УДК 517.986.6

О НЕКОТОРЫХ СЛЕДСТВИЯХ ИЗ БЕСКОНЕЧНОМЕРНОЙ ВЕРСИИ ТЕОРЕМЫ БОРСУКА-УЛАМА ДЛЯ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ*

Б. Д. Гельман[1]**, Н. М. Жук**[2]

[1] *Воронежский государственный университет,*
[2] *ОГАПОУ «Алексеевский колледж»*

Поступила в редакцию 06.05.2014 г.

Аннотация: хорошо известна классическая теорема Борсука-Улама о нулях нечетного отображения на сфере в конечномерном банаховом пространстве, находящая многочисленные приложения в различных задачах математики. Ранее в работе авторов была доказана теорема, обобщающая теорему Борсука-Улама на случай когда сфера лежит в бесконечномерном банаховом пространстве, а нечетное отображение является многозначным вполне непрерывным отображением с выпуклыми образами. В этой статье были рассмотрены некоторые следствия из доказанной теоремы. Данная статья посвящена доказательству новых следствий из доказанной авторами теоремы. Рассматриваются некоторые приложения в анализе и теории управляемых систем.

Ключевые слова: сюръективный оператор; многозначное отображение; дифференциальное включение.

ON SOME CONSEQUENCES OF THE INFINITE-DIMENSIONAL VERSION OF THE BORSUK-ULAM THEOREM FOR SET-VALUED MAPPINGS

B. D. Gel'man, N. M. Zhuk

Abstract: known classical Borsuk-Ulam theorem on the zeros of odd maps on the sphere in finite-dimensional Banach space, finding numerous applications in a variety of mathematical problems. Previously by the authors proved a theorem which generalizes the Borsuk-Ulam theorem to the case when the sphere is in the infinite-dimensional Banach space and odd mapping is a completely continuous a multimap with convex images. In this article I have discussed some of the consequences of the above theorem. This article is devoted to the proof new corollary of the authors of the theorem. Some applications are considered in the analysis and the theory of control systems.

Keywords: surjective operator, a set-valued mapping; differential inclusion.

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известна конечномерная классическая теорема Борсука-Улама, находящая широкие приложения в различных задачах. Одна из эквивалентных формулировок этой теоремы такова (см., например, [1]).

* Это исследование поддержено РФФИ: грант N^0 14-01-00468-а

Теорема (Борсук–Улам) *Пусть S^n — единичная сфера в пространстве R^{n+1}, пусть $f: S^n \to R^k$ — непрерывное нечетное отображение. Если $k \leqslant n$, то существует по крайней мере одна точка $x_0 \in S^n$ такая, что $f(x_0) = 0$.*

В работах [2], [3] была доказана теорема, распространяющая эту теорему на случай бесконечномерных банаховых пространств.

В работе [4] была доказана теорема обобщающая бесконечномерную версию теоремы Борсука-Улама на случай, когда нечетное отображение является многозначным. В этой статье также были рассмотрены некоторые следствия из доказанной теоремы.

Настоящая статья посвящена доказательству новых приложений многозначной версии теоремы Борсука-Улама в анализе и теории управляемых систем.

2. ТЕОРЕМА БОРСУКА-УЛАМА ДЛЯ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Многозначное отображение метрического пространства X в нормированное пространство Y — это соответствие, сопоставляющее каждой точке $x \in X$ непустое подмножество $F(x) \subset Y$, называемое образом точки x. В дальнейшем, если образы многозначного отображения F являются выпуклыми замкнутыми (компактными) множествами, то будем записывать это следующим образом, $F: X \to Cv(Y)$ ($F: X \to Kv(Y)$). Необходимые сведения из теории многозначных отображений содержатся в [5].

Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства, $A: D(A) \subset E_1 \to E_2$ — замкнутый линейный сюръективный оператор, где $D(A)$ — область определения оператора A.

Если подпространство $Ker(A)$ не является дополняемым в пространстве E_1, то не существует линейного непрерывного оператора правого обратного к оператору A, однако имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. *Для любого числа k, $||A^{-1}|| < k$, существует непрерывное нечетное отображение $q: E_2 \to E_1$, такое, что выполнены следующие условия:*
1) $A(q(y)) = y$ для любого $y \in E_2$;
2) $||q(y)|| \leqslant k||y||$ для любого $y \in E_2$.

Доказательство этой леммы содержится, например, в [3].

Пусть F – многозначное отображение, определенное на множестве $X \subset E_1$ и действующее в E_2.

Определение 1. *Будем говорить, что отображение $F: X \to Kv(E_2)$ — компактно по модулю отображения A (или A-компактно), если для любого ограниченного множества $D \subset E_2$ и любого ограниченного множества $B \subset X$ множество $\overline{F(B \cap A^{-1}(D))}$ является компактным. Если отображение F является A-компактным и полунепрерывным сверху, то будем говорить, что оно A-вполне непрерывно.*

Справедливо следующее необходимое и достаточное условие A-полной непрерывности многозначного отображения F.

Пусть банахово пространство E — это множество $D(A)$, снабженное нормой графика $||x||_{1,2} = ||x||_1 + ||A(x)||_2$. Очевидно, что вложение $j: E \to E_1$ является непрерывным отображением. Пусть $X \subset D(A)$. Обозначим $\widetilde{X} = j^{-1}(X)$ и рассмотрим отображение $\widetilde{F}: \widetilde{X} \to Kv(E_2)$, $\widetilde{F}(x) = F(j(x))$.

Предложение 1. *Полунепрерывное сверху отображение $F: X \to Kv(E_2)$ является A-вполне непрерывным, тогда и только тогда, когда отображение $\widetilde{F}$ является вполне непрерывным.*

Доказательство этого утверждения содержится в [4].

Пусть $S_r(0)$ — сфера радиуса r с центром в нуле пространства E_1, $F: S_r(0) \to Kv(E_2)$ — A-

вполне непрерывное нечетное многозначное отображение. Рассмотрим следующее включение:

$$A(x) \in F(x) \qquad (1).$$

Обозначим множество решений этого включения $N(A, F)$.

Имеет место следующее обобщение теоремы Борсука-Улама на многозначные отображения (см. [4]).

Теорема 1. *Если* $dim(Ker\ A) \geqslant n > 0$, *то множество* $N(A, F) \neq \varnothing$ *и* $dim(N(A, F)) \geqslant n - 1$.

В данной работе будут приведены некоторые новые следствия из этой теоремы.

3. О НЕКОТОРЫХ ПРИЛОЖЕНИЯХ В АНАЛИЗЕ

3.1. О нечетных многозначных отображениях на сфере в банаховом пространстве

Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства, $S_r(0) \subset E_1$ — сфера радиуса r с центром в нуле, $F : S_r(0) \to Kv(E_2)$ — многозначное вполне непрерывное нечетное отображение.

Справедливо следующее следствие из теоремы 1.

Теорема 2. *Если* $dim\ E_1 = \infty$, *то* $0 \in \overline{F(S_1[0])}$.

Доказательство. Так как F является вполне непрерывным многозначным отображением, то множество $K = \overline{F(S_1[0])}$ является компактом в пространстве E_2. Предположим противное, т.е. $0 \notin K$. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $\rho(0, K) \geqslant \varepsilon_0 > 0$. Пусть $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset K$ — конечная $\frac{\varepsilon_0}{3}$-сеть, в силу нечетности отображения F множество K симметрично относительно нуля. Рассмотрим множество $\tau = \{x_1, \ldots, x_n, -x_1, \ldots, -x_n\}$. Обозначим $A = co(\tau)$ — выпуклую оболочку, а $L = L(\tau)$ — линейную оболочку этих точек. Пусть многозначное отображение $F_1 : S_1[0] \to Kv(L)$ определено условием,

$$F_1(x) = \overline{U_{\frac{\varepsilon_0}{3}}(F(x))} \cap A,$$

где множество

$$U_{\frac{\varepsilon_0}{3}}(F(x)) = \bigcup_{y \in F(x)} U_{\frac{\varepsilon_0}{3}}(y)$$

является $\frac{\varepsilon_0}{3}$-раздутием множества $F(x)$. Очевидно, что F_1 имеет выпуклые образы, вполне непрерывно и нечетно.

Пусть $e_1, \ldots, e_n \in S_r[0]$ линейно независимые вектора, E^n — линейная оболочка этих векторов. Тогда пространство E_1 можно разложить в прямую сумму $E_1 = E^n \oplus \widehat{E}_1$. Пусть $A : E_1 \to L \subset E_2$ — линейный оператор определенный следующим образом: для любого $x = u + v$, $u = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i\, e_i \in E^n$ и $v \in \widehat{E}_1$, $A(x) = A(u)$, а $A(u) = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i x_i$. Очевидно, что оператор $A : E_1 \to L$ является линейным непрерывным сюръективным оператором. Рассмотрим включение

$$\eta\, A(x) \in F_1(x)$$

на сфере $S_r[0]$, где число $\eta \in (0, \frac{\varepsilon_0}{3r\,||A||})$. В силу теоремы 1 это включение имеет решение x_*. Пусть $y_* = A(x_*)$, тогда $\eta\, y_* \in F_1(x_*)$. Имеем, $||y_*|| = ||A(x_*)|| \leqslant r\,||A||$, следовательно, $||\eta\, y_*|| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{3}$. Так как $\eta\, y_* \in F_1(x_*)$, то в силу определения отображения F_1 существует точка $\widehat{y}_* \in F(x_*)$ такая, что $||\widehat{y}_* - \eta\, y_*|| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{3}$. Тогда $||\widehat{y}_*|| < \varepsilon_0$. Полученное противоречие и доказывает утверждение.

Рассмотрим следующее следствие из теоремы 2.

Следствие 1. *Пусть $G : S_r(0) \to Kv(E_2)$ — многозначное вполне непрерывное отображение, тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такая точка $x_* \in S_r(0)$ и точки $y_1 \in G(x_*)$, $y_2 \in G(-x_*)$, что $||y_1 - y_2|| < \varepsilon$.*

Доказательство. Рассмотрим многозначное отображение

$$F : S_r(0) \to Kv(E_2), \text{ где } F(x) = \frac{1}{2}(G(x) - G(-x)).$$

Очевидно, что это отображение является нечетным и вполне непрерывным. Следовательно, в силу теоремы 2 существует такая точка $x_* \in S_r(0)$, что $\rho(0, F(x_*)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда существуют точки $y_1 \in G(x_*)$, $y_2 \in G(-x_*)$ такие, что $||y_1 - y_2|| < \varepsilon$. Это и доказывает утверждение.

3.2. О собственных векторах многозначных отображений

Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства, $A : D(A) \subset E_1 \to E_2$ - замкнутый линейный сюръективный оператор, $E = E_1 \times \mathbb{R}$, где $\mathbb{R}$ — одномерное нормированное пространство. Пусть в E задана некоторая норма $\|(x,\lambda)\|$. Обозначим $S_r(0)$ сферу радиуса r с центром в нуле пространства E, $F : S_r(0) \to Kv(E_2)$ — нечетное вполне непрерывное многозначное отображение.

Рассмотрим включение:

$$A(x) \in F(x,\lambda). \tag{2}$$

Из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Лемма 1. *При сделанных предположениях множество $N(A,F) \neq \varnothing$ и топологическая размерность $dim(N(A,F)) \geqslant dim(Ker\,A)$.*

Доказательство. Рассмотрим оператор $\overline{A} : D(\overline{A}) \subset E \to E_2$, определенный условием $\overline{A}(x,\lambda) = A(x)$, где $D(\overline{A}) = D(A) \times \mathbb{R}$. Очевидно, что оператор $\overline{A}$ является замкнутым, сюръективным и $dim(Ker(\overline{A}) \geqslant 1$.

В силу теоремы 1 включение $\overline{A}(x,\lambda) \in F(x,\lambda)$ имеет решение и размерность

$$dim(N(A,F)) = dim(N(\overline{A},F)) \geqslant dim(Ker\,\overline{A}) - 1 = dim(Ker\,A).$$

Лемма доказана.

Применим это утверждение для изучения собственных векторов многозначных отображений.

Пусть $B_r[0] \subset E_1$ — замкнутый шар радиуса $r > 0$ с центром в нуле, $G : B_r[0] \to Kv(E_2)$ — многозначное вполне непрерывное отображение.

Определение 1. *Ненулевой вектор $x_* \in B_r[0]$ будем называть собственным вектором отображения G относительно оператора A, если существует число λ_* такое, что $A(x_*) \in \lambda_*\,G(x_*)$. В этом случае число λ_* называется собственным значением отображения G, отвечающем собственному вектору x_*.*

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть $G : B_1[0] \to Kv(E_2)$ — многозначное вполне непрерывное четное отображение и $G(0) \not\ni 0$. Тогда для любого числа $p \geqslant 1$ существует собственный вектор $x_* \in B_1[0]$ и отвечающее этому вектору собственное значение λ_* такие, что $|\lambda_*| = \sqrt[p]{r^p - \|x_*\|^p}$.*

Доказательство. Пусть пространство $E = E_1 \times \mathbb{R}$. Рассмотрим произвольное число $p \geqslant 1$. Норму в E определим следующим образом: $\|(x,\lambda)\| = \sqrt[p]{|\lambda|^p + \|x\|^p}$. Рассмотрим многозначное отображение $F : S_r(0) \subset E \to Kv(E_2)$ определенное условием:

$$F(x,\lambda) = \lambda\,G(x).$$

Очевидно, что это отображение нечетно, т.к.

$$F(-x,-\lambda) = -\lambda G(-x) = -\lambda G(x) = -F(x,\lambda).$$

В силу леммы 1 включение

$$A(x) \in F(x,\lambda) = \lambda\, G(x)$$

имеет решение $(x_*, \lambda_*) \in S_r(0)$, т. е.

$$A(x_*) \in F(x_*, \lambda_*) = \lambda_* G(x_*).$$

Так как точка $(x_*, \lambda_*) \in S_r(0)$, то $\|(x_*, \lambda_*)\| = r$, то есть

$$\sqrt[p]{|\lambda_*|^p + \|x_*\|^p} = r,$$

следовательно,

$$|\lambda_*| = \sqrt[p]{r^p - \|x_*\|^p}.$$

Тогда вектор $x_* \neq 0$, т.к. $A(0) = 0$, $G(0) \not\ni 0$ и $\lambda_* \neq 0$. Следовательно x_* является собственным вектором, а λ_* отвечающим ему собственным значением. Что и требовалось доказать.

4. ОБ ОДНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЕ

Пусть E_1, E_2, E_3 — банаховы пространства, $A : D(A) \subset E_1 \to E_2$ - замкнутый линейный сюръективный оператор, $f : E_1 \times E_3 \to E_2$ — нелинейное отображение, удовлетворяющее следующим условиям:

(f_1) *f является непрерывным отображением;*

(f_2) *отображение $f(x,\cdot) : E_3 \to E_2$ является линейным для любого $x \in E_1$;*

(f_3) *отображение $f(\cdot,u) : E_1 \to E_2$ является нечетным для любого $u \in E_3$.*

Пусть $U : E_1 \to Kv(E_3)$ — полунепрерывное сверху многозначное отображение, удовлетворяющее условию:

(U_1) *отображение U является четным отображением.*

Рассмотрим следующую задачу:

$$A(x) = f(x,u), \tag{3}$$

$$u \in U(x). \tag{4}$$

Будем называть задачу (3), (4) — задачей управления с обратной связью, а множество $U(x)$ — множеством допустимых управлений для точки $x \in E_1$.

Решением управляемой системы (3), (4) будем называть пару (x_*, u_*) такую, что

$$A(x_*) = f(x_*, u_*),$$

$$u_* \in U(x_*).$$

Точку $x_* \in E_1$ будем называть траекторией управляемой системы, а точку $u_* \in E_3$ — соответствующим управлением. Множество решений управляемой системы (3), (4) будем обозначать $T(A,f)$.

Рассмотрим многозначное отображение $F : E_1 \to Kv(E_2)$, $F(x) = f(x, U(x))$. В силу сделанных предположений F имеет выпуклые компактные образы и является нечетным.

Из теоремы 1 естественно вытекает следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть отображения f и U удовлетворяют сделанным предположениям. Если отображение F является A-вполне непрерывным, то $T(A,f) \neq \varnothing$. Причем для любого числа $r > 0$ существует решение $(x_*, u_*) \in T(A,f)$ такое, что $||x_*|| = r$.*

Доказательство. В силу сделанных предположений F имеет выпуклые образы, является нечетным и A-вполне непрерывным. Следовательно, в силу теоремы 1 включение $A(x) \in F(x)$ имеет непустое множество решений $N(A, F)$ на сфере $S_r(0) \subset E_1$. Очевидно, что каждому решению $x_* \in N(A, F)$ отвечает пара $(x_*, u_*) \in T(A, f)$. Лемма доказана.

Применим лемму 2 к изучению следующей задачи.

Пусть $g : [0,1] \times R^n \times R^p \to R^n$ — непрерывное отображение, удовлетворяющим следующим условиям:

(I_1) *существуют такие числа* α, β, *что для любых* $x \in R^n$, $u \in R^p$ *и* $t \in [0,1]$ *выполнено неравенство*

$$||g(t, x, u)|| \leqslant \alpha(||x|| + ||u||) + \beta;$$

(I_2) *для любого* $t \in [0,1]$ *отображение* $g_t(x, u) = g(t, x, u)$ *является нечетным по* $x \in R^n$ *и линейным по* $u \in R^p$.

Пусть многозначное отображение $G : [0,1] \times R^n \to Kv(R^p)$ удовлетворяет следующим условиям:

(G_1) *для каждого* $x \in R^n$ *многозначное отображение* $G(\cdot, x) : [0,1] \to Kv(R^n)$ *является измеримым;*

(G_2) *для почти всех* $t \in [0,1]$ *многозначное отображение* $G(t, \cdot) : R^n \to Kv(R^n)$ *является полунепрерывным сверху и четным;*

(G_3) *существуют такие суммируемые функции* $\alpha_1, \beta_1 : [0,1] \to R^1$, *что для любого* $x \in R^n$ *и почти всех* $t \in [0,1]$ *выполнено неравенство*

$$\max_{y \in G(t,x)} ||y|| \leqslant \alpha_1(t)||x|| + \beta_1(t).$$

Пусть заданы линейные непрерывные функционалы $l_i : C_{([0,1], R^n)} \to R^1$, $i = 1, \ldots, k$, причем $0 \leqslant k < n$. Рассмотрим линейный оператор $L : C_{([0,1], R^n)} \to R^k$ определенный соотношением, $L(x) = (l_1(x), \ldots, l_k(x))$.

Будем считать пространство R^n вложенным в пространство $C_{([0,1], R^n)}$, т.е. точке $x_0 \in R^n$ сопоставим постоянное отображение $x^0(t) = x_0$. Пусть отображение L удовлетворяет следующему условию:

(L_1) *отображение* $L|_{R^n} : R^n \subset C_{([0,1], R^n)} \to R^k$ *является сюръективным оператором.*

Пусть M — произвольное положительное число.

Рассмотрим следующую задачу:

$$x'(t) = g(t, x(t), u(t)), \quad \text{для любого } t \in [0,1], \tag{5}$$

$$u'(t) \in G(t, x(t)), \quad \text{для п.в. } t \in [0,1], \tag{6}$$

$$u(0) = 0 \in R^k, \tag{7}$$

$$l_i(x) = 0 \;\; \text{для любого } i = 1,\, 2,\, \ldots,\, k, \tag{8}$$

$$\max_{t \in [0,1]} ||x(t)|| = M. \tag{9}$$

Решением задачи (5)–(9) будем называть пару функций $(x(t), u(t))$, определенных на промежутке $[0,1]$ и удовлетворяющие уравнению (5) и условиям (6)–(9). Функция $x(t)$ является траекторией системы, а функция $u(t)$ управлением системы. Обозначим через $\Sigma_{M,L}[0,1]$ множество траекторий задачи (5)–(9).

Имеет место следующее предложение.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (I_1), (I_2), (G_1)–(G_3), (L_1), *тогда для любого* $M > 0$ *существует решение* $(x(t), u(t))$ *задачи (5)–(9).*

Доказательство. Рассмотрим линейный оператор

$$A : D(A) \subset C_{([0,1],R^n)} \to C_{([0,1],R^n)} \times R^k$$

определенный условием: $A(x)(t) = (x'(t),\ L(x))$. Областью определения $D(A)$ этого оператора является множество непрерывно дифференцируемых функций на промежутке $[0,1]$. Нетрудно видеть, что этот оператор замкнут, сюръективен и $dim(Ker(A)) = n - k > 0$.

Пусть $x \in C_{([0,1],R^n)}$, рассмотрим многозначное отображение (многозначный оператор суперпозиции):

$$\Im_G(x) = \{\ y \in L^1_{([0,1],R^p)} \mid\ y(t) \in G(t, x(t)) \quad \text{при п.в. } t \in [0,1]\}$$

и многозначный интегральный оператор $U : C_{([0,1],R^n)} \to Kv(C_{([0,1],R^p)})$,

$$U(x)(t) = \{\int\limits_0^t y(\tau)d\tau \mid \quad y \in \Im_G(x)\}.$$

Известно (см., например, [5]), что многозначное отображение U является вполне непрерывным и любая функция $u \in U(x)$ удовлетворяет условиям (6) и (7). В силу четности отображения G многозначное отображение U также является четным.

Рассмотрим отображение $f : C_{([0,1],R^n)} \times C_{([0,1],R^p)} \to C_{([0,1],R^n)} \times R^k$ определенное условием: $f(x,u)(t) = (g(t, x(t), u(t)), 0)$. Тогда задача (5)–(9) эквивалентна следующей системе:

$$A(x) = f(x,u),$$

$$u \in U(x).$$

Рассмотрим многозначное отображение

$$F : C_{([0,1],R^n)} \to Kv(C_{([0,1],R^n)} \times R^k)$$

определенное условием:

$$F(x)(t) = \{(g(t, x(t), \int\limits_0^t y(\tau)d\tau),\ 0) \ \mid y \in \Im_G(x)\},$$

т.е. $F(x) = f(x, U(x))$. Это отображение полунепрерывно сверху, нечетно и имеет выпуклые компактные образы.

Нетрудно заметить, что F является A-вполне непрерывным отображением, т.к. вложение j (см. предложение 1) является вполне непрерывным отображением, а композиция вполне непрерывного отображения и полунепрерывного сверху многозначного отображения с компактными образами является вполне непрерывным многозначным отображением (см. [5]). Таким образом выполнены все условия леммы 2. Теперь утверждение теоремы вытекает из этой леммы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Dugundji J., Granas A. Fixed point theory / Springer-Verlag, New York. – 2003. — 690 p.

[2] Гельман Б.Д. Теорема Борсука-Улама в бесконечномерных банаховых пространствах / Б.Д. Гельман // Математический сборник. — 2002. — Т. 193, № 1. — С. 83–92.

[3] Гельман Б.Д. Бесконечномерная версия теоремы Борсука-Улама / Б.Д. Гельман // Функциональный анализ и его приложения. — 2004. — Т. 38, № 4. — С. 1–5.

[4] Гельман Б.Д. О бесконечномерной версии теоремы Борсука-Улама для многозначных отображений / Б.Д. Гельман, Н.М. Жук // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2011. — № 2. — С. 78–84.

[5] Введение в теорию многозначных отображений / Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский. — М: Либроком., 2011. — 224 с.

REFERENCES

[1] Dugundji J., Granas A. Fixed point theory. Springer-Verlag, New York, 2003, 690 p.

[2] Gel'man B.D. Borsuk–Ulam theorem in infinite-dimensional Banach spaces. [Gel'man B.D. Teorema Borsuka-Ulama v beskonechnomernyx banaxovyx prostranstvax]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 2002, Vol. 193, no. 1, pp. 83–92.

[3] Gel'man B.D. Infinite-dimensional version of the Borsuk-Ulam. [Gel'man B.D. Beskonechnomernaya versiya teoremy Borsuka-Ulama]. *Funkcional'nyj analiz i ego prilozheniya — Functional analysis and its applications*, 2004, Vol. 38, no. 4, pp. 1–5.

[4] Gel'man B.D., Zhuk N.M. On the infinite version of the Borsuk-Ulam for multivalued mappings. [Gel'man B.D., Zhuk N.M. O beskonechnomernoj versii teoremy Borsuka-Ulama dlya mnogoznachnyx otobrazhenij]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2011, no. 2, pp. 78–84.

[5] Borisovich Y.G., Gel'man B.D., Myshkis A.D., Obukhovskii V.V. Introduction to the theory of multivalued mappings end differential inclusion. [Borisovich Yu.G., Gel'man B.D., Myshkis A.D., Obuxovskij V.V. Vvedenie v teoriyu mnogoznachnyx otobrazhenij]. Moscow: Librokom, 2011, 224 p.

Гельман Борис Данилович, доктор физико-математических наук, профессор Воронежского государственного университета, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: gelman@math.vsu.ru

Gel'man Boris Danilovich, Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Professor Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: gelman@math.vsu.ru

Жук Наталья Михайловна, ОГАПОУ «Алексеевский колледж», заведующая отделением информационных систем; Алексеевка, Российская Федерация
E-mail: chuk_n_m@mail.ru

Zhuk Nataliya Mihailovna, OGAPOU «Alekseevsky College», head of the Department of information systems; Alekseevska, Russian Federation
E-mail: chuk_n_m@mail.ru