УДК 539.3

# ОБ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ СОСТОЯНИИ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ С УЧЁТОМ ТЕМПЕРАТУРЫ ДЛЯ СЛОЖНОЙ МОДЕЛИ СРЕДЫ

**К. К. Горностаев, А. В. Ковалёв**

*Воронежский государственный университет*

Поступила в редакцию 20.05.2014 г.

**Аннотация**: в работе приводится решение задачи об определении напряжений и деформаций в случае нагружения упрочняющейся упруговязкопластической трубы нормальной нагрузкой, приложенной к внутреннему и внешнему ее контурам. При этом в напряженно-деформированном состоянии проводится учет температурных эффектов. Свойства материала трубы в пластической области описываются с помощью модифицированного условия пластичности Треска-Сен-Венана. Предел текучести является функцией температуры, а модуль упругости $E$, коэффициент линейного температурного расширения $\alpha$, коэффициент упрочнения $c$, коэффициент вязкости $\eta$, считаются независящими от температуры. Коэффициент Пуассона материала трубы $\nu$ предполагается равным $1/2$.

**Ключевые слова**: упругопластическая задача, температурные напряжения, деформации,перемещения, вязкость, упрочнение.

# ABOUT ELASTOPLASTIC STATE OF THICK-WALLED TUBE WITH GIVEN TEMPERATURE FOR MODEL OF COMPLEX ENVIRONMENT

**K. K. Gornostaev, A. V. Kovalev**

**Abstract**: solution of the problem about finding stress and strain in case of hardening elastoviscoplastic tube loaded by normal load applied to inner and outer counters is given in this article. Besides this in stress-strain state temperature effects are taking into account. Material properties of a tube in a plastic region are described with help of modified plasticity condition of Tresca-Saint-Venant. Yield stress is a function of the temperature and elastic modulus $E$, linear thermal expansion coefficient $\alpha$, hardening coefficient $c$, viscosity coefficient $\eta$ are considered independent of a temperature. Poisson's ratio of the tubes material is assumed to be $1/2$.

**Keywords**: elastic-plastic problem, stress, strain, Displacement,viscosity,hardening.

## ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим трубу с внутренним радиусом $a$ и внешним радиусом $b$, находящуюся под действием внутреннего давления $P$, внешнего давления $q$, осевой силы $R$ (за ось трубы принимается ось $z$) и стационарного поля температуры $T(r)$, не изменяющегося в осевом и окружном направлениях. Предположим, что под влиянием внешних нагрузок имеет место пластическое течение.

В подобных постановках эту задачу рассматривали в случае упругопластического материала в работах [6], [7], [8], [10], [11].

Воспользуемся цилиндрическими координатами $(r, \theta, z)$. Если предположить, что труба достаточно длинная, то можно считать, что напряжения и деформации не зависят от $z$. Так как поперечные сечения остаются плоскими, то осевую деформацию $e_z$ считаем постоянной, причём её значения в упругой и пластической областях $e_z = e_1$.

При описании поведения упрочняющегося упруговязкопластического тела воспользуемся следующей системой уравнений:

уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{r}, \tag{1}$$

где $\sigma_r$, $\sigma_\theta$ — компоненты тензора напряжений в цилиндрической системе координат;

геометрические соотношение Коши

$$e_r = \frac{du}{dr}, \quad e_\theta = \frac{u}{r}, \tag{2}$$

где $e_r$, $e_\theta$ — компоненты тензора полных деформаций, $u$ — компонента вектора перемещений в цилиндрической системе координат.

Свойства материала трубы в пластической области опишем с помощью модифицированного условия пластичности Треска-Сен-Венана.

Следуя [1], [2], в рассмотрение введём активные напряжения

$$\sigma_{ij}^a = \sigma_{ij} - c e_{ij}^p - \eta \dot{e}_{ij}^p,$$

где $\sigma_{ij}$ — компоненты тензора напряжений, $e_{ij}^p$ — компоненты тензора пластических деформаций, $\dot{e}_{ij}^p$ — компоненты тензора скоростей пластических деформаций, $c$ — коэффициент упрочнения, $\eta$ — коэффициент вязкости. Индексы $i, j$ пробегают значения 1, 2, 3. И условие пластичности (функция нагружения по терминологии [1], [2]) будет описываться уравнением $f(\sigma_{ij}^a) = 0$. Подобный подход, при описании поведения упрочняющегося упруговязкопластического тела, был применён Спорыхиным [3], [4] и его учениками [5], [9] при решении многих упругопластических задач, при этом модифицировалось условие Мизеса.

Предположим, как и в случае идеальной пластичности

$$\sigma_\theta^a > \sigma_z^a > \sigma_r^a, \tag{3}$$

при этом функция нагружения примет вид

$$\sigma_\theta - \sigma_r - c(e_\theta^p - e_r^p) - \eta(\dot{e}_\theta^p - \dot{e}_r^p) = \sigma_S, \tag{4}$$

где $\sigma_S = \sigma_S[T(r)] = \sigma_S(r)$ — предел текучести, $\sigma_z$ — осевая компонента тензора напряжений, $e_\theta^p$, $e_r^p$ — компоненты тензора пластических деформаций, $\dot{e}_\theta^p$, $\dot{e}_r^p$ — компоненты тензора скоростей пластических деформаций в цилиндрических координатах.

Ассоциированный с (4) закон пластического течения будет

$$de_\theta^p = -de_r^p, \quad de_z^p = 0. \tag{5}$$

Полные деформации в пластической зоне состоят из упругой и пластической составляющих

$$e_r = e_r^p + e_r^e, \quad e_\theta = e_\theta^p + e_\theta^e, \quad e_z = e_z^e + e_z^p. \tag{6}$$

Упругие деформации связаны с напряжёнными законом Гука в форме

$$\begin{aligned} e_e^e &= \frac{1}{E}\left(\sigma_r - \frac{1}{2}(\sigma_\theta + \sigma_z)\right) + \alpha T, \\ e_\theta^e &= \frac{1}{E}\left(\sigma_\theta - \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_z)\right) + \alpha T, \\ e_z^e &= \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta)\right) + \alpha T, \end{aligned} \tag{7}$$

где $E$ — модуль упругости Юнга.

Сумма полных деформаций имеет вид

$$e_r + e_\theta + e_z = 3\alpha T. \tag{8}$$

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Осевая деформация зависит от результирующей осевой силы

$$R = 2\pi \int_a^b r\sigma_z \, dr. \tag{9}$$

Подставляя в (9) значение $\sigma_z$ из (7), выражая $\sigma_\theta$ через $\sigma_r$ при помощи (1), после интегрирования получим:

$$R = \pi a^2 P - \pi b^2 q + \pi E e_z (b^2 - a^2) - 2\pi E\alpha \int_a^b rT \, dr. \tag{10}$$

При выводе этого соотношения учтено, что

$$\sigma_r(a) = -P, \quad \sigma_r(b) = -q. \tag{11}$$

Таким образом $e_z = e_1$ определяется из соотношения (10). При этом для открытой трубы $R = 0$, для трубы с закрытыми торцами $R = \pi a^2 \rho$ $(q = 0)$.

Используя соотношения (6), (7) получим

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \frac{2E}{3}(e_\theta - e_r) - \frac{2E}{3}(e_\theta^p - e + r^p). \tag{12}$$

Подставляя (12) в функцию нагружения (4), решая полученное дифференциальное уравнение по времени $(t)$ при однородном начальном условии выводим

$$e_\theta^p - e_r^p = (1 - e^{-At}) \left( \frac{2E}{2E + 3c}(e_\theta - e_r) - \frac{3}{2E + 3c}\sigma_s(r) \right), \tag{13}$$

где $A = \frac{2E+3c}{3\eta}$.

Для определения перемещений, разрешая уравнение (8) с учётом (2), имеем:

$$u = -\frac{1}{2}e_1 r + \frac{c_2}{r} + \frac{3\alpha}{r} \int rT \, dr, \tag{14}$$

$c_2$ — обозначена постоянная интегрирования. При этом полные деформации определяются по соотношениям Коши (2).

Подставляя в уравнение равновесия (1) выражение (12) с учётом (13), (14), (2), (11) для напряжений находим

$$\begin{gathered}
\sigma_r = -P + \tfrac{2E}{3} \left[1 - \tfrac{2E}{2E+3c}(1 - e^{-At})\right] \left[\tfrac{c_2}{a^2} - \tfrac{c_2}{r^2} + \tfrac{3\alpha}{a^2}\int_0^a rT \, dr - \tfrac{3\alpha}{r^2}\int_0^r rT \, dr\right] + \\
+ \frac{2E}{2E + 3c}(1 - e^{-At}) \int_a^r \frac{\sigma_s(r)}{r} \, dr, \\
\sigma_\theta = -P + \tfrac{2E}{3} \left[1 - \tfrac{2E}{2E+3c}(1 - e^P - At)\right] \left[\tfrac{c_2}{a^2} + \tfrac{c_2}{r^2}\tfrac{3\alpha}{a^2}\int_0^a rT \, dr + \tfrac{3\alpha}{r^2}\int_0^r rT \, dr - 3\alpha T\right] + \\
+ \tfrac{2E}{2E+3c}(1 - e^{-At}) \left[\int_a^r \tfrac{\sigma_s(r)}{r} \, dr + \sigma_s(r)\right].
\end{gathered} \tag{15}$$

Для определения $\sigma_r$ и $\sigma_\theta$ в упругой области воспользуемся известными формулами (см. например [7])

$$\sigma_r = \frac{-2\alpha E}{r^2}\int\limits_0^r Tr\,dr + \frac{c_4}{2} + \frac{c_5}{r^2},$$
$$\sigma_\theta = -2\alpha ET + \frac{2\alpha E}{r^2}\int\limits_0^r Tr\,dr + \frac{c_4}{2} + \frac{c_5}{r^2}, \tag{16}$$

при этом

$$\sigma_\theta - \sigma_r = -2\alpha ET + \frac{4\alpha E}{r^2}\int\limits_0^r Tr\,dr - \frac{2c_5}{r^2}, \tag{17}$$

где $c_4$, $c_5$ — постоянные интегрирования.

При подстановке (11) в (16) получим

$$c_4 = -2q + \frac{4\alpha E}{b^2}\int\limits_0^b rT\,dr - \frac{2c_5}{b^2}. \tag{18}$$

Перемещение $u$ в упругой зоне определим с помощью второй формулы (2), используя (7)) и (17). Таким образом

$$u = \frac{3}{4E}\left[\frac{4\alpha E}{r^2}\int\limits_0^r rT\,dr - 2\alpha ET - \frac{2c_5}{r^2}\right]r - \frac{e_1 - \alpha T}{2}r + \alpha Tr. \tag{19}$$

Для определения постоянных интегрирования и радиуса упругопластической границы используем уравнение непрерывности компонент вектора перемещений

$$[u] = 0 \tag{20}$$

и компонент тензора напряжений

$$[\sigma_r] = [\sigma_\theta] = 0 \tag{21}$$

на упругопластической границе $r_S$, а также соотношение (18). Квадратные скобки обозначают разность соответствующих выражений в упругой и пластической областях.

Полученные выражения, ввиду их громоздкости, не приводятся.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Заметим, что при известной зависимости $\sigma_s(T)$ и $T = T(r)$ можно считать, что $\sigma_s$ является известной функцией радиуса $r$. Например, можно воспользоваться зависимостью приведённой в [7]. Если $\sigma_s$ не зависит от температуры, можно выбрать $T(r)$ в виде [6]. Полагая $c = 0$ и $t \to \infty$, приходим к решению, полученному [6], [7], [11] при $\nu = \frac{1}{2}$. При $t \to \infty$ получаем решение соответствующей упрочняющейся упругопластической задачи.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ивлев Д.Д. Теория упрочняющегося пластического тела / Д.Д. Ивлев, Г.И. Быковцев. — М.: Наука, 1971. — 231 с.

[2] Ишлинский А.Ю. Математическая теория пластичности / А.Ю. Ишлинский, Д.Д. Ивлев. — М.: Физматлит, 2003. — 704 с.

[3] Спорыхин А.Н. К устойчивости равновесия упруговязкопластической среды / А.Н. Спорыхин // Прикладная механика и техническая физика. — 1970. — № 5. С. 86–92.

[4] Спорыхин А.Н. Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред / А.Н. Спорыхин. — Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1997. — 360 с.

[5] Спорыхин А.Н. Неодномерные задачи упруговязкопластичности с неизвестной границей / А.Н. Спорыхин, А.В. Ковалёв, Ю.Д. Щеглова. — Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 2004. — 219 с.

[6] Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения / Г. Паркус. — М.: Физматлит, 1963. — 253 с.

[7] Даниловская В.И. Упругопластическая симметричная деформация толстостенной трубы с учётом неравномерности распределения температуры вдоль радиуса / В.И. Даниловская // Прикладная механика. — 1965. — Т. 1, № 6. — С. 8–13.

[8] Ковалев А.В. Об учете ассоциированной сжимаемости упругопластических тел в случае плоской деформации / А.В. Ковалев // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. — 2013. — № 1 (15). — С. 65–69.

[9] Гоцев Д.В. Локальная неустойчивость пластин с запрессованными кольцевыми включениями при упругопластическом поведении материалов / Д.В. Гоцев, А.В. Ковалев, А.Н. Спорыхин // Прикладная механика и техническая физика. — 2001. — Т. 42, № 3 (247). — С. 146–151.

[10] Задорожний В.Г. Об аналитичности решения плоской упругопластической задачи / В.Г. Задорожний, А.В. Ковалев, А.Н. Спорыхин // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 2008. — № 1. — С. 138–146.

[11] Bland D.R. Elastoplastic thick-walled tubes of workhardening material subject to internal and external pressures and to temperature gradient / D.R. Bland // J. mech. Phys. Solids. — 1956. — Vol. 4, iss. 4. — P. 209–229.

## REFERENCES

[1] Ivlev D.D., Bykovtsev G.I. Theory of a hardening plastic body. [Ivlev D.D., Bykovcev G.I. Teoriya uprochnyayushhegosya plasticheskogo tela]. Moscow, Nauka, 1971, 231 p.

[2] Ishlinskii A.Yu., Ivlev D.D. Mathematical theory of plasticity. [Ishlinskij A.Yu., Ivlev D.D. Matematicheskaya teoriya plastichnosti ]. Moscow: Fizmatlit, 2001, 704 p.

[3] Sporykhin A.N. About the stability of elastoviscoplastic environments equilibrium. [Sporyxin A.N. K ustojchivosti ravnovesiya uprugovyazkoplasticheskoj sredy]. *Prikladnaya mexanika i texnicheskaya fizika — Applied mechanics and technical physics*, 1970, no. 5, pp. 86–92.

[4] Sporykhin A.N. Perturbation method in problems of stability of complex environments. [Sporyxin A.N. Metod vozmushhenij v zadachax ustojchivosti slozhnyx sred]. Voronezh: Voronezh State University Press, 1997, 360 p.

[5] Sporykhin A.N., Kovalev A.V., Shcheglova Yu.D. Non-onedimencional elastoviscoplastic problem with an unknown boundary. [Sporyxin A.N., Kovalyov A.V., Shheglova Yu.D. Neodnomernye zadachi uprugovyazkoplastichnosti s neizvestnoj granicej]. Voronezh: Voronezh State University Press, 2004, 219 p.

[6] Parkus G. Transient thermal stresses. [Parkus G. Neustanovivshiesya temperaturnye napryazheniya]. Moscow: Fizmatlit, 1963, 253 p.

[7] Danilovskaya V.I. Symmetric elastoplastic deformation of a thick-walled tube, taking into account the uneven temperature distribution along the radius. [Danilovskaya V.I. Uprugoplasticheskaya simmetrichnaya deformaciya tolstostennoj truby s uchyotom neravnomernosti raspredeleniya temperatury vdol' radiusa]. *Prikladnaya mexanika — Applied Mechanics*, 1965, T. 1, № 6, pp. 8–13.

[8] Kovalev A.V. On the inclusion of the associated compression elastoplastic bodies in the case of plane strain. [Kovalev A.V. Ob uchete associirovannoj szhimaemosti uprugoplasticheskix tel v

sluchae ploskoj deformacii]. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.Ya. Yakovleva. Seriya: Mexanika predel'nogo sostoyaniya — Vestnik CSPU them Yakovlev. Series: Mechanic limit state*, 2013, no. 1 (15), pp. 65–69.

[9] Gotsev D.V., Kovalev A.V., Sporykhin A.N. Local instability of plates with pressed-in annular inclusions at the elastoplastic behavior of matireals. [Gocev D.V., Kovalev A.V., Sporyxin A.N. Lokal'naya neustojchivost' plastin s zapressovannymi kol'cevymi vklyucheniyami pri uprugoplasticheskom povedenii materialov]. *Prikladnaya mexanika i texnicheskaya fizika — Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2001, vol. 42, no. 3, pp. 505–509.

[10] Zadorozhnyi V.G., Kovalev A.V., Sporykhin A.N. Analyticity of the solution of a plane elastoplastic problem. [Zadorozhnij V.G., Kovalev A.V., Sporyxin A.N. Ob analitichnosti resheniya ploskoj uprugoplasticheskoj zadachi]. *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Mexanika tverdogo tela — Mechanics of Solids*, 2008, vol. 43, no. 1, pp. 117–123.

[11] Bland D.R. Elastoplastic thick-walled tubes of workhardening material subject to internal and external pressures and to temperature gradient. J. mech. Phys. Solids, 1956, vol. 4, iss. 4, pp. 209–229.

*Горностаев Константин Константинович, аспирант кафедры теоретической и прикладной механики факультета Прикладной математики, информатики и механики. Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация*
*E-mail: gornostaev@amm.vsu.ru*

*Gornostaev Konstantin Konstantinovich, postgraduate of the Department of theoretical and applied mechanics faculty of applied mathematics, informatics and mechanics. Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation*
*E-mail: gornostaev@amm.vsu.ru*

*Ковалев Алексей Викторович, заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики факультета Прикладной математики, информатики и механики; доктор физико-математических наук, профессор. Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация*
*E-mail: kovalev@amm.vsu.ru*

*Kovalev, Aleksey Viktorovich, Head of the Department of theoretical and applied mechanics faculty of applied mathematics, informatics and mechanics; Doctor of Physics and Mathematics, Professor. Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation*
*E-mail: kovalev@amm.vsu.ru*