Баскаков А.Г. Методы абстрактного гармонического анализа в теории возмущений линейных операторов / А.Г. Баскаков // Сибирский математический журнал. — 1983. — Т. 24, № 1. — С. 21–39.

[3] Баскаков А.Г. Спектральный анализ возмущенных неквазипериодических и спектральных операторов / А.Г. Баскаков // Известия Российской академии наук. Серия математическая. — 1994. — Т. 58, № 4. — С. 3–32.

[4] Баскаков А.Г. Спектральный анализ интегро-дифференциальных операторов с нелокальными краевыми условиями / А.Г. Баскаков, Т.К. Кацаран // Дифференц. уравнения. — 1988. — Т. 24, № 8. — С. 1424–1433.

[5] Баскаков А.Г. Теорема о расщеплении оператора и некоторые смежные вопросы аналитической теории возмущений / А.Г. Баскаков // Известия Российской академии наук. Серия математическая. — 1986. — Т. 50, № 3. — С. 435–457.

[6] Баскаков А.Г. Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом / А.Г. Баскаков, А.В. Дербушев, А.О. Щербаков // Известия Российской академии наук. Серия математическая. — 2011. — Т. 75, № 3. — С. 3–28.

[7] Карпикова А.В. Асимптотика спектра оператора Хилла-Шрёдингера / А.В. Карпикова // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. — 2014. — Вып. 34. — С. 34–37.

REFERENCES

[1] Baskakov A.G. Harmonic analysis of linear operators. [Baskakov A.G. Garmonicheskij analiz linejnyx operatorov]. Voronezh: Voronezh State University, 1987, 165 p.

[2] Baskakov A.G. Methods of abstract harmonic analysis in the perturbation of linear operators. [Baskakov A.G. Metody abstraktnogo garmonicheskogo analiza v teorii vozmushhenij linejnyx

operatorov]. *Sibirskij matematicheskij zhurnal — Sibirskij matematicheskij zhurnal*, 1983, vol. 24, iss. 1, pp. 21–39.

[3] Baskakov A.G. Spectral analysis of perturbed nonquasianalytic and spectral operators. [Baskakov A.G. Spektral'nyj analiz vozmushhennyx nekvaziperiodicheskix i spektral'nyx operatorov]. *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Seriya matematicheskaya — Izvestiya: Mathematics*, 1994, vol. 58, iss. 4, pp. 3–32.

[4] Baskakov A.G., Katsaran T.K. Spectral analysis of integrodifferential operators with nonlocal boundary conditions. [Baskakov A.G., Kacaran T.K. Spektral'nyj analiz integro-differencial'nyx operatorov s nelokal'nymi kraevymi usloviyami]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 1988, vol. 24, iss. 8, pp. 1424–1433.

[5] Baskakov A.G. A theorem on splitting an operator, and some related questions in the analytic theory of perturbations. [Baskakov A.G. Teorema o rasshheplenii operatora i nekotorye smezhnye voprosy analiticheskoj teorii vozmushhenij]. *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Seriya matematicheskaya — Izvestiya: Mathematics*, 1986, vol. 50, iss. 3, pp. 435–457.

[6] Baskakov A.G., Derbushev A.V., Shcherbakov A.O. The similar operators method in the spectral analysis of non-self-adjoint Dirac operator with non-smooth potential. [Baskakov A.G., Derbushev A.V., Shherbakov A.O. Metod podobnyx operatorov v spektral'nom analize nesamosopryazhennogo operatora Diraka s negladkim potencialom]. *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Seriya matematicheskaya — Izvestiya: Mathematics*, 2011, vol. 75, iss. 3, pp. 3–28.

[7] Karpikova A.V. Spectral asymptotic of Sturm–Liouville operator. [Karpikova A.V. Asimptotika spektra operatora Xilla-Shryodingera]. *Nauchnye vedomosti BelGU. Matematika. Fizika — Scientific statements of Belgorod State University. Series: Mathematics. Physics*, 2014, iss. 34, pp. 34–37.

Карпикова Алина Вячеславовна, аспирант Воронежского государственного университета, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: karpikovaav@mail.ru

Karpikova Alina Viacheslavovna, postgraduate student, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: karpikovaav@mail.ru