УДК 517.95

О СТАЦИОНАРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕПЛА В ДВУХ СВЯЗНЫХ ПОЛУПЛОСКОСТЯХ С ТРЕЩИНОЙ НА ГРАНИЦЕ

А. В. Глушко, А. С. Рябенко, А. С. Черникова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 27.12.2013 г.

Аннотация: рассматривается задача трансмиссии, описывающая стационарное распределение тепла в плоскости, состоящей из двух полуплоскостей, заполненных неоднородными материалами с различными экспоненциальными коэффициентами внутренней теплопроводности. В качестве дополнительных условий заданы условия сопряжения следующего вида: на прямой, являющейся линией раздела материалов, выделен отрезок, который моделирует трещину и на котором поле температуры и нормальный тепловой поток имеют заданный разрыв, предполагается, что на остальной части прямой значения температуры и нормального теплового потока совпадают. В работе дано понятие решения рассмотренной задачи, сформулированы условия его существования. Построены формулы представления решения.

Ключевые слова: задача трансмиссии, обобщенное решение, гладкость решения, краевые условия, стационарная теплопроводность, трещина.

ABOUT THE STATIONARY HEAT DISTRIBUTION IN THE TWO ADJACENT HALF-PLANES WITH A CRACK ON THE BOUNDARY

A. V. Glushko, A. S. Ryabenko, A. S. Chernikova

Abstract: a problem of transmission is examined which describes stationary heat distribution in a plane consisting of two semi-planes filled with heterogeneous materials with varying exponential coefficients of internal heat conductivity. Conjugation conditions are given as additional conditions and they have the following form. A segment of the line, which is the dividing line of the materials, is allocated. The temperature field and the normal heat flux have the predetermined gap on this segment which models of the crack. It is assumed that the values of the temperature and the normal heat flux coincide on the remaining part of the line. The boundary conditions of the problem model a crack between the materials. A notion of the solution of this problem is given in this paper. Conditions of existence of the solution are identified. The formulas of presenting the solution are designed.

Keywords: transmission problem, general solution, smoothness of the solution, boundary conditions, stationary heat conductivity, a crack.

1. ВВЕДЕНИЕ

Несколько последних десятилетий усилия многих исследователей были сосредоточены на изучении моделей, описывающих характеристики материалов с трещинами [1]–[8]. Одним из направлений в изучении задач с трещинами является изучение тепловых процессов в материалах с трещинами [9]-[13]. Диапазон таких задач очень широк и во многом определяется свойствами и конфигурацией материалов, количеством трещин и их способом расположения, а также математическим объектом, моделирующим трещины.

Так, в работах [14]–[21] изучалось стационарное распределение тепла в функционально-градиентных материалах, заполняющих всю плоскость, с одной конечной трещиной; в работах [22], [23] изучалось нестационарное распределение тепла в функционально-градиентном материале, заполняющем всю плоскость, с одной конечной трещиной; в работах [24], [25] проводилось изучение стационарного распределения тепла в плоскости с крестообразной трещиной и в ограниченной области с внутренней трещиной соответственно; в работе [26] изучалось стационарное распределение тепла в полупространстве с трещиной, перпендикулярной границе полупространства.

В рассматриваемой работе изучается задача, моделирующая стационарное распределение тепла в функционально-градиентном биматериале с одной конечной трещиной, лежащей на границе между материалами. Данная работа является развитием методов, разработанных в работах [14]–[21]. Как и в перечисленных выше работах, в данной статье трещина моделируется конечным отрезком, в качестве дополнительных условий берутся разности температур и тепловых потоков на верхнем и нижнем берегах трещины. Основное отличие данной работы от работ [14]–[21] заключается в рассмотрении биматериала, из-за чего величина температуры в различных частях плоскости удовлетворяет различным дифференциальным уравнениям.

Данная статья является первой из цикла статей, посвященных изучению качественных свойств решения рассмотренной задачи. Следующие работы будут посвящены исследованию поведения решения в окрестности трещины.

Первые результаты, относящиеся к исследованию рассмотренной задачи, содержатся в работах [27]–[29].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Через Δ будем обозначать оператор Лапласа в $\mathbb{R}^2$, а через $\mathbb{R}^2_+$ и $\mathbb{R}^2_-$ будем соответственно обозначать множества точек $\mathbb{R}^2_+ = \{x|\, x_1 \in \mathbb{R}, x_2 > 0\}$, $\mathbb{R}^2_- = \{x|\, x_1 \in \mathbb{R}, x_2 < 0\}$.

В работе изучается следующая задача:

$$\Delta u_1(x) + k_1 \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_2} = 0,\ x \in \mathbb{R}^2_+, \tag{1}$$

$$\Delta u_2(x) + k_2 \frac{\partial u_2(x)}{\partial x_2} = 0,\ x \in \mathbb{R}^2_-, \tag{2}$$

$$u_1(x_1, +0) - u_2(x_1, -0) = q_0(x_1),\ x_1 \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u_1(x_1, +0)}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2(x_1, -0)}{\partial x_2} = q_1(x_1),\ x_1 \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Замечание 1. Условия (3), (4) понимаются в смысле главного значения:

$$u_1(x_1, +0) - u_2(x_1, -0) = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(u_1(x_1, \varepsilon) - u_2(x_1, -\varepsilon)\right),$$
$$\frac{\partial u_1(x_1, +0)}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2(x_1, -0)}{\partial x_2} = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\frac{\partial u_1(x_1, \varepsilon)}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2(x_1, -\varepsilon)}{\partial x_2} \right).$$

В дальнейшем предполагается, что функции $q_0(x_1)$ и $q_1(x_1)$ принадлежат пространству $C^3([-1;1])$, а носители функций $q_0(x_1)$ и $q_1(x_1)$ содержатся в отрезке $[-1;1]$, то есть $\operatorname{supp} q_0(x_1) \subseteq [-1;1]$, $\operatorname{supp} q_1(x_1) \subseteq [-1;1]$.

Задача (1)-(4) моделирует стационарное распределение тепла в двух связных полуплоскостях $\mathbb{R}^2_+$ и $\mathbb{R}^2_-$ с трещиной $l = [-1;1] \times \{0\}$, находящейся на границе этих полуплоскостей, при условии, что в $\mathbb{R}^2_+$ и $\mathbb{R}^2_-$ отсутствуют тепловые источники. Условия (3), (4) задают скачки температуры и тепловых потоков на трещине l. Предполагается, что на границе полуплоскостей $\mathbb{R}^2_+$ и $\mathbb{R}^2_-$ — прямой $\Gamma = \mathbb{R} \times \{0\}$, вне трещины l температурные поля и тепловые потоки совпадают. Уравнения (1) и (2) получены из уравнения стационарной теплопроводности для материала без тепловых источников $\operatorname{div}(k(x)\operatorname{grad} u(x)) = 0$, где $k(x)$ — коэффициент внутренней теплопроводности.

Так, при получении уравнений (1), (2) предполагалось, что в полуплоскостях $\mathbb{R}^2_\pm$ коэффициенты внутренней теплопроводности имеют вид $k(x) = c_{1,5\mp 0,5} e^{k_{1,5\mp 0,5} x_2}$, где $c_{1,5\mp 0,5}$ — произвольные, отличные от нуля константы, а $k_{1,5\mp 0,5}$ — произвольные положительные константы.

В дальнейшем будем придерживаться обозначения: $u(x_1, \pm 0) = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} u(x_1, \pm\varepsilon)$.

Определение 1. Решением задачи (1)-(4) назовем пару функций $u_1(x)$ и $u_2(x)$, заданных соответственно на $\mathbb{R}^2_+$ и $\mathbb{R}^2_-$, таких что $u_1(x) \in C^2(\mathbb{R}^2_+) \cap C^1(\overline{\mathbb{R}^2_+})$, $u_2(x) \in C^2(\mathbb{R}^2_-) \cap C^1(\overline{\mathbb{R}^2_-})$, которые в обычном смысле удовлетворяют уравнениям (1) и (2), условиям (3) и (4), и такие, что функции $e^{0,5k_1x_2}u_1(x)$, $e^{0,5k_1x_2}\dfrac{\partial u_1(x)}{\partial x_1}$, $e^{0,5k_1x_2}\dfrac{\partial u_1(x)}{\partial x_2}$ ограничены на $\mathbb{R}^2_+$, функции $e^{0,5k_2x_2}u_2(x)$, $e^{0,5k_2x_2}\dfrac{\partial u_2(x)}{\partial x_1}$, $e^{0,5k_2x_2}\dfrac{\partial u_2(x)}{\partial x_2}$ ограничены на $\mathbb{R}^2_-$, функции $e^{0,5k_1x_2}\dfrac{\partial^2 u_1(x)}{\partial x_1^2}$, $e^{0,5k_1x_2}\dfrac{\partial^2 u_1(x)}{\partial x_2^2}$ ограничены при $x_2 \geqslant \delta > 0$, функции $e^{0,5k_2x_2}\dfrac{\partial^2 u_2(x)}{\partial x_1^2}$, $e^{0,5k_2x_2}\dfrac{\partial^2 u_2(x)}{\partial x_2^2}$ ограничены при $x_2 \leqslant -\delta < 0$, функция $e^{0,5k_1x_2}u_1(x)$ принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R}^2_+)$, функция $e^{0,5k_2x_2}u_2(x)$ принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R}^2_-)$, а функции $u_1(x_1,+0)$, $u_2(x_1,-0)$, $\dfrac{\partial u_1(x_1,+0)}{\partial x_2}$, $\dfrac{\partial u_2(x_1,-0)}{\partial x_2}$ существуют и принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R})$.

Решение задачи (1)-(4) будем искать в виде

$$u_p(x) = e^{-0,5k_px_2}v_p(x),\ p = 1; 2. \tag{5}$$

Из очевидных равенств $\dfrac{\partial u_p(x)}{\partial x_2} = -\dfrac{k_p}{2}e^{-0,5k_px_2}v_p(x) + e^{-0,5k_px_2}\dfrac{\partial v_p(x)}{\partial x_2}$, $\Delta u_p(x) = e^{-0,5k_px_2}\left(\Delta v_p(x) - k_p\dfrac{\partial v_p(x)}{\partial x_2} + 0,25k_p^2 v_p(x)\right)$, где $p = 1; 2$, получаем, что функции $v_1(x)$ и $v_2(x)$ являются решениями следующей задачи:

$$\begin{gathered}
\Delta v_1(x) - 0,25k_1^2 v_1(x) = 0,\ \ x \in \mathbb{R}^2_+,\\
\Delta v_2(x) - 0,25k_2^2 v_2(x) = 0,\ \ x \in \mathbb{R}^2_-,\\
v_1(x_1,+0) - v_2(x_1,-0) = q_0(x_1),\ \ x_1 \in \mathbb{R},\\
-\frac{k_1}{2}v_1(x_1,+0) + \frac{\partial v_1(x_1,+0)}{\partial x_2} + \frac{k_2}{2}v_2(x_1,-0) - \frac{\partial v_2(x_1,-0)}{\partial x_2} = q_1(x_1),\ \ x_1 \in \mathbb{R}.
\end{gathered}$$

Функцию $v_2(x)$ будем искать в виде

$$v_2(x_1,x_2) = z(x_1,-x_2). \tag{6}$$

Используя очевидные равенства $\dfrac{\partial v_2(x)}{\partial x_2} = -\dfrac{\partial z(x_1,-x_2)}{\partial x_2}$, $\dfrac{\partial^2 v_2(x)}{\partial x_2^2} = \dfrac{\partial^2 z(x_1,-x_2)}{\partial x_2^2}$, получаем, что функции $v_1(x)$ и $z(x)$ являются решениями задачи:

$$\Delta v_1(x) - 0,25k_1^2 v_1(x) = 0,\ \ x \in \mathbb{R}^2_+, \tag{7}$$

$$\Delta z(x) - 0,25k_2^2 z(x) = 0,\ \ x \in \mathbb{R}^2_+, \tag{8}$$

$$v_1(x_1,+0) - z(x_1,+0) = q_0(x_1),\ \ x_1 \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

$$-\frac{k_1}{2}v_1(x_1,+0) + \frac{\partial v_1(x_1,+0)}{\partial x_2} + \frac{k_2}{2}z(x_1,+0) + \frac{\partial z(x_1,+0)}{\partial x_2} = q_1(x_1),\ \ x_1 \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Из определения решения задачи (1)-(4) получаем следующее определение решения для задачи (7)-(10).

Определение 2. Решением задачи (7)-(10) будет пара функций $v_1(x)$ и $z(x)$, заданных на $\mathbb{R}^2_+$, таких что $v_1(x), z(x) \in C^2(\mathbb{R}^2_+) \cap C^1(\overline{\mathbb{R}^2_+})$, которые в обычном смысле удовлетворяют уравнениям (7), (8), а также условиям (9), (10), и такие, что функции $v_1(x)$, $z(x)$, $\dfrac{\partial v_1(x)}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial z(x)}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial v_1(x)}{\partial x_2}$, $\dfrac{\partial z(x)}{\partial x_2}$ ограничены на $\mathbb{R}^2_+$, функции $\dfrac{\partial^2 v_1(x)}{\partial x_1^2}$, $\dfrac{\partial^2 v_1(x)}{\partial x_2^2}$, $\dfrac{\partial^2 z(x)}{\partial x_1^2}$, $\dfrac{\partial^2 z(x)}{\partial x_2^2}$ ограничены при $x_2 \geqslant \delta > 0$, функции $v_1(x)$, $z(x)$ принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R}^2_+)$, а функции $v_1(x_1, +0)$, $z(x_1, +0)$, $\dfrac{\partial v_1(x_1, +0)}{\partial x_2}$, $\dfrac{\partial z(x_1, +0)}{\partial x_2}$ существуют и принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R})$.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. Если при $p = 0; 1$ выполнены равенства $q_p(-1) = q_p(1) = q_p^{'}(-1) = q_p^{'}(1) = 0$, то задача (7)-(10) имеет решение, причем для функций $v_1(x)$ и $z(x)$ справедливы следующие представления:

$$v_1(x) = F^{-1}_{s_1, s_2 \to x_1, x_2}\left[\frac{2\sqrt{s_1^2 + k_1^2/4}}{|s|^2 + k_1^2/4} w_1^0(s_1)\right], z(x) = F^{-1}_{s_1, s_2 \to x_1, x_2}\left[\frac{2\sqrt{s_1^2 + k_2^2/4}}{|s|^2 + k_2^2/4} w_2^0(s_1)\right];$$

$$v_1(x) = F^{-1}_{s_1 \to x_1}\left[e^{-x_2\sqrt{s_1^2 + k_1^2/4}} w_1^0(s_1)\right], z(x) = F^{-1}_{s_1 \to x_1}\left[e^{-x_2\sqrt{s_1^2 + k_2^2/4}} w_2^0(s_1)\right];$$

$$v_1(x) = \frac{k_1 x_2}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_1\left(\frac{k_1}{2}\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + x_2^2}\right)\cdot\left((x_1 - y_1)^2 + x_2^2\right)^{-0,5} F^{-1}_{s_1 \to y_1}\left[w_1^0(s_1)\right] dy_1,$$

$$z(x) = \frac{k_2 x_2}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_1\left(\frac{k_2}{2}\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + x_2^2}\right)\cdot\left((x_1 - y_1)^2 + x_2^2\right)^{-0,5} F^{-1}_{s_1 \to y_1}\left[w_2^0(s_1)\right] dy_1,$$

где $K_1(z)$ — функция Макдональда (см. [32]), $P_p(s_1) = F_{x_1 \to s_1}[q_p(x_1)]$ при $p = 0; 1$, а $w_p^0(s_1) = -\dfrac{P_1(s_1) + (-1)^p\left(\sqrt{s_1^2 + 0{,}25k_{3-p}^2} + (-1)^p 0{,}5k_{3-p}\right)P_0(s_1)}{\sqrt{s_1^2 + 0{,}25k_1^2} + 0{,}5k_1 + \sqrt{s_1^2 + 0{,}25k_2^2} - 0{,}5k_2}$ при $p = 1; 2$.

Нетрудно видеть, что для построения решения задачи (1)-(4) достаточно воспользоваться формулами (5), (6) и результатами теоремы.

Непосредственное доказательство сформулированной выше теоремы состоит из следующих этапов: в разделе 3 проводится сведение задачи (7)-(10) к двум независимым дифференциальным уравнениям в пространстве $S^{'}(\mathbb{R}^2)$ и построение решений этих дифференциальных уравнений; в разделе 4 проводится доказательство того, что при сформулированных условиях на функции $q_0(x_1)$ и $q_1(x_1)$ решения обобщенных уравнений, полученных в разделе 3, задают решение задачи (7)-(10).

3. СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ (7)-(10) К ОБОБЩЕННЫМ ЗАДАЧАМ. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ ОБОБЩЕННЫХ ЗАДАЧ

Введем в рассмотрение функции

$$V_1(x) = \begin{cases} v_1(x), & x_2 > 0, \\ v_1(x_1, -x_2), & x_2 < 0 \end{cases} \text{ и } V_2(x) = \begin{cases} z(x), & x_2 > 0, \\ z(x_1, -x_2), & x_2 < 0, \end{cases} \tag{11}$$

где $v_1(x)$ и $z(x)$ — решения задачи (7)-(10), тогда

$$\frac{\partial V_1(x)}{\partial x_2} = \begin{cases} \dfrac{\partial v_1(x)}{\partial x_2}, & x_2 > 0, \\ -\dfrac{\partial v_1(x_1,-x_2)}{\partial x_2}, & x_2 < 0 \end{cases} \text{ и } \frac{\partial V_2(x)}{\partial x_2} = \begin{cases} \dfrac{\partial z(x)}{\partial x_2}, & x_2 > 0, \\ -\dfrac{\partial z(x_1,-x_2)}{\partial x_2}, & x_2 < 0. \end{cases} \tag{12}$$

Из определения решения задачи (7)-(10) следует, что функции $V_1(x)$ и $V_2(x)$ являются функциями медленного роста (см. [30]). Таким образом, их можно рассматривать как регулярные обобщенные функции в $S'(\mathbb{R}^2)$ (см. [30]).

Вычислив обобщенные производные от функций $V_1(x)$ и $V_2(x)$ (см. [30]), получим, что в $S'(\mathbb{R}^2)$ они являются решениями уравнений

$$\Delta V_p(x) - 0{,}25k_p^2 V_p(x) = \left[\frac{\partial V_p(x)}{\partial x_2}\right]_{x_2=0} \cdot \delta(x_2) + [V_p(x)]_{x_2=0} \cdot \delta'(x_2),\ p = 1;2, \tag{13}$$

где $\delta(x_2)$ — дельта-функция Дирака, а $[V_p(x)]_{x_2=0} = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}(V_p(x_1,\varepsilon) - V_p(x_1,-\varepsilon))$, $\left[\dfrac{\partial V_p(x)}{\partial x_2}\right]_{x_2=0} = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left(\dfrac{\partial V_p(x_1,\varepsilon)}{\partial x_2} - \dfrac{\partial V_p(x_1,-\varepsilon)}{\partial x_2}\right)$, где $p = 1;2$. Из (11) и (12) следует, что $[V_p(x)]_{x_2=0} = 0$, $\left[\dfrac{\partial V_p(x)}{\partial x_2}\right]_{x_2=0} = 2\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\dfrac{\partial V_p(x_1,\varepsilon)}{\partial x_2} = 2\dfrac{\partial V_p(x_1,+0)}{\partial x_2}$, где $p = 1;2$.

С учетом последних равенств и (13), получаем, что в $S'(\mathbb{R}^2)$ функции $V_1(x)$ и $V_2(x)$ являются решениями уравнений

$$\Delta V_p(x) - 0{,}25k_p^2 V_p(x) = 2\frac{\partial V_p(x_1,+0)}{\partial x_2} \cdot \delta(x_2),\ p = 1;2. \tag{14}$$

Замечание 2. Пусть $f(x_1)$ и $\widetilde{f}(x)$ — обычные функции, такие что $f(x_1) \in L_1(\mathbb{R})$, а $\widetilde{f}(x) \in L_1(\mathbb{R}^2)$. Будем использовать следующие обозначения: $F_{x_1,x_2\to s_1,s_2}[\widetilde{f}(x)]$ — преобразование Фурье функции $\widetilde{f}(x)$ по переменным x_1, x_2; $F_{x_1\to s_1}[f(x_1)]$ — преобразование Фурье функции $f(x_1)$ по переменной x_1; $F^{-1}_{s_1\to x_1}[f(s_1)]$ — обратное преобразование Фурье по переменной s_1; $F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}[\widetilde{f}(s)]$ — обратное преобразование Фурье по переменным s_1, s_2, то есть

$$F_{x_1\to s_1}[f(x_1)] = \int_{\mathbb{R}} e^{ix_1s_1} f(x_1)dx_1,\quad F^{-1}_{s_1\to x_1}[f(s_1)] = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-ix_1s_1} f(s_1)ds_1,$$
$$F_{x_1,x_2\to s_1,s_2}[\widetilde{f}(x)] = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(x_1s_1+x_2s_2)}\widetilde{f}(x)dx_1dx_2,$$
$$F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}[\widetilde{f}(s)] = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(x_1s_1+x_2s_2)}\widetilde{f}(s)ds_1ds_2.$$

В дальнейшем, если не оговорено противного, под прямым и обратным преобразованием Фурье будем понимать "обычное" прямое и обратное преобразование Фурье, то есть преобразование Фурье в смысле замечания 2.

Из (11), (12) и определения решения задачи (7)-(10) получаем, что функции $V_1(x)$ и $V_2(x)$ принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R}^2)$, а функции $V_1(x_1,+0)$, $V_2(x_1,+0)$, $\dfrac{\partial V_1(x_1,+0)}{\partial x_2}$, $\dfrac{\partial V_2(x_1,+0)}{\partial x_2}$ существуют и принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R})$. Следовательно, от функций $V_p(x)$, $V_p(x_1,+0)$, $\dfrac{\partial V_p(x_1,+0)}{\partial x_2}$, где $p = 1;2$, существует преобразование Фурье в смысле замечания 2, причем $F_{x_1,x_2\to s_1,s_2}[V_p(x)]$, где $p = 1;2$, можно вычислять при помощи сведения к повторному интегралу.

Применив к (14) обобщенное преобразование Фурье по переменным x_1, x_2 и воспользовавшись свойствами обобщенного преобразования Фурье (см. [30]), получим следующие уравнения, эквивалентные уравнениям (14) в $S'(\mathbb{R}^2)$:

$$-\left(|s|^2+0{,}25k_p^2\right)F_{x_1,x_2\to s_1,s_2}[V_p(x)]=2F_{x_1\to s_1}\left[\frac{\partial V_p(x_1,+0)}{\partial x_2}\right],\ p=1;2,\ |s|^2=s_1^2+s_2^2. \qquad (15)$$

В [30] доказано, что если функция $V(x)$ принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R}^n)$, то преобразование Фурье от регулярной обобщенной функции, порожденной функцией $V(x)$, также будет регулярной обобщенной функцией, которая порождается преобразованием Фурье функции $V(x)$, вычисленной в смысле замечания 2. Таким образом, равенство (15) можно рассматривать как равенство для функций.

Лемма 1. Для функций $V_1(x)$ и $V_2(x)$, заданных равенствами (11), справедливы соотношения: $F_{x_1\to s_1}\left[\dfrac{\partial V_p(x_1+0)}{\partial x_2}\right]=-\left(s_1^2+0{,}25k_p^2\right)^{0{,}5}\cdot F_{x_1\to s_1}[V_p(x_1,+0)], p=1;2$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что при $p=1;2$

$$F_{x_1\to s_1}[V_p(x)]=F^{-1}_{s_2\to x_2}[F_{x_1,x_2\to s_1,s_2}[V_p(x)]]=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}e^{-ix_2s_2}F_{x_1,x_2\to s_1,s_2}[V_p(x)]ds_2.$$

Из последних равенств следует, что

$$F_{x_1\to s_1}[V_p(x_1,+0)]=(2\pi)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}}F_{x_1,x_2\to s_1,s_2}[V_p(x)]ds_2,\ p=1;2. \qquad (16)$$

При помощи (15) получаем, что

$$F_{x_1,x_2\to s_1,s_2}[V_p(x)]=-2\left(|s|^2+0{,}25k_p^2\right)^{-1}F_{x_1\to s_1}\left[\frac{\partial V_p(x_1,+0)}{\partial x_2}\right],\ p=1;2. \qquad (17)$$

Поскольку $\int_{-\infty}^{\infty}\left(|s|^2+k_p^2/4\right)^{-1}ds_2=\int_{-\infty}^{\infty}\left(s_1^2+s_2^2+k_p^2/4\right)^{-1}ds_2=\pi(s_1^2+k_p^2/4)^{-0{,}5}$ при $p=1;2$, то, проинтегрировав равенство (17) по s_2 от $-\infty$ до ∞, получим, что $\int_{\mathbb{R}}F_{x_1,x_2\to s_1,s_2}[V_p(x)]ds_2=-2\pi\left(s_1^2+0{,}25k_p^2\right)^{-0{,}5}F_{x_1\to s_1}\left[\dfrac{\partial V_p(x_1,+0)}{\partial x_2}\right]$ при $p=1;2$. Из последнего равенства и (16) следует справедливость леммы. Лемма доказана.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{gathered}F_{x_1\to s_1}[V_p(x_1,+0)]=w_p^0(s_1), F_{x_1\to s_1}\left[\frac{\partial V_p(x_1,+0)}{\partial x_2}\right]=w_p^1(s_1),\ \text{где}\ p=1;2;\\ F_{x_1\to s_1}[q_p(x_1)]=P_p(s_1),\ \text{где}\ p=0;1.\end{gathered} \qquad (18)$$

Отметим, что из определения решения задачи (7)-(10) и условий на функции $q_0(x_1)$ и $q_1(x_1)$ следует, что функции $w_p^0(s_1)$, $w_p^1(s_1)$ и $P_p(s_1)$ существуют.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. При $p=1;2$ решения уравнений (15) представимы в виде

$$F_{x_1,x_2\to s_1,s_2}[V_p(x)]=-\frac{2\sqrt{s_1^2+k_p^2/4}}{|s|^2+k_p^2/4}\cdot\frac{P_1(s_1)+(-1)^p\left(\sqrt{s_1^2+k_{3-p}^2/4}+(-1)^pk_{3-p}/2\right)P_0(s_1)}{\sqrt{s_1^2+k_1^2/4}+k_1/2+\sqrt{s_1^2+k_2^2/4}-k_2/2}.$$

Доказательство. Применим к равенствам (9), (10) преобразование Фурье по переменной x_1, тогда с учетом обозначений (11), (18), леммы 1 и (12) получим, что функции $w_p^0(s_1)$ и

$w_p^1(s_1)$, где $p=1;2$, будут решениями системы

$$-\sqrt{s_1^2+0{,}25k_p^2}\cdot w_p^0(s_1)=w_p^1(s_1), p=1;2, \tag{19}$$

$$w_1^0(s_1)-w_2^0(s_1)=P_0(s_1), \tag{20}$$

$$-0{,}5k_1w_1^0(s_1)+w_1^1(s_1)+0{,}5k_2w_2^0(s_1)+w_2^1(s_1)=P_1(s_1). \tag{21}$$

Решив систему (19)-(21), получаем, что при $p=1;2$

$$w_p^0(s_1)=-\frac{P_1(s_1)+(-1)^p\left(\sqrt{s_1^2+0{,}25k_{3-p}^2}+(-1)^p0{,}5k_{3-p}\right)P_0(s_1)}{\sqrt{s_1^2+0{,}25k_1^2}+0{,}5k_1+\sqrt{s_1^2+0{,}25k_2^2}-0{,}5k_2}, \tag{22}$$

$$w_p^1(s_1)=\sqrt{s_1^2+0{,}25k_p^2}\frac{P_1(s_1)+(-1)^p\left(\sqrt{s_1^2+0{,}25k_{3-p}^2}+(-1)^p0{,}5k_{3-p}\right)P_0(s_1)}{\sqrt{s_1^2+0{,}25k_1^2}+0{,}5k_1+\sqrt{s_1^2+0{,}25k_2^2}-0{,}5k_2}. \tag{23}$$

Из (17), (18) и (23) следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Из леммы 2 получаем, что решениями уравнений (14) будут функции

$$V_p(x)=F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}\left[2\left(s_1^2+0{,}25k_p^2\right)^{0{,}5}\left(|s|^2+0{,}25k_p^2\right)^{-1}w_p^0(s_1)\right],\ p=1;2, \tag{24}$$

где функции $w_p^0(s_1)$ задаются равенствами (22).

В равенствах (24) символ $F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}$ обозначает обратное преобразование Фурье в смысле теории обобщенных функций (см. [30]).

Отметим, что если у функций, стоящих под знаком обратного преобразования Фурье, будет существовать обычное обратное преобразование Фурье (в смысле определения из замечания 2), то решения уравнений (14) будут регулярными обобщенными функциями, заданными этими обратными преобразованиями Фурье.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (7)-(10)

Для доказательства существования решения у задачи (7)-(10) сформулируем и докажем несколько вспомогательных лемм.

Лемма 3. Для функций $P_p(s_1)$, где $p=0;1$, заданных в (18), найдется такая положительная константа c, что будут справедливы следующие оценки:

$$|P_p(s_1)|+\left|P_p^{'}(s_1)\right|+\left|P_p^{''}(s_1)\right|\leqslant c\,(1+|s_1|)^{-1};$$

если при $p=0;1$ выполнены равенства $q_p(-1)=q_p(1)=0$, то

$$|P_p(s_1)|+\left|P_p^{'}(s_1)\right|+\left|P_p^{''}(s_1)\right|\leqslant c\,(1+|s_1|)^{-2};$$

если при $p=0;1$ выполнены равенства $q_p(-1)=q_p(1)=q_p^{'}(-1)=q_p^{'}(1)=0$, то

$$|P_p(s_1)|+\left|P_p^{'}(s_1)\right|+\left|P_p^{''}(s_1)\right|\leqslant c\,(1+|s_1|)^{-3}.$$

Доказательство. Так как $\operatorname{supp}q_0(x_1)\subseteq[-1;1]$, $\operatorname{supp}q_1(x_1)\subseteq[-1;1]$, то для функций $P_0(s_1)$ и $P_1(s_1)$ будут справедливы представления

$$P_0(s_1)=\int\limits_{-1}^{1}e^{ix_1s_1}q_0(x_1)dx_1,\ P_1(s_1)=\int\limits_{-1}^{1}e^{ix_1s_1}q_1(x_1)dx_1. \tag{25}$$

Из условий на функции $q_0(x_1)$ и $q_1(x_1)$ следует, что найдется такая положительная константа c, что при $s_1 \in \mathbb{R}$ выполнены оценки

$$|P_p(s_1)| \leqslant c, \; p = 0; 1. \tag{26}$$

Если $|s_1| > \delta$, где δ — некоторая положительная константа, то при помощи интегрирования по частям получаем, что $P_p(s_1) = e^{ix_1 s_1} (is_1)^{-1} q_0(x_1)\Big|_{-1}^{1} - (is_1)^{-1} \int_{-1}^{1} e^{ix_1 s_1} q_0'(x_1) dx_1$ при $p = 0; 1$. Используя последнее представление и оценку (26), получим, что найдется такая константа $c > 0$, что при $s_1 \in \mathbb{R}$ выполнено

$$|P_p(s_1)| \leqslant c \, (1 + |s_1|)^{-1}, p = 0; 1. \tag{27}$$

Воспользовавшись интегрированием по частям при $p = 0; 1$, аналогично оценкам (27) можно получить следующие оценки:

$$|P_p(s_1)| \leqslant c \, (1 + |s_1|)^{-2}, \text{ если } q_p(-1) = q_p(1) = 0; \tag{28}$$

$$|P_p(s_1)| \leqslant c \, (1 + |s_1|)^{-3}, \text{ если } q_p(-1) = q_p(1) = q_p'(-1) = q_p'(1) = 0. \tag{29}$$

Докажем оценки для функций $P_p'(s_1)$ и $P_p''(s_1)$, где $p = 0; 1$. С учетом (25) получаем представления $P_p'(s_1) = \int_{-1}^{1} e^{ix_1 s_1} i x_1 q_p(x_1) dx_1, P_p''(s_1) = \int_{-1}^{1} e^{ix_1 s_1} (-x_1^2 q_p(x_1)) dx_1$. Отметим, что если при $p = 0; 1$ функции $q_p(x_1)$ обращаются в нуль при $x_1 = \pm 1$, то функции $x_1 q_p(x_1)$ и $x_1^2 q_p(x_1)$ также обращаются в нуль при $x_1 = \pm 1$, если же при $x_1 = \pm 1$ в нуль обращаются функции $q_p(x_1)$ и их первые производные, то при $x_1 = \pm 1$ в нуль также обращаются функции $x_1 q_p(x_1)$ и $x_1^2 q_p(x_1)$ и их первые производные. Таким образом, действуя так же, как при получении оценок (27)-(29), при помощи представлений функций $P_p'(s_1)$ и $P_p''(s_1)$, при $p = 0; 1$ и $s_1 \in \mathbb{R}$ можно показать, что найдется такая константа $c > 0$, что будут выполнены оценки

$$\left|P_p'(s_1)\right| + \left|P_p''(s_1)\right| \leqslant c \, (1 + |s_1|)^{-1};$$

$$\left|P_p'(s_1)\right| + \left|P_p''(s_1)\right| \leqslant c \, (1 + |s_1|)^{-2}, \text{ если } q_p(-1) = q_p(1) = 0;$$

$$\left|P_p'(s_1)\right| + \left|P_p''(s_1)\right| \leqslant c \, (1 + |s_1|)^{-3}, \text{ если } q_p(-1) = q_p(1) = q_p'(-1) = q_p'(1) = 0.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. Для функций $w_1^0(s_1)$ и $w_2^0(s_1)$, заданных равенствами (22), найдется такая положительная константа c, что при $s_1 \in \mathbb{R}$ будут выполнены оценки $\left|w_p^0(s_1)\right| \leqslant c \, (1 + |s_1|)^{-1}$, $p = 1; 2$; если же при $p = 0; 1$ выполнены равенства $q_p(-1) = q_p(1) = 0$, то $\left|w_p^0(s_1)\right| + \left|(w_p^0(s_1))'\right| + \left|(w_p^0(s_1))''\right| \leqslant c \, (1 + |s_1|)^{-2}$, $p = 1; 2$; а если при $p = 0; 1$ выполнены равенства $q_p(-1) = q_p(1) = q_p'(-1) = q_p'(1) = 0$, то $\left|w_p^0(s_1)\right| + \left|(w_p^0(s_1))'\right| + \left|(w_p^0(s_1))''\right| \leqslant c \, (1 + |s_1|)^{-3}$, $p = 1; 2$.

Доказательство. Доказательство оценок леммы проведем на примере функции $w_1^0(s_1) = \dfrac{-P_1(s_1) + \left(\sqrt{s_1^2 + 0{,}25k_2^2} - 0{,}5k_2\right) P_0(s_1)}{\sqrt{s_1^2 + 0{,}25k_1^2} + 0{,}5k_1 + \sqrt{s_1^2 + 0{,}25k_2^2} - 0{,}5k_2}$, доказательство оценок для функции $w_2^0(s_1)$ проводится аналогично.

Воспользовавшись видом функции $w_1^0(s_1)$ и оценками из леммы 3, получим, что

$$\left|w_1^0(s_1)\right| \leqslant c \, (1 + |s_1|)^{-1};$$

$$\left|w_1^0(s_1)\right| \leqslant c \, (1 + |s_1|)^{-2}, \text{ если } q_p(-1) = q_p(1) = 0 \text{ при } p = 0; 1;$$

$$\left|w_1^0(s_1)\right| \leqslant c \, (1 + |s_1|)^{-3}, \text{ если } q_p(-1) = q_p(1) = q_p'(-1) = q_p'(1) = 0 \text{ при } p = 0; 1.$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{gathered}\left(w_1^0(s_1)\right)' = A_1(s_1)\left(\sqrt{s_1^2+k_1^2/4}+0{,}5k_1+\sqrt{s_1^2+k_2^2/4}-0{,}5k_2\right)^{-1}-\\ -B_1(s_1)\left(\sqrt{s_1^2+k_1^2/4}+0{,}5k_1+\sqrt{s_1^2+k_2^2/4}-0{,}5k_2\right)^{-2},\end{gathered}\tag{30}$$

где $A_1(s_1) = -P_1'(s_1) + s_1\left(s_1^2+k_2^2/4\right)^{-0,5}P_0(s_1) + \left(\sqrt{s_1^2+k_2^2/4}-0{,}5k_2\right)P_0'(s_1)$, а $B_1(s_1) = \left(-P_1(s_1)+\left(\sqrt{s_1^2+k_2^2/4}-0{,}5k_2\right)P_0(s_1)\right)\cdot s_1\left(\left(s_1^2+k_1^2/4\right)^{-0,5}+\left(s_1^2+k_2^2/4\right)^{-0,5}\right)$.

Из леммы 3 и вида функций $A_1(s_1)$ и $B_1(s_1)$ следует, что если при $p=0;1$ выполнены равенства $q_p(-1)=q_p(1)=0$, то

$$|A_1(s_1)|+|B_1(s_1)| \leqslant c\left(1+|s_1|\right)^{-1}, \tag{31}$$

если при $p=0;1$ выполнены равенства $q_p(-1)=q_p(1)=q_p'(-1)=q_p'(1)=0$, то

$$|A_1(s_1)|+|B_1(s_1)| \leqslant c\left(1+|s_1|\right)^{-2}. \tag{32}$$

Из (30), (31) следует, что если при $p=0;1$ выполнены равенства $q_p(-1)=q_p(1)=0$, то $\left|\left(w_1^0(s_1)\right)'\right| \leqslant c\left(1+|s_1|\right)^{-2}$, а из (30), (32) следует, что если при $p=0;1$ выполнены равенства $q_p(-1)=q_p(1)=q_p'(-1)=q_p'(1)=0$, то $\left|\left(w_1^0(s_1)\right)'\right| \leqslant c\left(1+|s_1|\right)^{-3}$.

Вычислив $A_1'(s_1)$ и $B_1'(s_1)$ и воспользовавшись оценками из леммы 3, получаем, что если при $p=0;1$ выполнены равенства $q_p(-1)=q_p(1)=0$, то

$$\left|A_1'(s_1)\right|+\left|B_1'(s_1)\right| \leqslant c\left(1+|s_1|\right)^{-1}, \tag{33}$$

если при $p=0;1$ выполнены равенства $q_p(-1)=q_p(1)=q_p'(-1)=q_p'(1)=0$, то

$$\left|A_1'(s_1)\right|+\left|B_1'(s_1)\right| \leqslant c\left(1+|s_1|\right)^{-2}. \tag{34}$$

Вычислив $\left(w_1^0(s_1)\right)''$ и применив оценки (31)-(34), получим, что если при $p=0;1$ выполнены равенства $q_p(-1)=q_p(1)=0$, то $\left|\left(w_1^0(s_1)\right)''\right| \leqslant c\left(1+|s_1|\right)^{-2}$, а если при $p=0;1$ выполнены равенства $q_p(-1)=q_p(1)=q_p'(-1)=q_p'(1)=0$, то $\left|\left(w_1^0(s_1)\right)''\right| \leqslant c\left(1+|s_1|\right)^{-3}$. Лемма доказана.

В следующей лемме определяются условия, при которых функции $V_1(x)$ и $V_2(x)$ существуют и имеют след из $L_1(\mathbb{R})$.

Лемма 5. Если при $p=0;1$ выполнены условия $q_p(-1)=q_p(1)=0$, то функции $V_1(x)$ и $V_2(x)$, заданные равенствами (24), являются непрерывными и ограниченными в $\mathbb{R}^2$ функциями, которые можно вычислять при помощи сведения к повторному интегралу, а функции $V_1(x_1,+0)$ и $V_2(x_1,+0)$ существуют и принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R})$.

Доказательство. Доказательство проведем на примере функции $V_1(x)$, для функции $V_2(x)$ доказательство проводится аналогично. Согласно лемме 4 получаем, что

$$\left|2\sqrt{s_1^2+k_1^2/4}\cdot\left(|s|^2+k_1^2/4\right)^{-1}w_1^0(s_1)\right| \leqslant c\sqrt{s_1^2+k_1^2/4}\cdot\left(s_1^2+s_2^2+k_1^2/4\right)^{-1}\left(1+|s_1|\right)^{-2}. \tag{35}$$

Нетрудно видеть, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sqrt{s_1^2+0{,}25k_1^2}\cdot\left(s_1^2+s_2^2+0{,}25k_1^2\right)^{-1}ds_2 = \pi. \tag{36}$$

При помощи (36) получаем, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sqrt{s_1^2+k_1^2/4}\cdot\left(s_1^2+s_2^2+k_1^2/4\right)^{-1}(1+|s_1|)^{-2}\,ds_2\right)ds_1=\pi\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1+|s_1|)^{-2}\,ds_1<\infty.$$

Из (35), последней оценки, теоремы Фубини и теоремы о зависимости интеграла от параметра (см. [30]) следует, что функция $V_1(x)$ непрерывна и ограничена в $\mathbb{R}^2$, причем ее можно вычислять при помощи сведения к повторному интегралу.

При помощи (36) получим, что

$$V_1(x_1,+0)=F^{-1}_{s_1\to x_1}[w_1^0(s_1)]=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{ix_1s_1}w_1^0(s_1)ds_1. \tag{37}$$

В частности, из оценок леммы 4 следует, что функции $w_1^0(s_1)$, $(w_1^0(s_1))'$, $(w_1^0(s_1))''$ принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R})$, тогда с учетом равенства (37) получаем, что функция $V_1(x_1,+0)$ принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R})$ (см. [31]). Лемма доказана.

Воспользовавшись интегрированием по частям, можно доказать лемму, обобщающую на двумерный случай аналогичный результат для преобразования Фурье, доказанный в [31].

Лемма 6. Пусть $A(s_1,s_2)\in C^4(\mathbb{R}^2)$; $A(s_1,s_2)$, $\dfrac{\partial A(s_1,s_2)}{\partial s_2}$, $\dfrac{\partial^2 A(s_1,s_2)}{\partial s_2^2}$, $\dfrac{\partial^3 A(s_1,s_2)}{\partial s_1\partial s_2^2}$, $\dfrac{\partial^4 A(s_1,s_2)}{\partial s_1^2\partial s_2^2}\in L_1(\mathbb{R}^2)$, а функция $V(x)$ представима в виде $V(x)=F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}[A(s_1,s_2)]=\dfrac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^2}e^{-i(s_1x_1+s_2x_2)}A(s_1,s_2)ds_1ds_2$, тогда $V(x)\in L_1(\mathbb{R}^2)$.

Ниже проводится доказательство нескольких вспомогательных оценок, использующихся для проверки условий леммы 6 при доказательстве принадлежности функций $V_1(x)$ и $V_2(x)$ пространству $L_1(\mathbb{R}^2)$.

Лемма 7. Для любых $s_1,s_2\in\mathbb{R}$ и любой положительной константы k существует положительная константа c такая, что выполнены оценки

$$\left(s_1^2+s_2^2+0{,}25k^2\right)^{-1}\leqslant c\,(1+|s_1|)^{-2},\ \left(s_1^2+s_2^2+0{,}25k^2\right)^{-1}\leqslant c\,(1+|s_2|)^{-2},$$
$$\left(s_1^2+s_2^2+0{,}25k^2\right)^{-1}\leqslant c\,(1+|s_1|)^{-1}(1+|s_2|)^{-1}.$$

Доказательство. Докажем первое неравенство леммы, второе неравенство доказывается аналогично. Легко видеть, что для любого s_1 выполнена оценка $(1+|s_1|)^2/3\leqslant 1+s_1^2$. С учетом последней оценки получаем, что

$$s_1^2+s_2^2+k^2/4\geqslant s_1^2+k^2/4\geqslant\min\left\{1;k^2/4\right\}(1+s_1^2)\geqslant\min\left\{1;k^2/4\right\}(1+|s_1|)^2/3.$$

Следовательно, $\left(s_1^2+s_2^2+0{,}25k^2\right)^{-1}\leqslant 3\left(\min\left\{1;0{,}25k^2\right\}\right)^{-1}(1+|s_1|)^{-2}$.

Докажем третью оценку леммы. Легко видеть, что для любой константы a выполнена оценка $\sqrt{1+a^2}\geqslant 0{,}5\,(1+|a|)$. Из этой оценки следует цепочка неравенств $a^2+b^2+2\geqslant 2\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}\geqslant 2\cdot 0{,}5\,(1+|a|)\,0{,}5\,(1+|b|)=0{,}5\,(1+|a|)(1+|b|)$, то есть

$$a^2+b^2+2\geqslant 0{,}5\,(1+|a|)(1+|b|)\,. \tag{38}$$

С учетом (38) получаем, что $s_1^2+s_2^2+0{,}25k^2\geqslant 0{,}5(s_1^2+s_2^2+2\cdot 0{,}25k^2)\geqslant 0{,}5\cdot\min\left\{1;0{,}25k^2\right\}(s_1^2+s_2^2+2)\geqslant 0{,}25\min\left\{1;0{,}25k^2\right\}(1+|s_1|)(1+|s_2|)$, тогда $\left(s_1^2+s_2^2+k^2/4\right)^{-1}\leqslant 4\left(\min\left\{1;k^2/4\right\}\right)^{-1}(1+|s_1|)^{-1}(1+|s_2|)^{-1}$. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству принадлежности функций $V_1(x)$ и $V_2(x)$ пространству $L_1(\mathbb{R}^2)$.

Лемма 8. Если при $p = 0; 1$ выполнены условия $q_p(-1) = q_p(1) = 0$, то функции $V_1(x)$ и $V_2(x)$, заданные равенствами (24), принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R}^2)$.

Доказательство. Проведем доказательство на примере функции $V_1(x)$, для функции $V_2(x)$ доказательство проводится аналогично.

Функция $V_1(x)$ представима в виде $V_1(x) = F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}[A_1(s_1,s_2)]$, где $A_1(s_1,s_2) = 2\sqrt{s_1^2+0{,}25k_1^2}\cdot\left(s_1^2+s_2^2+0{,}25k_1^2\right)^{-1} w_1^0(s_1)$. Из леммы 6 следует, что для принадлежности $V_1(x)$ пространству $L_1(\mathbb{R}^2)$ достаточно доказать принадлежность пространству $L_1(\mathbb{R}^2)$ функций $A_1(s_1,s_2)$, $\dfrac{\partial A_1(s_1,s_2)}{\partial s_2}$, $\dfrac{\partial^2 A_1(s_1,s_2)}{\partial s_2^2}$, $\dfrac{\partial^3 A_1(s_1,s_2)}{\partial s_1\partial s_2^2}$, $\dfrac{\partial^4 A_1(s_1,s_2)}{\partial s_1^2\partial s_2^2}$.

Воспользовавшись оценками из лемм 4 и 7, получаем, что

$$|A_1(s_1,s_2)| \leqslant c\left(s_1^2+s_2^2+k_1^2/4\right)^{-0{,}25}(1+|s_1|)\left|w_1^0(s_1)\right|\cdot\left(s_1^2+s_2^2+k_1^2/4\right)^{-0{,}75} \leqslant \\ \leqslant c\,(1+|s_1|)^{-1{,}5}(1+|s_2|)^{-1{,}5},$$

следовательно, $A_1(s_1,s_2)\in L_1(\mathbb{R}^2)$.

Вычислив функции $\dfrac{\partial A_1(s_1,s_2)}{\partial s_2}$, $\dfrac{\partial^2 A_1(s_1,s_2)}{\partial s_2^2}$, $\dfrac{\partial^3 A_1(s_1,s_2)}{\partial s_1\partial s_2^2}$, $\dfrac{\partial^4 A_1(s_1,s_2)}{\partial s_1^2\partial s_2^2}$ и воспользовавшись оценками из лемм 4 и 7, можно показать, что эти функции мажорируются функцией $c\,(1+|s_1|)^{-2}(1+|s_2|)^{-2}$, где c — некоторая положительная константа. Следовательно, функции $\dfrac{\partial A_1(s_1,s_2)}{\partial s_2}$, $\dfrac{\partial^2 A_1(s_1,s_2)}{\partial s_2^2}$, $\dfrac{\partial^3 A_1(s_1,s_2)}{\partial s_1\partial s_2^2}$, $\dfrac{\partial^4 A_1(s_1,s_2)}{\partial s_1^2\partial s_2^2}$ принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R}^2)$. Лемма доказана.

В лемме 5 было доказано, что при выполнении условий $q_p(-1) = q_p(1) = 0$, где $p = 0; 1$, функции $V_1(x)$ и $V_2(x)$ существуют, при этом их можно вычислять при помощи сведения к повторному интегралу.

В [31] доказано, что при $x_2 > 0$ и произвольной константе $k > 0$

$$F^{-1}_{s_2\to x_2}\left[\frac{2\sqrt{s_1^2+0{,}25k^2}}{|s|^2+0{,}25k^2}\right] = F^{-1}_{s_2\to x_2}\left[\frac{2\sqrt{s_1^2+0{,}25k^2}}{s_1^2+s_2^2+0{,}25k^2}\right] = e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0{,}25k^2}}. \tag{39}$$

Следовательно, при $x_2 > 0$ и выполнении условий $q_p(-1) = q_p(1) = 0$, где $p = 0; 1$, для функций $V_1(x)$ и $V_2(x)$, заданных равенствами (24), будут справедливы представления $V_p(x) = F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[F^{-1}_{s_2\to x_2}\left[\dfrac{2\sqrt{s_1^2+0{,}25k_p^2}}{|s|^2+0{,}25k_p^2}\right]\cdot w_p^0(s_1)\right]$, где $p = 1; 2$.

С учетом (39) при $x_2 > 0$ из двух последних равенств получаем, что

$$V_p(x) = F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\exp(-x_2\sqrt{s_1^2+0{,}25k_p^2})\cdot w_p^0(s_1)\right],\ p = 1; 2. \tag{40}$$

Заметим, что при $x_2 > 0$ и произвольной константе $k > 0$ выполнена оценка

$$\exp(-x_2\sqrt{s_1^2+0{,}25k^2}) \leqslant \exp(-x_2\,|s_1|). \tag{41}$$

Лемма 9. Если при $p = 0; 1$ выполнены условия $q_p(-1) = q_p(1) = 0$, то функции $V_1(x)$ и $V_2(x)$, заданные равенствами (24), бесконечно дифференцируемы в $\mathbb{R}^2_+$ и являются решениями уравнений (7) и (8) соответственно.

Доказательство. Докажем дифференцируемость функций $V_1(x)$ и $V_2(x)$ по переменной x_1 в $\mathbb{R}^2_+$. Существование остальных производных для функций $V_1(x)$ и $V_2(x)$ доказывается аналогично. Из (40) и теоремы о дифференцируемости интеграла по параметру следует, что для доказательства существования $\dfrac{\partial V_1(x)}{\partial x_1}$ и $\dfrac{\partial V_2(x)}{\partial x_1}$ в $\mathbb{R}^2_+$ достаточно доказать, существование следующих интегралов:

$$\frac{\partial V_p(x)}{\partial x_1} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_1s_1 - x_2\sqrt{s_1^2+k_p^2/4}}(-is_1)w_p^0(s_1)ds_1,\ p=1;2. \tag{42}$$

Из леммы 4, (41) и (42) следует, что при $x_2>0$ модуль подынтегральной функции в правой части равенства (42) не превосходит $c\exp(-x_2\,|s_1|)$, где $c>0$ — некоторая константа. Следовательно, в $\mathbb{R}^2_+$ существуют функции $\dfrac{\partial V_1(x)}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial V_2(x)}{\partial x_1}$.

Остальные утверждения леммы непосредственно следуют из способа построения функций $V_1(x)$ и $V_2(x)$ и леммы дю Буа-Реймона (см. [30]). Лемма доказана.

Отметим, что из (40) следует ограниченность функций $\dfrac{\partial^2 V_p(x)}{\partial x_1^2}$, $\dfrac{\partial^2 V_p(x)}{\partial x_2^2}$, где $p=1;2$, при $x_2 \geqslant \delta > 0$.

Воспользовавшись (40) и теоремой о дифференцируемости интеграла по параметру, получаем, что при $x_2>0$ и $p=1;2$

$$\frac{\partial V_p(x)}{\partial x_2} = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_1s_1}\cdot\exp\left(-x_2\sqrt{s_1^2+0{,}25k_p^2}\right)\cdot\sqrt{s_1^2+0{,}25k_p^2}\,w_p^0(s_1)ds_1. \tag{43}$$

Из леммы 4 следует, что при выполнении условий $q_p(-1)=q_p(1)=q_p'(-1)=q_p'(1)=0$, где $p=0;1$, равномерно по $x_1\in\mathbb{R}$ и $x_2\geqslant 0$ подынтегральные функции в (42) и (43) мажорируются функцией $c\,(1+|s_1|)^{-2}$, где c — некоторая положительная константа. Следовательно, при выполнении условий $q_p(-1)=q_p(1)=q_p'(-1)=q_p'(1)=0$, где $p=0;1$, функции $\dfrac{\partial V_1(x)}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial V_2(x)}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial V_1(x)}{\partial x_2}$ и $\dfrac{\partial V_2(x)}{\partial x_2}$ непрерывны и ограничены при $x_1\in\mathbb{R}$ и $x_2\geqslant 0$, причем

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_p(x_1,+0)}{\partial x_2} &= \frac{\partial V_p(x_1,0)}{\partial x_2} = -F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\sqrt{s_1^2+0{,}25k_p^2}\,w_p^0(s_1)\right] = \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_1s_1}\sqrt{s_1^2+0{,}25k_p^2}\cdot w_p^0(s_1)ds_1,\ p=1;2.\end{aligned} \tag{44}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 10. Если при $p=0;1$ выполнены условия $q_p(-1)=q_p(1)=q_p'(-1)=q_p'(1)=0$,то функции $\dfrac{\partial V_1(x_1,+0)}{\partial x_2}$, $\dfrac{\partial V_2(x_1,+0)}{\partial x_2}$ существуют и принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R})$.

Доказательство. Доказательство будем проводить для функции $V_1(x)$, для функции $V_2(x)$ доказательство проводится аналогично.

Из (44) следует, что для того, чтобы доказать принадлежность функции $\dfrac{\partial V_1(x_1,+0)}{\partial x_2}$ пространству $L_1(\mathbb{R})$, достаточно доказать, что функции $\sqrt{s_1^2+k_1^2/4}\cdot w_1^0(s_1)$, $\left(\sqrt{s_1^2+k_1^2/4}\cdot w_1^0(s_1)\right)'$ и $\left(\sqrt{s_1^2+k_1^2/4}\cdot w_1^0(s_1)\right)''$ принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R})$ (см. [31]). Непосредственно из леммы 4 получаем, что функция $\sqrt{s_1^2+k_1^2/4}\cdot w_1^0(s_1)$ принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R})$. Нетрудно видеть, что

$$\left(\sqrt{s_1^2+k_1^2/4}\cdot w_1^0(s_1)\right)' = s_1\left(s_1^2+k_1^2/4\right)^{-0{,}5}w_1^0(s_1) + \left(s_1^2+k_1^2/4\right)^{0{,}5}\left(w_1^0(s_1)\right)'. \tag{45}$$

Из (45) и леммы 4 следует, что $\left|\left(\sqrt{s_1^2+k_1^2/4}\cdot w_1^0(s_1)\right)'\right| \leqslant c\,(1+|s_1|)^{-2}$, то есть $\left(\sqrt{s_1^2+k_1^2/4}\cdot w_1^0(s_1)\right)' \in L_1(\mathbb{R})$. Воспользовавшись (45), получаем, что

$$\left(\sqrt{s_1^2+k_1^2/4}\cdot w_1^0(s_1)\right)'' = \left(\left(s_1^2+k_1^2/4\right)^{-0,5} - s_1^2\left(s_1^2+k_1^2/4\right)^{-1,5}\right) w_1^0(s_1)+$$
$$+s_1\left(s_1^2+k_1^2/4\right)^{-0,5}\left(w_1^0(s_1)\right)' + s_1\left(s_1^2+k_1^2/4\right)^{-0,5}\left(w_1^0(s_1)\right)' + \left(s_1^2+k_1^2/4\right)^{0,5}\left(w_1^0(s_1)\right)''.$$

Из последнего равенства и леммы 4 следует, что $\left|\left(\sqrt{s_1^2+k_1^2/4}\cdot w_1^0(s_1)\right)''\right| \leqslant c\,(1+|s_1|)^{-2}$, то есть $\left(\sqrt{s_1^2+k_1^2/4}\cdot w_1^0(s_1)\right)'' \in L_1(\mathbb{R})$. Лемма доказана.

Теперь перейдем к доказательству того, что функции $V_1(x)$ и $V_2(x)$, заданные равенствами (24), удовлетворяют граничным условиям (9), (10). Для начала проведем доказательство нескольких вспомогательных лемм.

Лемма 11. Пусть k — положительная константа, тогда при x, принадлежащих $\mathbb{R}^2_+$, справедливы следующие равенства:

$$F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}\left[\frac{2\sqrt{s_1^2+k^2/4}}{|s|^2+k^2/4}\right] = F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[e^{-x_2\sqrt{s_1^2+k^2/4}}\right] = \frac{k}{2\pi}K_1\left(\frac{k}{2}\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}},$$

где $K_1(z)$ — функция Макдональда (см. [32]).

Доказательство. Равенство (39) можно записать в виде

$$F^{-1}_{s_2\to x_2}\left[(|s|^2+0{,}25k^2)^{-1}\right] = 0{,}5\exp(-x_2\sqrt{s_1^2+0{,}25k^2})\cdot\left(s_1^2+0{,}25k^2\right)^{-0,5}. \qquad (46)$$

В [33] отмечено, что в $\mathbb{R}^2$ фундаментальным решением оператора $\Delta - k^2$, где $k>0$ — произвольная константа, будет функция $\dfrac{-1}{2\pi}K_0\left(\dfrac{k}{2}\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)$, где $K_0(z)$ — функция Макдональда (см. [32]). Тогда из свойств обобщенного преобразования Фурье и свойств функции $K_0(z)$ (см. [32], [34]) следует, что при x, принадлежащих $\mathbb{R}^2_+$, справедливо равенство

$$F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}\left[\left(|s|^2+0{,}25k^2\right)^{-1}\right] = \frac{1}{2\pi}K_0\left(\frac{k}{2}\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right). \qquad (47)$$

Воспользовавшись (46), левую часть равенства (47) можно записать в виде

$$\begin{aligned} F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}\left[\left(|s|^2+0{,}25k^2\right)^{-1}\right] &= F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[F^{-1}_{s_2\to x_2}\left[\left(|s|^2+0{,}25k^2\right)^{-1}\right]\right] = \\ &= F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[0{,}5\exp\left(-x_2\sqrt{s_1^2+0{,}25k^2}\right)\cdot\left(s_1^2+0{,}25k^2\right)^{-0,5}\right]. \end{aligned} \qquad (48)$$

Тогда из (47) и (48) получим, что

$$(2\pi)^{-1}K_0\left(0{,}5k\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right) = F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[0{,}5\exp\left(-x_2\sqrt{s_1^2+k^2/4}\right)\cdot\left(s_1^2+k^2/4\right)^{-0,5}\right]. \qquad (49)$$

Так как при $y>0$ функции $K_0(y)$ и $K_1(y)$ удовлетворяют соотношению $K_0'(y) = -K_1(y)$ (см. [32]), то продифференцировав (49) по x_2, получим, что

$$F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0,25k^2}}\right] = \frac{k}{2\pi}K_1\left(0{,}5k\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}. \qquad (50)$$

По аналогии с представлением (48) имеем, что

$$F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}\left[\frac{2\sqrt{s_1^2+k^2/4}}{|s|^2+k^2/4}\right]=F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[F^{-1}_{s_2\to x_2}\left[\left(|s|^2+k^2/4\right)^{-1}\right]2\sqrt{s_1^2+k^2/4}\right].$$

При помощи (46) из последнего равенства следует, что

$$F^{-1}_{s_1,s_2\to x_1,x_2}\left[\frac{2\sqrt{s_1^2+0{,}25k^2}}{|s|^2+0{,}25k^2}\right]=F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[e^{-x_2\sqrt{s_1^2+0{,}25k^2}}\right]. \tag{51}$$

Из (50) и (51) следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 12. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$ за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых она имеет разрыв первого рода, тогда для любого $\delta>0$ выполнено $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta}\frac{f(y_1)}{(x_1-y_1)^2+\varepsilon^2}dy_1=\frac{f(x_1-0)+f(x_1+0)}{2}$, где $f(x_1-0)=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}f(x_1-\varepsilon)$, $f(x_1+0)=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}f(x_1+\varepsilon)$.

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_1.

Очевидно следующее представление:

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta}\frac{f(y_1)}{(x_1-y_1)^2+\varepsilon^2}dy_1=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta}\frac{f(y_1)-f(x_1)}{(x_1-y_1)^2+\varepsilon^2}dy_1+$$
$$+f(x_1)\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta}\left((x_1-y_1)^2+\varepsilon^2\right)^{-1}dy_1.$$

Так как $\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta}\left((x_1-y_1)^2+\varepsilon^2\right)^{-1}dy_1=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\varepsilon^{-1}(y_1-x_1)\right)\Big|_{x_1-\delta}^{x_1+\delta}=\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\delta}{\varepsilon}$, то $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta}\frac{f(y_1)}{(x_1-y_1)^2+\varepsilon^2}dy_1=f(x_1)+\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta}\frac{f(y_1)-f(x_1)}{(x_1-y_1)^2+\varepsilon^2}dy_1$. Из последнего равенства и непрерывности функции $f(x)$ точке x_1, следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\varepsilon}{\pi}\int\limits_{x_1-\delta}^{x_1+\delta}\frac{f(y_1)dy_1}{(x_1-y_1)^2+\varepsilon^2}=\frac{f(x_1-0)+f(x_1+0)}{2}+\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\varepsilon}{\pi}\int\limits_{x_1-\delta}^{x_1+\delta}\frac{f(y_1)-f(x_1)}{(x_1-y_1)^2+\varepsilon^2}dy_1. \tag{52}$$

Поскольку для любого $\delta_1>0$ и x_1, y_1, принадлежащих некоторому фиксированному отрезку, функция $\frac{f(y_1)-f(x_1)}{(x_1-y_1)^2+\varepsilon^2}$ ограничена при $|x_1-y_1|\geqslant\delta_1$, то

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\varepsilon}{\pi}\int\limits_{x_1-\delta}^{x_1+\delta}\frac{f(y_1)-f(x_1)}{(x_1-y_1)^2+\varepsilon^2}dy_1=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\varepsilon}{\pi}\int\limits_{x_1-\delta_1}^{x_1+\delta_1}\frac{f(y_1)-f(x_1)}{(x_1-y_1)^2+\varepsilon^2}dy_1. \tag{53}$$

Докажем, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\varepsilon}{\pi}\int\limits_{x_1-\delta_1}^{x_1+\delta_1}\frac{f(y_1)-f(x_1)}{(x_1-y_1)^2+\varepsilon^2}dy_1=0. \tag{54}$$

Пусть $\varepsilon_1>0$ — произвольная константа. Так как $f(x)$ имеет не более конечного числа точек разрыва, то найдется такое $\delta_2>0$, что при $y_1\in(x_1-\delta_2;x_1+\delta_2)$ будет выполнена оценка $|f(x_1)-f(y_1)|\leqslant\varepsilon_1$.

Тогда $\left|\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{x_1-\delta_2}^{x_1+\delta_2}\frac{f(y_1)-f(x_1)}{(x_1-y_1)^2+\varepsilon^2}dy_1\right|\leqslant\frac{\varepsilon_1\varepsilon}{\pi}\int_{x_1-\delta_2}^{x_1+\delta_2}\frac{dy_1}{(x_1-y_1)^2+\varepsilon^2}=\frac{2\varepsilon_1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\delta_2}{\varepsilon}\leqslant\varepsilon_1$.

Из последней оценки и (53) следует справедливость (54). Воспользовавшись (52), (53) и (54), получаем, что если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_1, то

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\varepsilon}{\pi}\int\limits_{x_1-\delta}^{x_1+\delta}\frac{f(y_1)}{(x_1-y_1)^2+\varepsilon^2}dy_1=\frac{f(x_1-0)+f(x_1+0)}{2}=f(x_1). \qquad (55)$$

Пусть функция $f(x)$ имеет разрыв в точке x_1. Рассмотрим две функции

$$\widehat{f_-}(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(x_1-\delta;x_1)\,,\\ f(x_1-0), & x=x_1,\\ f(2x_1-x), & x\in(x_1;x_1+\delta)\end{cases} \text{ и } \widehat{f_+}(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(x_1;x_1+\delta)\,,\\ f(x_1+0), & x=x_1,\\ f(2x_1-x), & x\in(x_1-\delta;x_1)\,,\end{cases}$$

где δ — некоторая положительная константа. По построению функции $\widehat{f_-}(x)$, $\widehat{f_+}(x)$ будут непрерывны в точке x_1 и будут иметь не более конечного числа точек разрыва первого рода на интервале $(x_1-\delta;x_1+\delta)$. Очевидно, что

$$\int\limits_{x_1-\delta}^{x_1+\delta}\frac{f(y_1)}{(x_1-y_1)^2+\varepsilon^2}dy_1=\frac{1}{2}\int\limits_{x_1-\delta}^{x_1+\delta}\frac{\widehat{f_-}(y_1)}{(x_1-y_1)^2+\varepsilon^2}dy_1+\frac{1}{2}\int\limits_{x_1-\delta}^{x_1+\delta}\frac{\widehat{f_+}(y_1)}{(x_1-y_1)^2+\varepsilon^2}dy_1.$$

Из последнего равенства и (55) следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\varepsilon}{\pi}\int\limits_{x_1-\delta}^{x_1+\delta}\frac{f(y_1)}{(x_1-y_1)^2+\varepsilon^2}dy_1=\frac{\widehat{f_-}(x_1)+\widehat{f_+}(x_1)}{2}=\frac{f(x_1-0)+f(x_1+0)}{2}.$$

Лемма доказана.

Пусть I — конечный или бесконечный интервал, а функция $g(x)$ определена на I. В дальнейшем через $O(g(x))$ при $x\in I$ будем обозначать всякую функцию $f(x)$, для которой существует положительная константа c такая, что при $x\in I$ выполнена оценка $|f(x)|\leqslant c\,|g(x)|$.

При $y\in(0;1)$ для функции $K_1(y)$ справедливо представление (см. [34])

$$K_1(y)=y^{-1}+O(y).$$

При помощи этого представления и леммы 12, можно доказать следующую лемму.

Лемма 13. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$ за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых она имеет разрыв первого рода. Тогда для любого $\delta>0$ $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\dfrac{k\varepsilon}{2\pi}\int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta}\dfrac{K_1\left(0{,}5k\sqrt{(x_1-y_1)^2+\varepsilon^2}\right)f(y_1)}{\sqrt{(x_1-y_1)^2+\varepsilon^2}}dy_1 = \dfrac{f(x_1-0)+f(x_1+0)}{2}$, где k — произвольная положительная константа, а $K_1(z)$ — функция Макдональда (см. [32, 34]).

Докажем следующую лемму.

Лемма 14. При $p=0;1$ выполнены следующие равенства:

$$\lim_{x_2\to+0}F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\left(\exp\left(-x_2\sqrt{s_1^2+k_2^2/4}\right)-\exp\left(-x_2\sqrt{s_1^2+k_1^2/4}\right)\right)w_2^p(s_1)\right]=0,$$

где функции $w_2^p(s_1)$ при $p=0;1$ заданы соответственно равенствами (22) и (23).

Доказательство. Пусть $k>0$ — произвольная константа. При любом фиксированном N и фиксированном $x_2>0$ найдется такая константа c, что при $s_1\in[0;N]$ выполнена оценка $\left|\exp(-x_2s_1)-\exp(-x_2\sqrt{s_1^2+0{,}25k^2})\right|\leqslant c$, тогда из теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла получим, что для любого фиксированного N: $\lim\limits_{x_2\to+0}\int_0^N\left(\exp(-x_2s_1)-\exp\left(-x_2\sqrt{s_1^2+k^2/4}\right)\right)ds_1=0$.

Следовательно, при произвольном положительном N

$$\lim_{x_2\to+0}\int\limits_0^\infty\left(e^{-x_2s_1}-e^{-x_2\sqrt{s_1^2+k^2/4}}\right)ds_1=\lim_{x_2\to+0}\int\limits_N^\infty\left(e^{-x_2s_1}-e^{-x_2\sqrt{s_1^2+k^2/4}}\right)ds_1. \tag{56}$$

Воспользовавшись разложением функции $\sqrt{1+x}$ в ряд Тейлора, при $|x|<1$ имеем, что $\sqrt{1+x}=1+x\cdot O(1)$. Из последнего равенства получаем, что существует такая константа N_1, что при $s_1\geqslant N_1$

$$\sqrt{s_1^2+k^2/4}=s_1\sqrt{1+k^2s_1^{-2}/4}=s_1\left(1+s_1^{-2}O(1)\right)=s_1+s_1^{-1}O(1),\ O(1)>0. \tag{57}$$

Для любой константы a выполнено равенство $e^a-1=a\int_0^1e^{a\xi}d\xi$, поэтому из (57) и последнего представления получаем, что

$$\begin{gathered}\int_{N_1}^\infty\left(e^{-x_2s_1}-e^{-x_2\sqrt{s_1^2+k^2/4}}\right)ds_1=\int_{N_1}^\infty e^{-x_2s_1}\left(1-e^{-x_2s_1^{-1}O(1)}\right)ds_1=\\=x_2\int_{N_1}^\infty e^{-x_2s_1}\frac{O(1)}{s_1}\int_0^1e^{-x_2s_1^{-1}O(1)\xi}d\xi ds_1.\end{gathered} \tag{58}$$

Так как в представлении (57) $O(1)>0$, то $\int_0^1e^{-x_2s_1^{-1}O(1)\xi}d\xi<1$. Тогда из (58) и последней оценки следует, что при достаточно малом x_2

$$\begin{gathered}\left|\int_{N_1}^\infty\left(e^{-x_2s_1}-e^{-x_2\sqrt{s_1^2+k^2/4}}\right)ds_1\right|\leqslant cx_2\int_{N_1}^\infty e^{-x_2s_1}s_1^{-1}ds_1=cx_2\int_{x_2N_1}^\infty e^{-t}t^{-1}dt=\\=cx_2\left(\int_{x_2N_1}^1e^{-t}t^{-1}dt+\int_1^\infty e^{-t}t^{-1}dt\right)\leqslant c_1x_2\left(-\ln(x_2N_1)+e^{-1}\right).\end{gathered} \tag{59}$$

Из (56) и (59) следует, что для любой положительной константы k

$$\lim_{x_2\to+0}\int\limits_0^\infty\left(e^{-x_2s_1}-e^{-x_2\sqrt{s_1^2+k^2/4}}\right)ds_1=0. \tag{60}$$

Проведем доказательство утверждения леммы при $p=0$, при $p=1$ доказательство проводится аналогично. Очевидно, что

$$\begin{gathered}F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\left(e^{-x_2\sqrt{s_1^2+k_2^2/4}}-e^{-x_2\sqrt{s_1^2+k_1^2/4}}\right)w_2^0(s_1)\right]=\\=F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\left(e^{-x_2|s_1|}-e^{-x_2\sqrt{s_1^2+k_1^2/4}}\right)w_2^0(s_1)-\left(e^{-x_2|s_1|}-e^{-x_2\sqrt{s_1^2+k_2^2/4}}\right)w_2^0(s_1)\right].\end{gathered}$$

Из последнего представления получаем

$$\begin{gathered}\left|F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\left(e^{-x_2\sqrt{s_1^2+k_2^2/4}}-e^{-x_2\sqrt{s_1^2+k_1^2/4}}\right)w_2^0(s_1)\right]\right|\leqslant\\\leqslant\int_{-\infty}^\infty\left(e^{-x_2|s_1|}-e^{-x_2\sqrt{s_1^2+k_1^2/4}}\right)\left|w_2^0(s_1)\right|ds_1+\int_{-\infty}^\infty\left(e^{-x_2|s_1|}-e^{-x_2\sqrt{s_1^2+k_2^2/4}}\right)\left|w_2^0(s_1)\right|ds_1.\end{gathered} \tag{61}$$

Из леммы 4 при $s_1\in\mathbb{R}$ следует оценка

$$\left|w_2^0(s_1)\right|\leqslant K,\ K>0. \tag{62}$$

Тогда из (61) и (62) получаем $\left|F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\left(e^{-x_2\sqrt{s_1^2+k_2^2/4}}-e^{-x_2\sqrt{s_1^2+k_1^2/4}}\right)w_2^0(s_1)\right]\right|\leqslant 2K\left(\int_0^\infty\left(e^{-x_2s_1}-e^{-x_2\sqrt{s_1^2+k_1^2/4}}\right)ds_1+\int_0^\infty\left(e^{-x_2s_1}-e^{-x_2\sqrt{s_1^2+k_2^2/4}}\right)ds_1\right)$. При помощи последней оценки и (60) получаем, что $\lim\limits_{x_2\to+0}F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\left(e^{-x_2\sqrt{s_1^2+k_2^2/4}}-e^{-x_2\sqrt{s_1^2+k_1^2/4}}\right)w_2^0(s_1)\right]=0$. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству выполнения условия (9).

Лемма 15. Если при $p = 0; 1$ выполнены равенства $q_p(-1) = q_p(1) = 0$, то функции $V_1(x)$ и $V_2(x)$, заданные равенствами (24), удовлетворяют условию (9).

Доказательство. Ранее было доказано (см. (40) и лемму 9), что при выполнении условий $q_p(-1) = q_p(1) = 0$, где $p = 0; 1$, справедливы представления

$$V_p(x) = F^{-1}_{s_1 \to x_1}\left[\exp(-x_2\sqrt{s_1^2 + 0{,}25k_p^2}) \cdot w_p^0(s_1)\right], p = 1; 2, \tag{63}$$

причем функции $V_p(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^2_+)$ и ограничены на множестве $\overline{\mathbb{R}^2_+}$. Следовательно, при фиксированном положительном x_2 и при $p = 1; 2$ функции $V_p(x)$ бесконечно дифференцируемы и ограничены по переменной x_1 на всей вещественной оси.

В лемме 4 было доказано, что при выполнении условий $q_p(-1) = q_p(1) = 0$, где $p = 0; 1$, выполнены оценки

$$\left|w_p^0(s_1)\right| + \left|(w_p^0(s_1))'\right| + \left|(w_p^0(s_1))''\right| \leqslant c\,(1 + |s_1|)^{-2}, p = 1; 2. \tag{64}$$

Из оценок (64) следует, что функции $w_p^0(s_1)$, $(w_p^0(s_1))'$, $(w_p^0(s_1))''$ принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R})$, следовательно (см. [31]), $F^{-1}_{s_1 \to x_1}[w_p^0(s_1)] \in L_1(\mathbb{R})$. Поскольку функция $w_p^0(s_1)$ дифференцируема в $\mathbb{R}$, то (см. [31, 35])

$$F_{x_1 \to s_1}[F^{-1}_{s_1 \to x_1}[w_p^0(s_1)]] = w_p^0(s_1). \tag{65}$$

Пусть $x_2 > 0$ — фиксированное число, тогда из (64) получаем, что функции $e^{-x_2\sqrt{s_1^2+k_p^2/4}}w_p^0(s_1)$, $(e^{-x_2\sqrt{s_1^2+k_p^2/4}}w_p^0(s_1))'$, $(e^{-x_2\sqrt{s_1^2+k_p^2/4}}w_p^0(s_1))''$ принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R})$, следовательно, $V_p(x) \in L_1(\mathbb{R})$. Используя (63), получаем, что

$$F_{x_1 \to s_1}[V_p(x)] = e^{-x_2\sqrt{s_1^2+k_p^2/4}}w_p^0(s_1),\ p = 1; 2. \tag{66}$$

Из свойств функций Макдональда следует, что при фиксированном положительном x_2 функции $(2\pi)^{-1}k_p x_2\left(x_1^2 + x_2^2\right)^{-0,5} K_1\left(0{,}5k_p\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)$, где $p = 1; 2$, непрерывны, ограничены в $\mathbb{R}$ и принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R})$ по переменной x_1 (см. [32, 34]). Тогда при $p = 1; 2$ функции

$$\begin{gathered}\frac{k_p}{2\pi}\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}K_1\left(0{,}5k_p\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) * F^{-1}_{s_1 \to x_1}[w_p^0(s_1)] = \\ = \frac{k_p x_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K_1\left(0{,}5k_p\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + x_2^2}\right)\left((x_1 - y_1)^2 + x_2^2\right)^{-0,5} F^{-1}_{s_1 \to y_1}\left[w_p^0(s_1)\right] dy_1\end{gathered} \tag{67}$$

существуют, непрерывны и принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R})$ по переменной x_1 (см. [30]).

Так как каждый из компонентов свертки в (67) принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R})$, то (см. [31, 35])

$$\begin{gathered}F_{x_1 \to s_1}\left[\frac{k_p}{2\pi}\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}K_1\left(0{,}5k_p\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) * F^{-1}_{s_1 \to x_1}[w_p^0(s_1)]\right] = \\ = F_{x_1 \to s_1}\left[\frac{k_p}{2\pi}\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}K_1\left(0{,}5k_p\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)\right] \cdot F_{x_1 \to s_1}\left[F^{-1}_{s_1 \to x_1}[w_p^0(s_1)]\right].\end{gathered} \tag{68}$$

Ранее было доказано (см. лемму 11), что при положительном x_2

$$F^{-1}_{s_1 \to x_1}\left[e^{-x_2\sqrt{s_1^2+k_p^2/4}}\right] = \frac{k_p}{2\pi}K_1\left(0{,}5k_p\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}.$$

Поскольку функция $e^{-x_2\sqrt{s_1^2+k_p^2/4}}$ бесконечно дифференцируема, ограничена и принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R})$ при фиксированном $x_2>0$, то (см. [31, 35])

$$F_{x_1\to s_1}\left[\frac{k_p}{2\pi}\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}K_1\left(0{,}5k_p\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)\right]=e^{-x_2\sqrt{s_1^2+k_p^2/4}}. \qquad (69)$$

Из (65), (68) и (69) получаем, что

$$F_{x_1\to s_1}\left[\frac{k_p}{2\pi}\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}K_1\left(0{,}5k_p\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)*F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[w_p^0(s_1)\right]\right]=e^{-x_2\sqrt{s_1^2+k_p^2/4}}w_p^0(s_1). \qquad (70)$$

Так как функции $\dfrac{k_p}{2\pi}\dfrac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}K_1\left(0{,}5k_p\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)*F^{-1}_{s_1\to x_1}[w_p^0(s_1)]$ и $V_p(x)$ при фиксированном $x_2>0$ принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R})$ по переменной x_1, то из (66) и (70) следует, что при $p=1;2$ и почти всех x_1 выполнены равенства (см. [31])

$$V_p(x)=\frac{k_p x_2}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}K_1\left(\frac{k_p}{2}\sqrt{(x_1-y_1)^2+x_2^2}\right)\left((x_1-y_1)^2+x_2^2\right)^{-0{,}5}F^{-1}_{s_1\to y_1}\left[w_p^0(s_1)\right]dy_1. \qquad (71)$$

Поскольку функции в левой и правой частях равенств (71) непрерывны, то эти равенства будут выполнены при всех x_1.

При помощи (71) и леммы 13 получаем, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(V_1(x_1,+\varepsilon)-V_2(x_1,+\varepsilon)\right)=F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[w_1^0(s_1)-w_2^0(s_1)\right].$$

Из последнего равенства, (18) и (20) следует, что (см. [31, 35])

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(V_1(x_1,+\varepsilon)-V_2(x_1,+\varepsilon)\right)=F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[P_0(s_1)\right]=F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[F_{x_1\to s_1}\left[q_0(x_1)\right]\right]=q_0(x_1).$$

Лемма доказана.

Воспользовавшись леммой 14, по аналогии с леммой 15 доказывается следующая лемма.

Лемма 16. Если при $p=0;1$ выполнены равенства $q_p(-1)=q_p(1)=0$, то функции $V_1(x)$ и $V_2(x)$, заданные равенствами (24), удовлетворяют условию (10).

Из результатов, полученных в леммах 5, 8, 9, 10, 15 и 16, следует справедливость теоремы, сформулированной в разделе 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Kuo A. Y. Interface crack between two dissimilar half spaces subjected to a uniform heat flow at infinity. — Open crack / A. Y. Kuo // Trans. ASME J. — 1990. — Appl. Mech. 57. — P. 359–364.

[2] Lee K. Y. Determination of the thermal stress intensity factors for an interface crack under vertical uniform heat flow / K. Y. Lee, C. W. Shul // Eng. Fract. — 1991. — Mech. 40, N 6. — P. 1067–1074.

[3] Wang X. D. The interaction between an interfacial crack and a microcrack under antiplane loading / X. D. Wang, S. A. Meguid // International Journal of Fracture. — 1996. — V. 76. — P. 263–278.

[4] Shbeeb N. Analysis of the driving force for a generally oriented crack in a functionally graded strip sandwiched between two homogeneous half planes / N. Shbeeb, W. K. Binienda, K. Kreider // International Journal of Fracture. — 2000. — V. 104. — P. 23–50.

[5] Petrova V. Thermal crack problems for a bimaterial with an interface crack and internal defects / V. Petrova, K. Herrmann // International Journal of Fracture. — 2004. — V. 128. — P. 49–63.

[6] Li Y. -D. An antiplane crack perpendicular to the weak/microdiscontinuous interface in a bi-FGM structure with exponential and linear non-homogeneities / Y. -D. Li, K. Y. Lee // International Journal of Fracture. — 2007. — V. 146. — P. 203–211.

[7] Караулова Н. Е. Взаимодействие трещин в функционально-градиентном/ однородном двухкомпонентном материале под действием антиплоского сдвига / Н. Е. Караулова, В. Е. Петрова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2011. — № 1. — С. 157–167.

[8] Мещерякова Т. В. Влияние внутренних дефектов на состояние поверхности раздела между двумя упругими материалами при продольном сдвиге / Т. В. Мещерякова, В. Е. Петрова // Наука – производству. — 2005. — № 3. — С. 20–23.

[9] Lee K. Y. Thermal stress intensity factors for partially insulated interface crack under uniform heat flow / K. Y. Lee, S. -J. Park // Eng. Fract. — 1995. — Mech. 50, № 4. — P. 475–482.

[10] Ордян М. Г. Задача теплопроводности для биматериала с системой частично теплопроницаемых трещин и тепловым источником / М. Г. Ордян, В. Е. Петрова // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. — 2009. — № 4 (70). — С. 154–170.

[11] Ордян М. Г. Задача теплопроводности о взаимодействии частично теплопроницаемых трещин в двухкомпонентном материале под действием теплового потока / М. Г. Ордян, В. Е. Петрова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2009. — № 1. — С. 141–149.

[12] Petrova V. Thermal fracture of a functionally graded/homogeneous bimaterial with a system of cracks / V. Petrova, S. Schmauder // Teoretical and Applied Fracture Mechanics. — 2011. — V. 55. — P. 148–157.

[13] Chiu Tz-Cheng. Heat conduction in a functionally graded medium with an arbitrarily oriented crack / Tz-Cheng Chiu, Shang-Wu Tsai, Ching-Hwei Chue // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 2013. — V. 67. — P. 514–522.

[14] Глушко А. В. Асимптотические свойства решения задачи о стационарном распределении тепла в неоднородной плоскости с трещиной / А. В. Глушко, Е. А. Логинова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2010. — № 2. — С. 47–50.

[15] Логинова Е. А. Построение решения задачи о стационарном распределении тепла в неоднородной плоскости с трещиной и его асимптотика / Е. А. Логинова // Материалы Воронежской зимней математической школы "Современные методы теории функций и смежные задачи". — Воронеж, 2011. — С. 202–203.

[16] Логинова Е. А. Асимптотическое представление тепловых потоков для задачи о стационарном распределении тепла в неоднородной плоскости с трещиной / Е. А. Логинова // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения–XXII". — Воронеж, 2011. — С. 104–105.

[17] Логинова Е. А. Асимптотическое поведение теплового потока для задачи о стационарном распределении тепла в неоднородной плоскости с трещиной / Е. А. Логинова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2012. — № 1. — С. 157–161.

[18] Рябенко А. С. Асимптотические свойства решения задачи о стационарном распределении тепла в однородной плоскости с трещиной / А. С. Рябенко // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2012. — № 1. — С. 187–194.

[19] Глушко А. В. Изучение асимптотических свойств решения задачи о стационарном распределении тепла в плоскости с переменным коэффициентом внутренней теплопроводности / А. В. Глушко, А. С. Рябенко, Е. А. Логинова // Современные методы теории краевых

задач: труды Воронежской математической школы "Понтрягинские чтения–XXIII". — Воронеж, 2012. — С. 47–49.

[20] Glushko A. V. Modeling of heat transfer in a non-homogeneous material with a crack. The study of singularity at the vicinity of the crack tips / A. V. Glushko, A. S. Ryabenko // 19^{th} European Conference on Fracture "Fracture Mechanics for Durability, Reliability and Safety": Book of Abstracts, 26–31 August. — Kazan, 2012. — P. 269.

[21] Glushko A. V. Modeling of heat transfer in a non-homogeneous material with a crack. The study of singularity at the vicinity of the crack tips / A. V. Glushko, A. S. Ryabenko // 19^{th} European Conference on Fracture "Fracture Mechanics for Durability, Reliability and Safety": сб. ст. [Электронный ресурс]. — Kazan: Foliant, 2012. — 1 электрон. опт. диск. (CD-Rom).

[22] Логинова Е. А. Решение задачи о распределении тепла в неоднородном материале с трещиной при неограниченно большом времени / Е. А. Логинова // Материалы четвертой международной научной конференции "Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования (ПМТУММ–2011)". — Воронеж, 2011. — С. 181–182.

[23] Логинова Е. А. Построение решения задачи о распределении тепла в неоднородном материале с трещиной / Е. А. Логинова // Вестник СПбГУ. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. — 2012. — Вып. 1. — С. 40–47.

[24] Черникова А. С. Об асимптотике вблизи границ решения задачи о стационарном распределении тепла в плоскости с крестообразной трещиной / А. С. Черникова // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения–XXII". — Воронеж: ИПЦ ВГУ, 2011. — С. 205–207.

[25] Рябенко А. С. Асимптотические свойства решения задачи о стационарном распределении тепла в однородном круге с внутренней трещиной / А. С. Рябенко // Современные методы теории краевых задач: труды Воронежской математической школы "Понтрягинские чтения–XXIII". — Воронеж, 2012. — С. 159–161.

[26] Рябенко А. С. Представление решения второй краевой задачи, описывающей стационарное распределение тепла в полупространстве с трещиной перпендикулярной границе / А. С. Рябенко // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения–XXIV". — Воронеж, 2013. — С. 163–164.

[27] Глушко А. В. Построение стационарного поля температуры для двух связных полупространств с межфазовой трещиной / А. В. Глушко, А. С. Рябенко, А. С. Черникова // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения–XXIII". — Воронеж, 2012. — С. 49–50.

[28] Черникова А. С. Асимптотики решения задачи о сопряжении двух неоднородных материалов с трещиной на границе / А. С. Черникова // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения–XXIV". — Воронеж, 2013. — С. 216–217.

[29] Глушко А. В. Задача о распределении тепла при сопряжении двух неоднородных материалов с трещиной / А. В. Глушко, А. С. Черникова // Дифференциальные уравнения, теория функций, нелинейный анализ и оптимизация: труды Всероссийской научно-практической конференции. Москва, 23-26 апреля 2013 г. — М., 2013. — С. 58–59.

[30] Владимиров В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. — М.: Наука, 1976. — 527 с.

[31] Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 572 с.

[32] Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций / Г. Н. Ватсон. — М.: Издательство иностранной литературы, 1949. — 799 с.

[33] Сборник задач по уравнениям математической физики / В. С. Владимиров, В. П. Ми-

хайлов, А. А. Вашарин [и др.]. — М.: Наука, 1982. — 256 с.

[34] Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С. М. Никольский. — М.: Гл. ред. физ.-мат. лит. изд-ва «Наука», 1977. — 456 с.

[35] Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа: учеб. для студ. вузов: в 3т. Т. 3. Гармонический анализ. Элементы функционального анализа / Л. Д. Кудрявцев. — М.: Дрофа, 2006. — 350 с.

REFERENCES

[1] Kuo A. Y. Interface crack between two dissimilar half spaces subjected to a uniform heat flow at infinity. Open crack. Trans. ASME J., 1990, Appl. Mech. 57, pp. 359–364.

[2] Lee K. Y., Shul C. W. Determination of the thermal stress intensity factors for an interface crack under vertical uniform heat flow. Eng. Fract., 1991, Mech. 40, no. 6, pp. 1067–1074.

[3] Wang X. D. Meguid S. A. The interaction between an interfacial crack and a microcrack under antiplane loading. International Journal of Fracture, 1996, V. 76, pp. 263–278.

[4] Shbeeb N., Binienda W. K., Kreider K. Analysis of the driving force for a generally oriented crack in a functionally graded strip sandwiched between two homogeneous half planes. International Journal of Fracture, 2000, V. 104, pp. 23–50.

[5] Petrova V., Herrmann K. Thermal crack problems for a bimaterial with an interface crack and internal defects. International Journal of Fracture, 2004, V. 128, pp. 49–63.

[6] Li Y. -D., Lee K. Y. An antiplane crack perpendicular to the weak / microdiscontinuous interface in a bi-FGM structure with exponential and linear non-homogeneities. International Journal of Fracture, 2007, V. 146, pp. 203–211.

[7] Karaulova N. E., Petrova V. E. Crack interactions in functionally graded / homogeneous composite bimaterials subjected to antiplane loading. [Karaulova N. E., Petrova V. E. Vzaimodeystvie treshchin v funktsional'no-gradientnom / odnorodnom dvukhkomponentnom materiale pod deystviem antiploskogo sdviga]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2011, no. 1, pp. 157–167.

[8] Meshcheryakova T. V., Petrova V. E. Effect of internal defects on the the interface condition between two elastic materials under longitudinal shear. [Meshcheryakova T. V., Petrova V. E. Vliyanie vnutrennikh defektov na sostoyanie poverkhnosti razdela mezhdu dvumya uprugimi materialami pri prodol'nom sdvig]. *Nauka - proizvodstvu — Science - production*, 2005, no. 3, pp. 20–23.

[9] Lee K. Y., Park S. -J. Thermal stress intensity factors for partially insulated interface crack under uniform heat flow. Eng. Fract., 1995, Mech. 50, no. 4, pp. 475–482.

[10] Ordyan M. G., Petrova V. E. The task of thermal conductivity for a bimaterial with a system of partially heat permeable cracks and a heat source. [Ordyan M. G., Petrova V. E. Zadacha teploprovodnosti dlya bimateriala s sistemoy chastichno teplopronitsaemykh treshchin i teplovym istochnikom]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta (Estestvennonauchnaya seriya — Proceedings of Samara State University (Nature scientific series)*, 2009, no. 4 (70), pp. 154–170.

[11] Ordyan M. G., Petrova V. E. Thermal problem of interaction of partially insulated cracks in a bimaterial subjected by a heat flux. [Ordyan M. G., Petrova V. E. Zadacha teploprovodnosti o vzaimodeystvii chastichno teplopronitsaemykh treshchin v dvukhkomponentnom materiale pod deystviem teplovogo potoka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika, matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics, mathematics*, 2009, no. 1, pp. 141–149.

[12] Petrova V., Schmauder S. Thermal fracture of a functionally graded / homogeneous bimaterial with a system of cracks. Teoretical and Applied Fracture Mechanics, 2011, V. 55, pp. 148–157.

[13] Chiu Tz-Cheng, Tsai Shang-Wu, Chue Ching-Hwei. Heat conduction in a functionally graded medium with an arbitrarily oriented crack. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2013, V. 67, pp. 514–522.

[14] Glushko A. V., Loginova E. A. Asymptotic properties of problem solution on the stationary distribution of heat in an inhomogeneous plane with a crack. [Glushko A. V., Loginova E. A. Asimptoticheskie svoystva resheniya zadachi o statsionarnom raspredelenii tepla v neodnorodnoy ploskosti s treshchinoy]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika, matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics, mathematics*, 2010, no. 2, pp. 47–50.

[15] Loginova E. A. Construction of the solution of the problem of the stationary heat distribution in an inhomogeneous plane with a crack and its asymptotic behavior. [Loginova E. A. Postroenie resheniya zadachi o statsionarnom raspredelenii tepla v neodnorodnoy ploskosti s treshchinoy i ego asimptotika]. Materials of Voronezh Winter Mathematical School «Modern methods in theory of functions and related problems», Voronezh, 2011, pp. 202–203.

[16] Loginova E. A. Asymptotic representation of the heat flows for the problem of the stationary heat distribution in an inhomogeneous plane with crack. [Loginova E. A. Asimptoticheskoe predstavlenie teplovykh potokov dlya zadachi o statsionarnom raspredelenii tepla v neodnorodnoy ploskosti s treshchinoy]. Modern methods of the theory of boundary value problems: materials of the Voronezh Spring Mathematical School «Pontryagin read–XXII», Voronezh, 2011, pp. 104–105.

[17] Loginova E. A. Asymptotic properties of problem solution on the stationary distribution of heat in an inhomogeneous plane with a crack. [Loginova E. A. Asimptoticheskoe povedenie teplovogo potoka dlya zadachi o statsionarnom raspredelenii tepla v neodnorodnoy ploskosti s treshchinoy]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika, matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics, mathematics*, 2012, no. 1, pp. 157–161.

[18] Ryabenko A. S. Asymptotic properties of problem solution on the stationary distribution of heat in a homogeneous plane with a crack. [Ryabenko A. S. Asimptoticheskie svoystva resheniya zadachi o statsionarnom raspredelenii tepla v odnorodnoy ploskosti s treshchinoy]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika, matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics, mathematics*, 2012, no. 1, pp. 187–194.

[19] Glushko A. V., Ryabenko A. S., Loginova E. A. The study of the asymptotic properties of the solution of the problem of the stationary heat distribution in the plane with a variable coefficient internal thermal conductivity. [Glushko A. V., Ryabenko A. S., Loginova E. A. Izuchenie asimptoticheskikh svoystv resheniya zadachi o statsionarnom raspredelenii tepla v ploskosti s peremennym koeffitsientom vnutrenney teploprovodnosti]. Modern methods of the theory of boundary value problems: proceedings of the Voronezh Mathematical School «Pontryagin read–XXIII», Voronezh, 2012, pp. 47–49.

[20] Glushko A. V., Ryabenko A. S. Modeling of heat transfer in a non-homogeneous material with a crack. The study of singularity at the vicinity of the crack tips. 19^{th} European Conference on Fracture «Fracture Mechanics for Durability, Reliability and Safety»: Book of Abstracts, 26-31 August, Kazan, 2012, pp. 269.

[21] Glushko A. V., Ryabenko A. S. Modeling of heat transfer in a non-homogeneous material with a crack. The study of singularity at the vicinity of the crack tips. 19^{th} European Conference on Fracture «Fracture Mechanics for Durability, Reliability and Safety»: festschrift: [Electronic resource], Kazan: Foliant, 2012, 1 electronic optical disc (CD-Rom).

[22] Loginova E. A. Solution of the problem of the heat distribution in an inhomogeneous material with a crack when the time is big unlimited. [Loginova E. A. Reshenie zadachi o raspredelenii tepla v neodnorodnom materiale s treshchinoy pri neogranichenno bol'shom vremeni]. Materials the Fourth International Scientific Conference «Modern problems of applied mathemat-

ics, control theory and mathematical modeling (PMTUMM–2011)», Voronezh, 2011, pp. 181–182.

[23] Loginova E. A. Heat distribution in an inhomogeneous material with a crack. [Loginova E. A. Postroenie resheniya zadachi o raspredelenii tepla v neodnorodnom materiale s treshchinoy]. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika, mekhanika, astronomiya — Proceedings of St. Petersburg State University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2012, Issue. 1, pp. 40–47.

[24] Chernikova A. S. On the asymptotic behavior near the boundary of the solution of the problem of the stationary heat distribution in the plane with the cross crack. [Chernikova A. S. Ob asimptotike vblizi granits resheniya zadachi o statsionarnom raspredelenii tepla v ploskosti s krestoobraznoy treshchinoy]. Modern methods of the theory of boundary value problems: materials of the Voronezh Spring Mathematical School «Pontryagin read–XXII», Voronezh: Voronezh State University, 2011, pp. 205–207.

[25] Ryabenko A. S. Asymptotic properties of solution of the problem of the stationary heat distribution in a homogeneous circle with the internal crack. [Ryabenko A. S. Asimptoticheskie svoystva resheniya zadachi o statsionarnom raspredelenii tepla v odnorodnom kruge s vnutrenney treshchinoy]. Modern methods of the theory of boundary value problems: proceedings of the Voronezh Mathematical School «Pontryagin read–XXIII», Voronezh, 2012, pp. 159–161.

[26] Ryabenko A. S. The presentation of the solution of the second boundary value problem describing the stationary heat distribution in a halfspace with a crack which is a perpendicular to the boundary. [Ryabenko A. S. Predstavlenie resheniya vtoroy kraevoy zadachi, opisyvayushchey statsionarnoe raspredelenie tepla v poluprostranstve s treshchinoy perpendikulyarnoy granitse]. Modern methods of the theory of boundary value problems: materials of the Voronezh Spring Mathematical School «Pontryagin read - XXIV», Voronezh, 2013, pp. 163–164.

[27] Glushko A. V., Ryabenko A. S., Chernikova A. S. Construction of the stationary temperature field for two connected halfspaces with the interphase crack. [Glushko A. V., Ryabenko A. S., Chernikova A. S. Postroenie statsionarnogo polya temperatury dlya dvukh svyaznykh poluprostranstv s mezhfazovoy treshchinoy]. Modern methods of the theory of boundary value problems: materials of the Voronezh Spring Mathematical School «Pontryagin read–XXIII», Voronezh, 2012, pp. 49–50.

[28] Chernikova A. S. Asymptotics of the solution of the problem of conjugation of two inhomogeneous materials with a crack on the boundary. [Chernikova A. S. Asimptotiki resheniya zadachi o sopryazhenii dvukh neodnorodnykh materialov s treshchinoy na granitse]. Modern methods of the theory of boundary value problems: materials of the Voronezh Spring Mathematical School «Pontryagin read–XXIV», Voronezh: Voronezh State University, 2013, pp. 216–217.

[29] Glushko A. V., Chernikova A. S. The problem of the heat distribution under conjugation two inhomogeneous materials with a crack. [Glushko A. V., Chernikova A. S. Zadacha o raspredelenii tepla pri sopryazhenii dvukh neodnorodnykh materialov s treshchinoy]. Differential equations, function theory, and nonlinear analysis and optimization: Proceedings of the All-Russian scientific-practical conference. Moscow, 23-26 April 2013, Moscow: Peoples' Friendship University of Russia, 2013, pp. 58–59.

[30] Vladimirov V. S. Equations of mathematical physics. [Vladimirov V. S. Uravneniya matematicheskoy fiziki]. Moscow: Nauka, 1976, 527 p.

[31] Kolmogorov A. N., Fomin S. V. Elements of the theory of functions and the functional analysis. 7 edition. [Kolmogorov A. N., Fomin S. V. Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza. 7 izdanie]. Moscow: FIZMATLIT, 2004, 572 p.

[32] Vatson G. N. The theory of Bessel's functions. [Vatson G. N. Teoriya besselevykh funktsiy]. Moscow: Publishing house of foreign literature, 1949, 799 p.

[33] Vladimirov V. S., Mikhailov V. P., Vasharin A. A. and oth. Collection of tasks on equations of mathematical physics. [Vladimirov V. S., Mikhailov V. P., Vasharin A. A. i dr. Sbornik zadach

po uravneniyam matematicheskoy fiziki]. Moscow: Nauka, 1982, 256 p.

[34] Nikol'skii S. M. Approximation of functions of several variables and imbedding theorems. [Nikol'skii S. M. Priblizhenie funktsiy mnogikh peremennykh i teoremy vlozheniya]. Moscow: Main editorial office of Physics and Mathematics of literary publishing house «Nauka», 1977, 456 p.

[35] Kudryavcev L. D. The course of the mathematical analysis: textbook for university students: in 3 vol. Vol. 3. Harmonic analysis. Elements of functional analysis. [Kudryavcev L. D. Kurs matematicheskogo analiza: uchebnik dlya studentov vuzov: v 3 tomakh. T. 3. Garmonicheskiy analiz. Elementy funktsional'nogo analiza]. Moscow: Drofa, 2006, 350 p.

Глушко А. В., доктор физико–математических наук, профессор, заведующий кафедрой уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: kuchp2@math.vsu.ru
Тел.: (473)220–86–18

Glushko A. V., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of partial differential equations and probability theory department, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: kuchp2@math.vsu.ru
Tel.: (473)220–86–18

Рябенко А. С., кандидат физико–математических наук, доцент кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: alexr-83@yandex.ru
Тел.: (473)220–86–18

Ryabenko A. S., Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of partial differential equations and probability theory department, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: alexr-83@yandex.ru
Tel.: (473)220–86–18

Черникова А. С., аспирант кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: chernikova-an@mail.ru
Тел.: (473)220–86–18

Chernikova A. S., PhD Student, Department of partial differential equations and probability theory, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: chernikova-an@mail.ru
Tel.: (473)220–86–18