УДК 517.927.2; 517.972.2

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ, ПОРОЖДАЕМЫЕ КВАДРАТИЧНЫМИ ФУНКЦИОНАЛАМИ НА ГРАФЕ

М. Г. Завгородний[1], С. П. Майорова[2]

[1] *Воронежский государственный университет,*
[2] *Воронежский государственный технический университет*

Поступила в редакцию 28.08.2014 г.

Аннотация: В работе рассматриваются квадратичные функционалы, заданные на пространстве функций, дважды дифференцируемых на геометрическом графе. Установлено, что функция, дающая стационарное положение рассматриваемого функционала, является решением самосопряженной краевой задачи четвертого порядка. Более того, показано, что краевая задача с условиями, локально заданными в вершинах графа общего вида, является самосопряженной тогда и только тогда, когда она порождается квадратичным функционалом, заданным на некотором подпространстве дважды дифференцируемых на графе функций. Выделен подкласс квадратичных функционалов энергии, содержащий функционалы потенциальной энергии стержневых систем. Для краевых задач, порождаемых функционалами энергии, получены условия невырожденности и описана структура множества решений вырожденной однородной краевой задачи. Рассмотрены краевые задачи, моделирующие малые упругие деформации стержневых систем.

Ключевые слова: геометрический граф, квадратичный функционал, экстремум, краевая задача на графе, самосопряженная краевая задача, невырожденность.

BOUNDARY VALUE PROBLEMS GENERATED BY QUADRATIC FUNCTIONALS ON THE GRAPH

M. G. Zavgorodnij, S. P. Majorova

Abstract: in this paper considers the quadratic functionals defined on the space of functions twice differentiable on a geometric graph. Established that the function giving the stationary position considered functional is a solution of self-adjoint boundary value problem of fourth order. Moreover, it is shown that the boundary value problem with conditions locally defined at the vertices of the graph of the general form, is self-adjoint if and only if it is generated by a quadratic functional defined on a subspace of twice differentiable functions on the graph. Subclass of quadratic functionals of energy containing functionals of the potential energy of bar systems was selected. For boundary value problems generated by the functionals of energy, obtained non-degeneracy conditions and describes the structure of the set of solutions of a degenerate homogeneous boundary value problem. We have considered the boundary value problems modeling small elastic deformation of rod systems.

Keywords: geometric graph, quadratic functional, extremum, boundary value problem on the graph, self-adjoint boundary value problem, non-degeneracy.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть (см. [1]) Γ — геометрический граф (в дальнейшем просто граф) и V — множество всех его вершин. Каждая компоненты связности множества $\Im = \Gamma \backslash V$ является ребром графа Γ. Полагаем, что каждому ребру инцидентны две различные вершины, которые самому ребру не принадлежат. Обозначим через m количество всех ребер графа Γ, а через I^a и δ^a — соответственно множество и количество ребер графа, инцидентных вершине $a \in V$.

Пусть $\tau(x)$ — метрическая функция, введенная в работах [2], [3]. Функция $\tau(x)$ отображает взаимно однозначно каждое ребро $\gamma \in \Im$ на некоторый конечный интервал $(0, h_\gamma)$, $h_\gamma > 0$, вещественной оси. Полагаем, что ребро γ, инцидентное вершинам a и b, ориентировано от вершины a к вершине b, если функция $\tau(x)$ ставит в соответствие вершине a число 0, а вершине b — число h_γ. Так ориентированное ребро γ будем обозначать (a, b).

Для метрической функции $\tau(x)$, суженной на ребро γ, существует обратное отображение $x_\gamma(\tau)$, определенное на интервале $(0, h_\gamma)$. Производную скалярной функции $u(x)$, заданной на $\Im$, определим следующим образом: $u'(x) = \frac{du(x_\gamma(\tau))}{d\tau}$. В силу определения производной имеем $\tau'(x) \equiv 1$ на $\Im$.

Пусть $C(\Im)$, $C^k(\Im)$ — пространства функций, введенные в работе [2]. А именно, $C(\Im)$ — пространство равномерно непрерывных, а $C^k(\Im)$ — пространство k раз дифференцируемых на $\Im$ функций. Скалярная функция $u(x)$, принадлежащая одному из этих пространств, а так же ее производные в вершинах графа Γ не определены. Однако для самой функции $u(x)$ и для ее производной $u^{(j)}(x)$ в каждой вершине a вдоль каждого ребра $\gamma \in I^a$ существуют односторонние пределы, которые мы будем обозначать через $u(a_\gamma)$ и $u^{(j)}(a_\gamma)$ соответственно.

В пространстве $C(\Im)$ введем интеграл: $\int\limits_\Gamma u(x)dx = \sum\limits_{\gamma\in\Im} \int\limits_0^{h_\gamma} u(x_\gamma(\tau))d\tau$ и скалярное произведение $(u, v) = \int\limits_\Gamma u(x)v(x)dx$.

Будем говорить, что на графе Γ задан ***многочлен*** $u(x)$ ***степени*** k, если $u(x) = c_{\gamma 0}\tau^k(x) + c_{\gamma 1}\tau^{k-1}(x) + \ldots + c_{\gamma k}$ на каждом ребре $\gamma \in \Im$, где $c_{\gamma 0}, c_{\gamma 1}, \ldots, c_{\gamma k}$ — вещественные константы. При этом хотя бы одна из констант $c_{\gamma 0}$, $\gamma \in \Im$, отлична от нуля. Равенства констант $c_{\gamma j}$ и $c_{\eta j}$ для несовпадающих ребер γ и η мы не требуем. Обозначим через $P_k(\Im)$, $k \geqslant 0$ — ***пространство многочленов***, заданных на графе Γ, степень которых не выше k.

2. ПЕРВООБРАЗНАЯ СКАЛЯРНОЙ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ НА ГРАФЕ

Зададим на прямом произведении $\Im \times \Im$ функцию $K(x, \xi)$ следующим образом. Для любого x, принадлежащего ребру $\gamma = (a, b)$, положим $K(x, \xi) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \xi \in (a, x], \\ 0 & \text{при} \quad \xi \notin (a, x], \end{cases}$ где $(a, x]$ – часть ребра γ, лежащая между вершиной a и точкой x. Легко убедиться, что функция $v(x) = \int\limits_\Gamma K(x, \xi)u(\xi)d\xi$ является первообразной функции $u(x)$ и на каждом ребре $\gamma = (a, b)$ удовлетворяет условию $v(a_\gamma) = 0$. В частности, $\tau(x) = \int\limits_\gamma K(x, \xi)d\xi$.

Множество всех первообразных функции $u \in C(\Im)$ является m-параметрическим семейством функций вида $v(x) + c(x)$, где $c(x) \in P_0(\Im)$.

На пространстве $C(\Im)$ рассмотрим оператор $(Ku)(x) = \int\limits_\Gamma K(x, \xi)u(\xi)d\xi$. В силу вышесказанного для оператора K верно следующее утверждение.

Лемма 1. *Оператор K отображает взаимно однозначно пространство $C(\Im)$ на пространство функций из $C^1(\Im)$, удовлетворяющих условиям $v(a_\gamma) = 0, \gamma = (a, b) \in \Im$. Кроме того, верны соотношения $(Ku)(b_\gamma) = \int\limits_\gamma u(x)dx, \gamma \in \Im$.*

На пространстве $C(\Im)$ рассмотрим оператор $K^2u = K(Ku)$ и $2m$ линейных функционалов: $\ell_{\gamma 0}u = \int\limits_\gamma u(x)dx$, $\ell_{\gamma 1}u = \int\limits_\gamma \tau(x)u(x)dx$, $\gamma \in \Im$.

В пространстве $C^2(\Im)$ выделим подпространство $C_0^2(\Im)$ функций $v(x)$, удовлетворяющих в каждой вершине $a \in V$ условиям $v(a_\gamma) = v'(a_\gamma) = 0$ вдоль тех и только тех ребер $\gamma \in I^a$, которые ориентированы от вершины a.

Лемма 2. *Оператор K^2 отображает взаимно однозначно пространство $C(\Im)$ на пространство $C_0^2(\Im)$. При этом функции $u \in C(\Im), v(x) = (K^2 u)(x)$ связаны соотношениями $v(b_\gamma) = h_\gamma \cdot \ell_{\gamma 0} u - \ell_{\gamma 1} u, v'(b_\gamma) = \ell_{\gamma 0} u, \gamma = (a,b) \in \Im$.*

Доказательство. Утверждение данной леммы непосредственно следует из леммы 1. Остановимся лишь чуть подробнее на первом из двух соотношений. В силу леммы 1 имеем $v(b_\gamma) = \int\limits_\gamma (Ku)(x)dx$. Проинтегрируем выражение правой части равенства по частям, получим искомое соотношение. **Лемма доказана.**

3. КВАДРАТИЧНЫЙ ФУНКЦИОНАЛ, ЗАДАННЫЙ НА ПРОСТРАНСТВЕ $C^2(\Im)$

Для функций $p, g, q, f \in C(\Im)$ на пространстве $C^2(\Im)$ рассмотрим квадратичный функционал $F(u) = \int\limits_\Gamma \big(p(x)[u''(x)]^2 + g(x)[u'(x)]^2 + q(x)u^2(x)\big)\, dx$ и линейный функционал $\varphi u = \int\limits_\Gamma f(x)u(x)dx$. Положим $G(u) = \frac{1}{2}F(u) - \varphi u$.

Найдем первую вариацию $\delta G(u,v)$ функционала G. Следуя классическому определению под ***первой вариацией*** $\delta G(u,v)$ будем понимать значение первой производной $\varphi'(\lambda)$ в точке $\lambda = 0$ скалярной функции $\varphi(\lambda) = G(u + \lambda v)$ скалярного аргумента λ. В силу определения первой вариации верно утверждение.

Лемма 3. *Для любой функции $u \in C^2(\Im)$ и любого приращения $v \in C^2(\Im)$ первая вариация $\delta G(u,v)$ функционала G имеет вид*

$$\delta G(u,v) = \int\limits_\Gamma \big(p(x)u''(x)v''(x) + g(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x) - f(x)v(x)\big)\, dx. \qquad (1)$$

4. СВОЙСТВА ПЕРВОЙ ВАРИАЦИИ ФУНКЦИОНАЛА G

В пространстве $C_0^2(\Im)$ выделим подпространство $C_1^2(\Im)$ функций $v(x)$, удовлетворяющих в каждой вершине $a \in V$ условиям $v(a_\gamma) = v'(a_\gamma) = 0$, $\gamma \in I^a$.

Таким образом, функции пространства $C_1^2(\Im)$, в отличие от функций пространства $C_0^2(\Im)$, удовлетворяют условиям $v(a_\gamma) = v'(a_\gamma) = 0$, $\gamma \in I^a$, в каждой вершине a вдоль всех ребер $\gamma \in I^a$ независимо от их ориентации.

Лемма 4. *Пусть при некоторой фиксированной функции $u \in C^2(\Im)$ первая вариация $\delta G(u,v)$ обращается в нуль при любом приращении $v \in C_1^2(\Im)$. Тогда для любого $v \in C_0^2(\Im)$ верно равенство $\delta G(u,v) = (p_1, v'')$, где $p_1 \in P_1(\Im)$.*

Доказательство. На пространстве $C(\Im)$ рассмотрим суперпозицию $\ell_0 w = \delta G(u, K^2 w)$ первой вариации $\delta G(u,v)$ и оператора K^2. Пусть $w(x) = v''(x)$, где $v \in C_1^2(\Im)$. Тогда в силу условия леммы функционал ℓ_0 обращается в нуль для любой функции $w \in C(\Im)$, для которой в силу леммы 2 выполняются равенства $\ell_{\gamma 0} w = \ell_{\gamma 1} w = 0$, $\gamma \in \Im$. Отсюда в силу теоремы об идентификации линейных многообразий (см. [4], с. 16) функционал ℓ_0 является на пространстве $C(\Im)$ линейной комбинацией функционалов $\ell_{\gamma 0}$, $\ell_{\gamma 1}$, $\gamma \in \Im$. То есть для любой функции $w \in C(\Im)$ верно равенство $\delta G(u, K^2 w) = (p_1, w)$, где $p_1(x) = c_{\gamma 1}\tau(x) + c_{\gamma 0}$ при $x \in \gamma$. А так как в силу леммы 2 оператор K^2 действует из $C(\Im)$ на $C_0^2(\Im)$, то верно искомое утверждение. **Лемма доказана.**

Лемма 5. *При фиксированной функции $u \in C^2(\Im)$ для любого приращения $v \in C_0^2(\Im)$ первая вариация имеет вид $\delta G(u,v) = (z + p_2, v'')$, где $p_2 \in P_1(\Im)$ и $z(x) = p(x)u''(x) - \left(K(gu')\right)(x) + \left(K^2(qu)\right)(x) - \left(K^2 f\right)(x)$.*

Доказательство. Проинтегрируем по частям последние три слагаемых правой части выражения (1). Получим $\delta G(u,v) = S(u,v) + (z, v'')$, где $S(u,v) = \sum\limits_{\gamma \in \Im} (s_1(x)v'(x) + s_2(x)v(x))|_{a_\gamma}^{b_\gamma}$; $s_1(x)$, $s_2(x)$ – фиксированные функции и a_γ, b_γ – вершины, инцидентные ребру γ. Так как $v(x) \in C_0^2(\Im)$, то $S(u,v) = \sum\limits_{\gamma \in \Im} (c_{\gamma 1} v(b_\gamma) + c_{\gamma 2} v'(b_\gamma))$, где $c_{\gamma 1} = s_1(b_\gamma)$ и $c_{\gamma 2} = s_2(b_\gamma)$. А так как в силу леммы 2 $v(b_\gamma) = \int\limits_\gamma (h_\gamma - \tau(x))\, v''(x)dx$ и $v'(b_\gamma) = \int\limits_\gamma v''(x)dx$, то $S(u,v) = (p_2, v'')$, где $p_2 \in P_1(\Im)$, что и завершает доказательство. **Лемма доказана.**

Теорема 1. *Пусть для некоторой фиксированной функции $u \in C^2(\Im)$ первая вариация $\delta G(u,v)$ функционала G обращается в нуль для любого приращения $v(x)$, принадлежащего пространству $C_1^2(\Im)$. Тогда функции $p(x)u''(x)$ и $(p(x)u''(x))' - g(x)u'(x)$ дифференцируемы на $\Im$, а функция $u(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению четвертого порядка*

$$\Big(\big(p(x)u''(x)\big)' - g(x)u'(x)\Big)' + q(x)u(x) = f(x) \qquad (x \in \Im).$$

Если при этом $p \in C^2(\Im), q \in C^1(\Im)$ и $\inf\limits_{x\in\Im} |p(x)| > 0$, то функция $u(x)$ принадлежит пространству $C^4(\Im)$ и удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\big(p(x)u''(x)\big)'' - \big(g(x)u'(x)\big)' + q(x)u(x) = f(x) \qquad (x \in \Im). \tag{2}$$

Доказательство. Так как по условию теоремы первая вариация $\delta G(u,v) = 0$ для любого $v \in C_1^2(\Im)$, то в силу лемм 4 и 5 для любой функции $v \in C_0^2(\Im)$ верно равенство $(z - c, v'') = 0$, где $c(x) \in P_1(\Im)$.

Положим $w(x) = v''(x)$. Так как оператор K^2 устанавливает взаимно однозначное соответствие между пространствами $C(\Im)$ и $C_0^2(\Im)$, то для любой функции $w \in C(\Im)$ верно равенство $(z - c, w) = 0$. Отсюда в силу леммы Лагранжа классического вариационного исчисления $z(x) - c(x) \equiv 0$ на каждом ребре γ, а значит и на $\Im$. Запишем тождество $z(x) - p(x) \equiv 0$ в виде

$$p(x)u''(x) \equiv \big(K(gu')\big)(x) - \big(K^2(qu)\big)(x) + \big(K^2 f\big)(x) + c(x).$$

Правая часть тождества дифференцируема на $\Im$, а значит дифференцируема и его левая часть. Продифференцируем обе части тождества, получим

$$\big(p(x)u''(x)\big)' - g(x)u'(x) \equiv -K(qu)(x) + (Kf)(x) + c'(x).$$

Правая часть этого тождества дифференцируема на $\Im$, значит дифференцируема и его левая часть. Продифференцируем обе части тождества. Получим первую часть утверждений теоремы.

Если $p \in C^2(\Im)$, $g \in C^1(\Im)$ и $\inf\limits_{x\in\Im} |p(x)| > 0$, то, как легко проверить, верна и вторая часть утверждений теоремы. **Теорема доказана.**

5. СВОЙСТВА ПЕРВОЙ ВАРИАЦИИ ФУНКЦИОНАЛА G ПРИ ГЛАДКИХ КОЭФФИЦИЕНТАХ $p(x)$ И $g(x)$

Везде в дальнейшем будем полагать, что функция $p(x)$ принадлежит пространству $C^2(\Im)$, а функция $g(x)$ — пространству $C^1(\Im)$. Кроме того, полагаем $\inf\limits_{x\in\Im} |p(x)| > 0$.

На пространстве $C^4(\Im)$ зададим дифференциальные операторы $(Du)(x) = (p(x)u''(x))'' - (g(x)u'(x))' + q(x)u(x)$, $(D^2u)(x) = -p(x)u''(x)$, $(D^3u)(x) = (p(x)u''(x))' - g(x)u'(x)$.

Лемма 6. *Для любой функции $u \in C^4(\Im)$ и любого приращения $v \in C^2(\Im)$ первая вариация $\delta G(u,v)$ функционала G представима в виде $\delta G(u,v) = (Du - f, v) + \sum\limits_{a \in V} Q^a(u,v)$, где*

$Q^a(u,v) = \sum\limits_{\gamma\in I^a} \left(D^3u\right)(a_\gamma)\cdot v(a_\gamma) + \left(D^2u\right)(a_\gamma)\cdot v'(a_\gamma)$ *при локальной ориентации всех ребер* $\gamma\in I^a$ *от вершины* a.

Доказательство. Проинтегрируем по частям два первых слагаемых правой части выражения (1). Получим $\delta G(u,v) = (Du-f,v)+S(u,v)$, где $S(u,v) = \sum\limits_{\gamma\in\Im}\left(p(x)u''(x)v'(x) - (p(x)u''(x))'\,v(x) + g(x)u'(x)v(x)\right)\Big|_{a_\gamma}^{b_\gamma}$ и a_γ, b_γ вершины, инцидентные ребру γ. Перегруппируем слагаемые суммы $S(u,v)$. Получим утверждение леммы. **Лемма доказана.**

6. ПРОСТРАНСТВО ФУНКЦИЙ, ВЫДЕЛЯЕМОЕ В $C^2(\Im)$ НАБОРОМ ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫХ УСЛОВИЙ

Пусть для каждой вершины $a\in V$ заданы два подмножества I_0^a и I_1^a множества I^a ребер, инцидентных вершине a. Положим $I_2^a = I^a\backslash I_1^a$, $I_3^a = I^a\backslash I_0^a$.

Рассмотрим пространство E функций $u(x)$, принадлежащих пространству $C^2(\Im)$ и удовлетворяющих следующему набору линейно независимых нормированных (см. [2]) условий:

$$\left\{\begin{array}{lll} u(a_\gamma) + \sum\limits_{\eta\in I_3^a}\alpha^a_{\gamma\eta 0}u(a_\eta) = 0, & \gamma\in I_0^a, & \\ u'(a_\gamma) + \sum\limits_{\eta\in I_2^a}\alpha^a_{\gamma\eta 1}u'(a_\eta) + \sum\limits_{\eta\in I_3^a}\alpha^a_{\gamma\eta 2}u(a_\eta) = 0, & \gamma\in I_1^a, & a\in V, \end{array}\right. \tag{3}$$

где $\alpha^a_{\gamma\eta 0}$, $\alpha^a_{\gamma\eta 1}$ и $\alpha^a_{\gamma\eta 2}$ — константы.

Обозначим через κ^a количество условий, заданных в вершине a. Очевидно, что число κ^a равно суммарному количеству элементов множеств I_0^a и I_1^a. Оба множества I_0^a и I_1^a могут быть пустыми. Тогда в вершине a не задается ни одного условия (3). Оба множества I_0^a и I_1^a могут совпадать с множеством I^a. Тогда в вершине a будет задано $2\delta^a$ условий (3). В этом случае условия (3) будут эквивалентны следующим условиям $u(a_\gamma) = u'(a_\gamma) = 0$, $\gamma\in I^a$.

Лемма 7. *Пространство $C_1^2(\Im)$ включено в пространство E.*

Доказательство. Пусть $u\in C_1^2(\Im)$. Тогда $u\in C^2(\Im)$ и удовлетворяет условиям $u(a_\gamma) = u'(a_\gamma) = 0$, $\gamma\in I^a$, $a\in V$. Следовательно, она удовлетворяет условиям (3), а значит, принадлежит пространству E. **Лемма доказана.**

Лемма 8. *Для любой функции $u\in C^4(\Im)$ и любой функции $v\in E$ верно равенство*

$$Q^a(u,v) = \sum_{\gamma\in I_2^a}\ell_{\gamma 2}u\cdot v'(a_\gamma) + \sum_{\gamma\in I_3^a}\ell_{\gamma 3}u\cdot v(a_\gamma),\ \text{где}\ l_{\gamma 2}u = (D^2u)(a_\gamma) - \sum_{\eta\in I_1^a}\alpha^a_{\eta\gamma 1}(D^2u)(a_\eta),$$

$$\ell_{\gamma 3}u = (D^3u)(a_\gamma) - \sum_{\eta\in I_0^a}\alpha^a_{\eta\gamma 0}(D^3u)(a_\eta) - \sum_{\eta\in I_1^a}\alpha^a_{\eta\gamma 2}(D^2u)(a_\eta).$$

Доказательство. Так как функция $v\in E$, то она удовлетворяет условиям (3). Из условий (3) найдем выражения для величин $v(a_\gamma)$, $\gamma\in I_0^a$, и $v'(a_\gamma)$, $\gamma\in I_1^a$, и подставим их в сумму $Q^a(u,v)$. Получим

$$Q^a(u,v) = \sum_{\gamma\in I_3^a}(D^3u)(a_\gamma)v(a_\gamma) - \sum_{\gamma\in I_0^a}(D^3u)(a_\gamma)\sum_{\eta\in I_3^a}\alpha^a_{\gamma\eta 0}v(a_\eta) +$$

$$+ \sum_{\gamma\in I_2^a}(D^2u)(a_\gamma)v'(a_\gamma) - \sum_{\gamma\in I_1^a}(D^2u)(a_\gamma)\left(\sum_{\eta\in I_2^a}\alpha^a_{\gamma\eta 1}v'(a_\eta) + \sum_{\eta\in I_3^a}\alpha^a_{\gamma\eta 2}v(a_\eta)\right).$$

Во второй и четвертой группах слагаемых поменяем порядок суммирования и перегруппируем слагаемые. Получим утверждение леммы. **Лемма доказана.**

7. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИОНАЛА G

Функцию $u \in E$ назовем ***стационарной точкой функционала*** G, если его первая вариация $\delta G(u,v)$ равна нулю при любом приращении $v \in E$.

Теорема 2. *Пусть функция $u \in E$ является стационарной точкой функционала G. Тогда она принадлежит пространству $C^4(\Im)$, удовлетворяет дифференциальному уравнению (2) и в каждой вершине a условиям*

$$\begin{cases} \left(D^2u\right)(a_\gamma) - \sum\limits_{\eta\in I_1^a} \alpha^a_{\eta\gamma 1}\left(D^2u\right)(a_\eta) = 0, & \gamma \in I_2^a, \\ \left(D^3u\right)(a_\gamma) - \sum\limits_{\eta\in I_0^a} \alpha^a_{\eta\gamma 0}\left(D^3u\right)(a_\eta) - \sum\limits_{\eta\in I_1^a} \alpha^a_{\eta\gamma 2}\left(D^2u\right)(a_\eta) = 0, & \gamma \in I_3^a, \end{cases} \tag{4}$$

где $\alpha^a_{\gamma\eta 1}, \alpha^a_{\gamma\eta 0}$ и $\alpha^a_{\gamma\eta 2}$ — константы те же, что и в условиях (3).

Доказательство. По условию теоремы для любого приращения $v \in E$ верно равенство $\delta G(u,v) = 0$. В силу леммы 7 это равенство выполняется и для любого приращения $v \in C_1^2(\Im)$. Отсюда в силу теоремы 1 функция $u(x)$ принадлежит пространству $C^4(\Im)$ и удовлетворяет дифференциальному уравнению (2).

Осталось показать, что функция $u(x)$ удовлетворяет условиям (4). Так как $(Du)(x) - f(x) \equiv 0$, то в силу леммы 6 $\sum\limits_{a\in V} Q^a(u,v) \equiv 0$ для любого $v \in E$. Отсюда в силу леммы 8 имеем $\sum\limits_{a\in V}\left(\sum\limits_{\gamma\in I_3^a} \ell_{\gamma 3}u \cdot v(a_\gamma) + \sum\limits_{\gamma\in I_2^a} \ell_{\gamma 2}u \cdot v'(a_\gamma)\right) = 0$. Так как величины $v(a_\gamma)$, $\gamma \in I_3^a$, и $v'(a_\gamma)$, $\gamma \in I_2^a$, могут принимать любые наперед заданные значения, то следуют равенства $\ell_{\gamma 2}u = 0$, $\gamma \in I_2^a$, и $\ell_{\gamma 3}u = 0$, $\gamma \in I_3^a$, что соответствует условиям (4). **Теорема доказана.**

8. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА, ДОПОЛНЕННОГО КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ

Для каждой вершины a и функции $u \in E$ рассмотрим вещественную квадратичную форму $A^a u$ относительно односторонних пределов $u(a_\gamma)$ и $u'(a_\gamma)$, $\gamma \in I^a$. Так как функция $u(x)$ удовлетворяет условиям (3), то без ограничения общности можно полагать, что $A^a u$ имеет вид $A^a u = \sum\limits_{\gamma\in I_2^a} u'(a_\gamma)\cdot\varphi_{\gamma 1}u + \sum\limits_{\gamma\in I_3^a} u(a_\gamma)\cdot\varphi_{\gamma 0}u$, где $\varphi_{\gamma k}u = \sum\limits_{\eta\in I_2^a} \alpha^a_{\gamma\eta 1k}u'(a_\eta) + \sum\limits_{\eta\in I_3^a} \alpha^a_{\gamma\eta 0k}u(a_\eta)$, $k = 0,1$; и для коэффициентов $\alpha^a_{\gamma\eta jk}$ выполняются равенства $\alpha^a_{\gamma\eta jk} = \alpha^a_{\eta\gamma kj}$.

В любой вершине a допускается обращение в нуль некоторых или всех констант $\alpha^a_{\gamma\eta jk}$. В последнем случае квадратичная форма A^a нулевая.

Каждая квадратичная форма A^a является функционалом, заданным на пространстве функций E. Найдем первую вариацию функционала A^a.

Лемма 9. *Для функции $u \in E$ и любого приращения $v \in E$ первая вариация $\delta A^a(u,v)$ равна $2B^a(u,v)$, где $B^a(u,v) = \sum\limits_{\gamma\in I_2^a} v'(a_\gamma)\cdot\varphi_{\gamma 1}u + \sum\limits_{\gamma\in I_3^a} v(a_\gamma)\cdot\varphi_{\gamma 0}u$ — билинейная форма, соответствующая квадратичной форме A^a.*

Доказательство. В силу определения первой вариации имеем

$$\delta A^a(u,v) = \sum_{\gamma\in I_2^a} v'(a_\gamma)\cdot\varphi_{\gamma 1}u + \sum_{\gamma\in I_3^a} v(a_\gamma)\cdot\varphi_{\gamma 0}u + \sum_{\gamma\in I_2^a} u'(a_\gamma)\cdot\varphi_{\gamma 1}v + \sum_{\gamma\in I_3^a} u(a_\gamma)\cdot\varphi_{\gamma 0}v.$$

В двух последних группах слагаемых заменим $\varphi_{\gamma 1}v$, $\varphi_{\gamma 0}v$ их выражениями и поменяем порядок суммирования. Учитывая равенства $\alpha^a_{\gamma\eta jk} = \alpha^a_{\eta\gamma kj}$, получим утверждение леммы. **Лемма доказана.**

Дополним квадратичный функционал суммой квадратичных форм A^a, и рассмотрим на пространстве E функционал $J = G + \frac{1}{2}\sum\limits_{a\in V} A^a$.

Теорема 3. *Пусть функция $u \in E$ является стационарной точкой функционала J. Тогда она принадлежит пространству $C^4(\Im)$, удовлетворяет дифференциальному уравнению (2) и условиям*

$$\begin{cases} \left(D^2u\right)(a_\gamma) - \sum\limits_{\eta\in I_1^a} \alpha^a_{\eta\gamma 1}\left(D^2u\right)(a_\eta) + \varphi_{\gamma 1} = 0, & \gamma \in I_2^a, \\ \left(D^3u\right)(a_\gamma) - \sum\limits_{\eta\in I_0^a} \alpha^a_{\eta\gamma 0}\left(D^3u\right)(a_\eta) - \sum\limits_{\eta\in I_1^a} \alpha^a_{\eta\gamma 2}\left(D^2u\right)(a_\eta) + \varphi_{\gamma 0} = 0, & \gamma \in I_3^a, \end{cases} \tag{5}$$

заданным в каждой вершине a, где $\alpha^a_{\eta\gamma k}$ — константы те же, что в условиях (3), и $\varphi_{\gamma 1}, \varphi_{\gamma 0}$ — функционалы, задающие квадратичные формы A^a.

Доказательство. Доказательство того, что функция $u(x)$ принадлежит пространству $C^4(\Im)$ и удовлетворяет дифференциальному уравнению (2) аналогично доказательству первой части теоремы 2. Покажем, что функция $u(x)$ удовлетворяет условиям (5).

Так как функция $u \in E$ является стационарной точкой функционала J, то в силу лемм 6 и 9 для любого приращения $v \in E$ верно равенство

$$\int\limits_\Gamma \left((Du)(x) - f(x)\right) v(x)dx + \sum_{a\in V} Q^a(u,v) + \sum_{a\in V} B^a(u,v) = 0.$$

Так как $(Du)(x) - f(x) \equiv 0$ на $\Im$, то в силу леммы 8 и определения билинейных форм $B^a(u,v)$ имеем

$$\sum_{a\in V}\left(\sum_{\gamma\in I_2^a} (\ell_{\gamma 2}u + \varphi_{\gamma 1}u)v'(a_\gamma) + \sum_{\gamma\in I_3^a} (\ell_{\gamma 3}u + \varphi_{\gamma 0}u)v(a_\gamma)\right) = 0.$$

Отсюда в силу произвольности величин $v'(a_\gamma)$, $\gamma \in I_2^a$, и $v'(a_\gamma)$, $\gamma \in I_3^a$, приращения $v \in E$ и следует выполнение условий (5). **Теорема доказана.**

Теорема 4. *Краевая задача (2), (3), (5) является самосопряженной.*

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать, что для любых функций $u, v \in C^4(\Im)$, удовлетворяющих условиям (3), (5), выполняется равенство $(Lu,v) = (u,Lv)$. Рассмотрим разность $R(u,v) = (Lu,v) - (u,Lv)$. В силу лемм 6 и 3 имеем $R(u,v) = \sum\limits_{a\in V} (Q^a(v,u) - Q^a(u,v))$. Так как функции $u(x)$ и $v(x)$ удовлетворяют условиям (3), то в силу леммы 8 верно

$$R(u,v) = \sum_{\gamma\in I_2^a} \left(\ell_{\gamma 2}v \cdot u'(a_\gamma) - \ell_{\gamma 2}v \cdot v'(a_\gamma)\right) + \sum_{\gamma\in I_3^a} (\ell_{\gamma 3}v \cdot u(a_\gamma) - \ell_{\gamma 3}u \cdot v(a_\gamma)).$$

А так как функции $u(x)$ и $v(x)$ удовлетворяют условиям (5), то

$$R(u,v) = \sum_{\gamma\in I_2^a} \left(\varphi_{\gamma 1}u \cdot v'(a_\gamma) - \varphi_{\gamma 1}v \cdot u'(a_\gamma)\right) + \sum_{\gamma\in I_3^a} (\varphi_{\gamma 0}u \cdot v(a_\gamma) - \varphi_{\gamma 0}v \cdot u(a_\gamma)).$$

Подставим выражения функционалов $\varphi_{\gamma 1}$, $\varphi_{\gamma 0}$ и поменяем порядок суммирования для слагаемых со знаком минус. Учитывая, что $\alpha^a_{\gamma\eta jk} = \alpha^a_{\eta\gamma kj}$, получим $R(u,v) = 0$, что и требовалось доказать. **Теорема доказана.**

Итак, мы показали, что стационарная точка $u(x)$ функционала J, заданного на пространстве E, является решением краевой задачи (2), (3), (5). Будем говорить, что ***краевая задача (2), (3), (5) порождается функционалом J на пространстве E.***

9. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ, ПОРОЖДАЕМЫЕ КВАДРАТИЧНЫМИ ФУНКЦИОНАЛАМИ

Рассмотрим на графе Γ краевую задачу для дифференциального уравнения (2) при линейно независимых условиях общего вида

$$\sum_{\gamma \in I^a} \sum_{k=0}^{3} \alpha_{\gamma j}^{ak} u^{(k)}(a_\gamma) = 0, \quad j = \overline{1, \nu^a}, \quad a \in V, \tag{6}$$

где $\alpha_{\gamma j}^{ak}$ — некоторые константы. Полагаем, что количество всех условий (6), заданных во всех вершинах $a \in V$, равно $4m$. Кроме того, допускается отсутствие условий (6) для некоторых вершин a. Для таких вершин $\nu^a = 0$.

Теорема 5. *Краевая задача (2), (6) является самосопряженной тогда и только тогда, когда она порождается функционалом J на некотором пространстве E.*

Доказательство. В силу теоремы 3 каждый функционал J, заданный на пространстве E, порождает краевую задачу (2), (3), (5), которая в силу теоремы 4 является самосопряженной.

Обратно. Пусть краевая задача (2), (6) является самосопряженной. Тогда в силу теоремы 5 работы [2, с. 453] условия (6) приводимы к виду (3), (5) с некоторыми коэффициентами $\alpha_{\gamma\eta jk}^a$ функционалов $\varphi_{\gamma k}^a$. Пусть условия (6) приведены к виду (3), (5). Рассмотрим пространство E функций, принадлежащих $C^2(\Im)$ и удовлетворяющих условиям (3), и зададим на E функционал $J = \frac{1}{2}F - \varphi + \frac{1}{2}\sum\limits_{a \in V} A^a$. В качестве функций $p(x)$, $g(x)$, $q(x)$ квадратичного функционала F возьмем коэффициенты дифференциального уравнения (2), а в качестве функции $f(x)$ линейного функционала φ — его правую часть. Квадратичные формы A^a, $a \in V$, зададим на основе функционалов $\varphi_{\gamma k}^a$ из условий (5). В силу теоремы 3 полученный функционал J порождает исходную самосопряженную краевую задачу. **Теорема доказана.**

Отметим, что у самосопряженной краевой задачи в каждой вершине a задано ровно $2\delta^a$ условий (3), (5).

10. ФУНКЦИОНАЛ ЭНЕРГИИ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

В работах [3], [5], [6] было показано, что потенциальная энергия плоской стержневой системы равна квадратичному функционалу $Fu = \dfrac{1}{2}\int\limits_{\Gamma} \big(p(x)[u''(x)]^2 + g(x)[u'(x)]^2 + q(x)u^2(x)\big)\,dx$, где Γ — объединение осевых линий всех стержней системы, $u(x)$ — отклонение точки $x \in \Gamma$ от плоскости стержневой системы. Функции $p(x)$ и $g(x)$ задают соответственно реакции на изгиб и растяжение в точке $x \in \Gamma$ соответствующего стержня, а $q(x)$ — реакция упругой среды, на которую опирается стержневая система. В силу определения функции $p(x)$, $g(x)$ и $q(x)$ неотрицательные.

Если в некотором узле a имеется устройство (например, пружина), препятствующее линейным или угловым отклонениям стержня γ (стержней γ, η), то функционал потенциальной энергии F дополнится одним их следующих слагаемых: $\frac{k_\gamma}{2}u^2(a_\gamma)$, $\frac{k_\gamma}{2}\left[u(a_\gamma) - u(a_\eta)\right]^2$, $\frac{k_\gamma}{2}\left[u'(a_\gamma)\right]^2$, $\frac{k_\gamma}{2}\left[u'(a_\gamma) - u'(a_\eta)\right]^2$, где $k_\gamma > 0$ – коэффициент жесткости устройства.

Таким образом, при моделировании малых упругих деформаций плоской стержневой системы мы приходим к функционалу, у которого все подинтегральные коэффициенты – неотрицательные на Γ функции и все внеинтегральные члены – положительные.

Обратимся к изучаемому нами функционалу $J = \frac{1}{2}F - \varphi + \frac{1}{2}\sum\limits_{a \in V} A^a$, заданному на пространстве E.

Функционал J будем называть ***функционалом энергии***, если коэффициенты $p(x)$, $g(x)$, $q(x)$ функционала F являются неотрицательными функциями и все квадратичные формы A^a, $a \in V$, неотрицательны.

Краевую задачу (2), (6) назовем ***энергетической***, если коэффициенты $p(x)$, $g(x)$ и $q(x)$ дифференциального уравнения (2) неотрицательные, а условия (6) приводимы к самосопряженному виду (3), (5) с некоторыми константами $\alpha^a_{\gamma\eta jk}$ функционалов $\varphi_{\gamma k}$. При этом все квадратичные формы $A^a u = \sum\limits_{\gamma \in I_2^a} u'(a_\gamma) \cdot \varphi^a_{\gamma 1} u + \sum\limits_{\gamma \in I_3^a} u(a_\gamma) \cdot \varphi^a_{\gamma 0} u$, $a \in V$, построенные на основании функционалов $\varphi^a_{\gamma k}$ $(k = 0, 1)$ из условий (5), являются неотрицательными.

Напомним, что для коэффициентов функционала J, а так же для коэффициентов дифференциального уравнения (2), полагаем $p \in C^2(\Im)$, $g \in C^1(\Im)$, $q \in C(\Im)$ и $\inf\limits_{x \in \Im} |p(x)| > 0$.

Заметим, что энергетическая краевая задача (2), (6) всегда является самосопряженной. Обратное, вообще говоря, неверно.

Теорема 6. *Краевая задача (2), (6) является энергетической тогда и только тогда, когда она порождается функционалом энергии J на некотором пространстве E.*

Доказательство. Искомое утверждение непосредственно следует из теоремы 4 и определений функционала энергии и энергетической краевой задачи. **Теорема доказана.**

11. ПРОСТРАНСТВО РЕШЕНИЙ ОДНОРОДНОЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим энергетическую краевую задачу для однородного дифференциального уравнения

$$\big(p(x)u''(x)\big)'' - \big(g(x)u'(x)\big)' + q(x)u(x) = 0 \tag{7}$$

при условиях (6).

Для каждого ребра $\gamma \in \Im$ введем числовую характеристику ρ_γ коэффициентов уравнения (7). Положим $\rho_\gamma = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad q_\gamma(x) \not\equiv 0, \\ 1, & \text{если} \quad q_\gamma(x) \equiv 0 \text{ и } g_\gamma(x) \not\equiv 0, \\ 2, & \text{если} \quad q_\gamma(x) \equiv g_\gamma(x) \equiv 0, \end{cases}$ где $g_\gamma(x)$ и $q_\gamma(x)$ – соответственно сужения функций $g(x)$ и $q(x)$ на ребро γ.

Рассмотрим пространство $P(\Im)$ многочленов, заданных на графе Γ, следующим образом. Многочлен $u(x)$, принадлежащий пространству $P(\Im)$, на ребре $\gamma \in \Im$ равен тождественно нулю, если $\rho_\gamma = 0$, и имеет степень не выше $\rho_\gamma - 1$, если $\rho_\gamma \geqslant 1$.

Теорема 7. *Множество решений однородной энергетической задачи (7), (6) является подпространством пространства многочленов $P(\Im)$, удовлетворяющих условиям*

$$\sum_{\gamma \in I^a \cap \Im_0} \sum_{k=0}^{\rho_\gamma} \alpha^{ak}_{\gamma j} u^{(k)}(a_\gamma) = 0, \quad j = \overline{1, 2\delta^a}, \tag{8}$$

где $\alpha^{ak}_{\gamma j}$ — константы те же, что в условиях (6), и $\Im_0$ – множество всех таких ребер γ, для которых $\rho_\gamma > 0$.

Доказательство. Для решения $u(x)$ однородной энергетической задачи (7), (6) рассмотрим скалярное произведение (Lu, u). Очевидно, оно равно нулю. С другой стороны, в силу лемм 6 и 3 верно равенство $(Lu, u) = Fu + \sum\limits_{a \in V} A^a u$. Таким образом, $Fu + \sum\limits_{a \in V} A^a u = 0$. Так как задача (7), (6) является энергетической, то для любого $v \in E$ верно $Fv \geqslant 0$ и $A^a v \geqslant 0$, $a \in V$. Следовательно, $Fu = 0$ и $A^a u = 0$, $a \in V$.

Рассмотрим сначала равенство $Fu = 0$. Так как $\inf\limits_{x \in \Im} p(x) > 0$, то гарантированно вторая производная $u''(x)$ равна тождественно нулю на $\Im$. Это означает, что $u \in P_1(\Im)$. Если при этом $g(x) \not\equiv 0$ на ребре γ, то $u \in P_0(\Im)$, а если и $q(x) \not\equiv 0$ на γ, то $u(x) \equiv 0$ на γ. Итак, мы показали, что решение $u(x)$ однородной энергетической задачи (7), (6) принадлежит пространству многочленов $P(\Im)$. Подставим решение $u(x)$ в условия (6), получим условия (8).

Покажем, что остальные полученные равенства $A^a u = 0$, $a \in V$, никаких дополнительных ограничений на решение $u(x)$ не накладывают. Действительно, пусть условия (6) приведены к виду (3), (5). Так как выполняются условия (8) и $\ell_{\gamma k} u = 0$ $(k = 2, 3)$ при $u \in P(\Im)$, то функционалы $\varphi_{\gamma 1}$ и $\varphi_{\gamma 0}$ обращаются в нуль на элементе $u \in P(\Im)$. Следовательно, если функция $u \in P(\Im)$ удовлетворяет условиям (8), то все квадратичные формы A^a, $a \in V$, равны нулю на элементе u. **Теорема доказана.**

Лемма 10. *Если $\Im_0$ — пустое множество, то решением энергетической краевой задачи (7), (6) является лишь тождественно нулевая на $\Im$ функция.*

Доказательство непосредственно следует в силу определения множества $\Im_0$ и теоремы 7. **Лемма доказана.**

Обозначим через s^a количество линейно независимых условий (8). Для энергетической краевой задачи (7), (6) очевидно $s^a \leqslant 2\delta^a$. Обозначим через V_0 множество всех вершин $a \in V$, для которых $s^a < 2\delta^a$.

Лемма 11. *Пусть вершина a принадлежит множеству $V \backslash V_0$. Тогда решение однородной энергетической краевой задачи (7), (6) равно тождественно нулю на каждом ребре, инцидентном вершине a.*

Доказательство. Если вершина $a \in V \backslash V_0$, то все условия (8) линейно независимы и, следовательно, эквивалентны условиям $u(a_\gamma) = u'(a_\gamma) = 0$, $\gamma \in I^a$. Отсюда в силу теоремы 7 следует искомое утверждение леммы. **Лемма доказана.**

Обозначим через $\Im_1$ множество ребер, инцидентных хотя бы одной вершине, принадлежащей множеству $V \backslash V_0$. Положим $\Im_2 = \Im_0 \backslash \Im_1$.

Лемма 12. *Если $\Im_2$ — пустое множество, то решением однородной энергетической краевой задачи (7), (6) является лишь тождественно нулевая на $\Im$ функция.*

Доказательство. Если $\Im_2 = \varnothing$, то произвольно взятое ребро $\gamma \in \Im$ принадлежит либо множеству $\Im \backslash \Im_0$, либо множеству $\Im_1$. И в первом, и во втором случае (в силу леммы 11) решение $u(x)$ однородной энергетической краевой задачи (7), (6) равно тождественно нулю на ребре γ. В силу произвольного выбора ребра γ имеем $u(x) \equiv 0$ на $\Im$. **Лемма доказана.**

Пусть множество $\Im_2$ не пусто. Положим $\rho = \sum\limits_{\gamma \in \Im_2} \rho_\gamma$, где ρ_γ – числовая характеристика коэффициентов уравнения (7) на ребре γ. Используя коэффициенты $\alpha^{a1}_{\gamma j}$ и $\alpha^{a0}_{\gamma j}$ из условий (8), для каждой вершины $a \in V_0$ и каждого ребра $\gamma \in \Im_2$ составим матрицу $B_{a\gamma} = \left(\beta^{a\gamma}_{ji}\right)_{j=\overline{1,2\delta^a}; i=\overline{1,\rho_\gamma}}$ размера $2\delta^a \times \rho_\gamma$. Элементы $\beta^{a\gamma}_{ji}$ матрицы $B_{a\gamma}$ определяются следующим образом. Если ребро $\gamma \in \Im_2 \cap I^a$ и ориентировано от вершины a, то $\beta^{a\gamma}_{j1} = \alpha^{a0}_{j\gamma}$, $\beta^{a\gamma}_{j2} = \alpha^{a1}_{j\gamma}$, $j = \overline{1, 2\delta^a}$. Если ребро $\gamma \in \Im_2 \cap I^a$ и ориентировано к вершине a, то $\beta^{a\gamma}_{j1} = \alpha^{a0}_{j\gamma}$, $\beta^{a\gamma}_{j2} = \alpha^{a0}_{j\gamma} h_\gamma + \alpha^{a1}_{j\gamma}$, $j = \overline{1, 2\delta^a}$. Если ребро $\gamma \in \Im_2 \backslash I^a$, то $\beta^{a\gamma}_{ji} = 0$, $j = \overline{1, 2\delta^a}$, $i = 1, 2$, независимо от ориентации ребра γ. Из матриц $B_{a\gamma}$ составим блочную матрицу $B = (B_{a\gamma})_{a \in V_0, \gamma \in \Im_2}$.

Теорема 8. *Размерность пространства решений однородной энергетической задачи (7), (6) равна $\rho - rangB$.*

Доказательство. В силу теоремы 7 решение $u(x)$ однородной энергетической краевой задачи (7), (6) принадлежит пространству многочленов $P(\Im)$ и, следовательно, зависит от ρ произвольных констант. Кроме того, в каждой вершине $a \in V$ решение $u(x)$ удовлетворяет условиям (8). Если вершина $a \in V \backslash V_0$, то в силу леммы 11 все условия (8) в этой вершине a обращаются в тождества и их можно опустить. Таким образом, константы, от которых зависит решение $u(x)$, удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений $B\mathbf{c} = 0$, где B - построенная выше матрица и $\mathbf{c}$ - вектор-столбец, составленный из этих констант. Остается заметить, что полученная система уравнений имеет ровно $\rho - \nu$ линейно независимых решений, где ν - ранг матрицы B. **Теорема доказана.**

Таким образом, если мы знаем, что краевая задача является энергетической (например, получена при моделировании деформаций стержневой системы), то найдя числовые характеристики коэффициентов дифференциального уравнения, на основе лишь условий этой краевой задачи сразу же можем найти размерность пространства решений соответствующей однородной задачи, а также построить и сами решения в виде многочлена на графе. Кроме того, результаты этого пункта позволяют установить – вырождена или невырождена энергетическая краевая задача. Остановимся подробней на невырожденности краевой задачи.

12. КРИТЕРИЙ НЕВЫРОЖДЕННОСТИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Опишем сначала некоторые условия, при которых энергетическая краевая задача (2), (6) невырождена, то есть однозначно разрешима при любой правой части дифференциального уравнения (2).

Теорема 9. *Энергетическая краевая задача (2), (6) невырождена, если хотя бы одно из множеств $\Im_0$ или $\Im_2$ является пустым.*

Доказательство. Если хотя бы одно из множеств $\Im_0$ или $\Im_2$ является пустым, то в силу лемм 10 и 12 однородная энергетическая краевая задача (7), (6) имеет лишь тривиальное (тожественно нулевое) решение. А это и означает невырожденность энергетической краевой задачи (2), (6). **Теорема доказана.**

Теорема 10 (критерий невырожденности). *Энергетическая краевая задача (2), (6) невырождена тогда и только тогда, когда ранг матрицы B равен ρ.*

Доказательство. В силу теоремы 8 однородная краевая задача (7), (6), соответствующая энергетической краевой задаче (2), (6), имеет тривиальное решение тогда и только тогда, когда $\rho - \nu = 0$, то есть когда ранг матрицы B равен ρ. **Теорема доказана.**

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный, А.В. Боровских, В.Л. Прядиев [и др.]. — М.: Физматлит, 2004. — 272 с.

[2] Завгородний М.Г. Сопряженные и самосопряженные краевые задачи на геометрическом графе / М.Г. Завгородний // Дифференц. уравнения. — 2014. — Т. 50, № 4. — С. 446–456.

[3] Завгородний М.Г. Краевые задачи, описывающие процессы сетевых технических систем / М.Г. Завгородний, С.П. Майорова // Исследования по мат. анализу, дифференц. уравнениям и их приложениям. — Владикавказ, 2010. — Т. 4. — С. 48–64.

[4] Покорный Ю.В. Краткий курс математической теории оптимальных задач / Ю.В. Покорный. — Воронеж: ОАО "Центрально-Черноземное книжное издательство", 2007. — 140 с.

[5] Завгородний М.Г. Вариационные принципы построения моделей стержневых систем / М.Г. Завгородний // Мат. моделирование информац. и технолог. систем. — Воронеж, 2000. — Вып. 4. — С. 59–62.

[6] Завгородний М.Г. Математические модели стержневых систем / М.Г. Завгородний, С.П. Майорова // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. — 2000. — Т. 5, вып. 4. — С. 450–452.

REFERENCES

[1] Pokornyi Yu.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L., et al. Differential Equations on Geometric Graphs. [Pokornyj Yu.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L. Differencial'nye uravneniya na geometricheskix grafax]. Moscow: FIZMATLIT, 2004, 272 p.

[2] Zavgorodnij M.G. Adjoint and Self-Adjoint Boundary Value Problems on a Geometric Graph.

[Zavgorodnij M.G. Sopryazhennye i samosopryazhennye kraevye zadachi na geometricheskom grafe]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2014, Vol. 50, no. 4, pp. 446–456.

[3] Zavgorodnij M.G., Majorova S.P. Boundary Value Problems Governing Processes in Network Technical Systems. [Zavgorodnij M.G., Majorova S.P. Kraevye zadachi, opisyvayushhie processy setevyx texnicheskix sistem]. *Issledovaniya po mat. analizu, differents. uravneniyam i ikh prilozheniyam — Investigations on Mathematical Analysis, Differential Equations, and Their Applications*, 2010, Vol. 4, pp. 48–64.

[4] Brief Course of Mathematical Theory of Optimal Tasks. [Pokornyi Yu.V. Kratkij kurs matematicheskoj teorii optimal'nyh zadach]. Voronezh, 2007, 140 p.

[5] Zavgorodnij M.G. Variational Principles of the Construction of Models of Rod Systems. [Zavgorodnij M.G. Variacionnye principy postroeniya modelej sterzhnevyx sistem]. *Matematicheskoe modelirovanie informacionnyx i texnologicheskix sistem — Mathematical Modeling of Informational and Engineering Systems*, 2000, no. 4, pp. 59–62.

[6] Zavgorodnij M.G., Majorova S.P. Mathematical Models of Rod Systems. [Zavgorodnij M.G., Majorova S.P. Matematicheskie modeli sterzhnevyx sistem]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennye i texnicheskie nauki — Vestnik Tambov. Univ.*, 2000, Vol. 5, no. 4, pp. 450–452.

Завгородний Михаил Григорьевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа и операторных уравнений Воронежского государственного университета, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: zavgorodnijm@yandex.ru
Тел.: (473)247–57–65

Zavgorodnij Mikhail G., Candidate of Physico-mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Functional Analysis and Operational Equations of Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: zavgorodnijm@yandex.ru
Tel.: (473)247–57–65

Майорова Светлана Павловна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и физико-математического моделирования Воронежского государственного технического университета, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: spmajorova@yandex.ru

Majorova Svetlana P., Candidate of Physico-mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics and Physical and Mathematical Modeling of Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: spmajorova@yandex.ru