

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ТЕПЛОМАССОБМЕНОМ НА ПРОНИЦАЕМЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ ПРИ ГИПЕРЗВУКОВЫХ РЕЖИМАХ ПОЛЁТА: СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПРИМЕНЕНИЯ “ПРОСТЫХ” ЗАКОНОВ ВДУВА

Н. Г. Бильченко

Казанский Государственный Энергетический Университет

Поступила в редакцию 13.01.2014 г.

Аннотация: Рассматриваются задачи математического моделирования оптимальной эффузионной тепловой защиты поверхностей гиперзвуковых летательных аппаратов, рассчитанных на вход в атмосферу. Учтены физико-химические процессы (диссоциация и ионизация) в ламинарном пограничном слое сжимаемого газа. Применён теоретико-групповой подход к оптимизации систем с распределёнными параметрами. В основу расчётов положен метод обобщённых интегральных соотношений А. А. Дородницына. Рассматриваются возможности применения специальных классов законов вдува с целью построения тепловой защиты поверхностей гиперзвуковых летательных аппаратов, близкой к оптимальной. Обсуждаются результаты вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: оптимальное управление, тепломассообмен, ламинарный пограничный слой, гиперзвуковые течения, численная оптимизация, “простые” законы вдува.

COMPUTATION EXPERIMENTS IN THE PROBLEMS OF HEAT AND MASS TRANSFER OPTIMAL CONTROL ON PERMEABLE SURFACES IN HYPERSONIC FLOWS: COMPARATIVE ANALYSIS OF “SIMPLE” BLOW LAWS USE

N. G. Bilchenko

Abstract: the problems of intended for the atmosphere entry hypersonic aircraft surfaces optimal effusion heat protection mathematical modeling are considered. The physico-chemical processes (the dissociation and the ionization) in laminar boundary layer of compressible gas are appreciated. The Groups theory approach to distributed parameters systems optimization is applied. A. A. Dorodnitsyn’s method of generalized integral relations is taken as a basis of calculations. Some possibilities of special blow laws use for hypersonic aircraft surfaces heat protection nearing to optimal are considered. Computation experiments numerical results are discussed.

Keywords: optimal control; heat and mass transfer; laminar boundary layer; hypersonic flows; numerical optimization, “simple” blow laws.

Введение. Данная работа представляет собой продолжение статей [1], [2]. Материал данной статьи был упомянут, но не был озвучен в полном объёме на конференции (Международная конференция “Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики”, посвящённая 95-летию Воронежского государственного университета, проходившая 12-14 декабря 2013г. в ВГУ; секция “Механика деформируемого твёрдого тела. Механика жидкости и газа”) из-за ограниченности времени, отведённого на доклад.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Располагая результатами расчётов, моделирующих обтекание цилиндрических и сферических поверхностей гиперзвуковыми потоками воздуха, интересно проанализировать применение различных “простых” (кусочно-линейных, кусочно-постоянных) законов вдува (см. фрагменты I-IV на рис. 1) по сравнению с постоянным законом вдува. Мощность системы охлаждения предполагается одинаковой для всех вариантов законов.

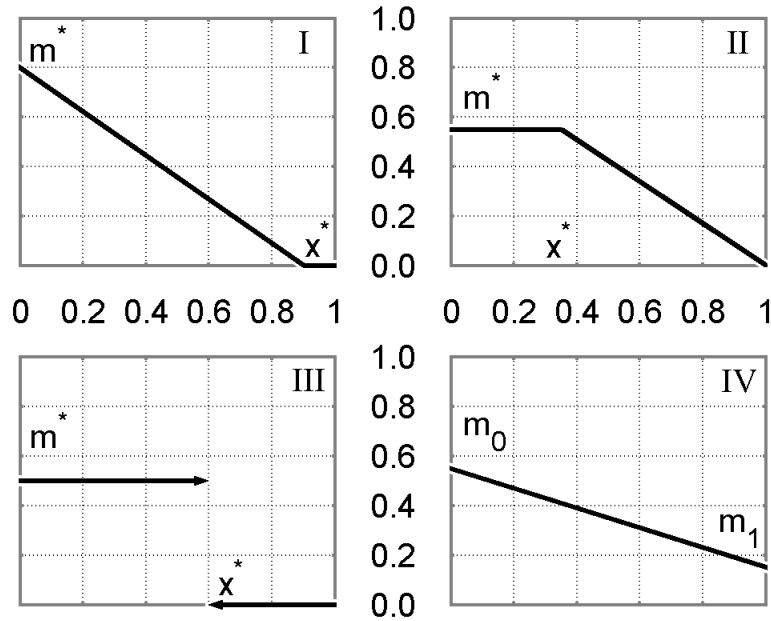


Рис. 1. “Простые” законы вдува

Аналитическое представление законов имеет вид (для упрощения записи чёрточки над безразмерными величинами, в частности — над координатой x , убраны):

“треугольник”:

$$m_I(x) = m_I(x; m^*, x^*) = \begin{cases} m^* \cdot \left(1 - \frac{x}{x^*}\right), & \text{при } x \in [0; x^*]; \\ 0, & \text{при } x \in [x^*; 1]; \end{cases} \quad (1)$$

“горизонтальная трапеция”:

$$m_{II}(x) = m_{II}(x; m^*, x^*) = \begin{cases} m^*, & \text{при } x \in [0; x^*]; \\ m^* \cdot \frac{1-x}{1-x^*}, & \text{при } x \in [x^*; 1]; \end{cases} \quad (2)$$

“ступенька”:

$$m_{III}(x) = m_{III}(x; m^*, x^*) = \begin{cases} m^*, & \text{при } x \in [0; x^*]; \\ 0, & \text{при } x \in (x^*; 1]; \end{cases} \quad (3)$$

“вертикальная трапеция”:

$$m_{IV}(x) = m_{IV}(x; m_0, m_1) = m_0 \cdot (1 - x) + m_1 \cdot x \quad \text{при } x \in [0; 1]. \quad (4)$$

Следует отметить, что закон постоянного вдува

$$m_{IV}^c(x) = m_{IV}(x; m^*, m^*) \equiv m^* \quad \text{при } x \in [0; 1] \quad (5)$$

является частным (при $m_0 = m_1 = m^*$) случаем закона IV и предельным (для $x^* \rightarrow 1$) случаем законов II и III.

Можно сформулировать подзадачи для законов I-IV следующим образом: для заданной мощности системы охлаждения, определяемой с учётом фильтрационного закона Дарси, найти значения параметров $m^* \geq 0$ и $x^* \in [0; 1]$ или $m_0, m_1 \geq 0$, минимизирующие функционал интегрального теплового потока, передаваемого от пограничного слоя к криволинейной проницаемой поверхности летательного аппарата.

2. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО ПРИМЕНЕНИЮ “ПРОСТЫХ” ЗАКОНОВ ВДУВА

Была проведена серия вычислительных экспериментов для различных значений мощности системы охлаждения, безразмерной температуры поверхности, высоты и скорости полёта.

В качестве примера приводятся результаты для случая обтекания цилиндрической и сферической проницаемых поверхностей радиуса $R = 0,1$ м гиперзвуковым потоком ($M_\infty = 10$) равномерно диссоциирующего газа при температурном факторе $\tau_w = 0,25$ и параметрах стандартной атмосферы, соответствующих высоте $H = 10\,000$ м.

На рисунке 2 представлены зависимости интегрального теплового потока от мощности системы охлаждения. Здесь случаю постоянного вдува соответствует кривая 1 - для цилиндрической поверхности и кривая 3 - для сферического тела, далее, кривая 2 соответствует оптимальному вдуву для цилиндрической поверхности [1], кривая 4 - оптимальному вдуву для сферического тела [2].

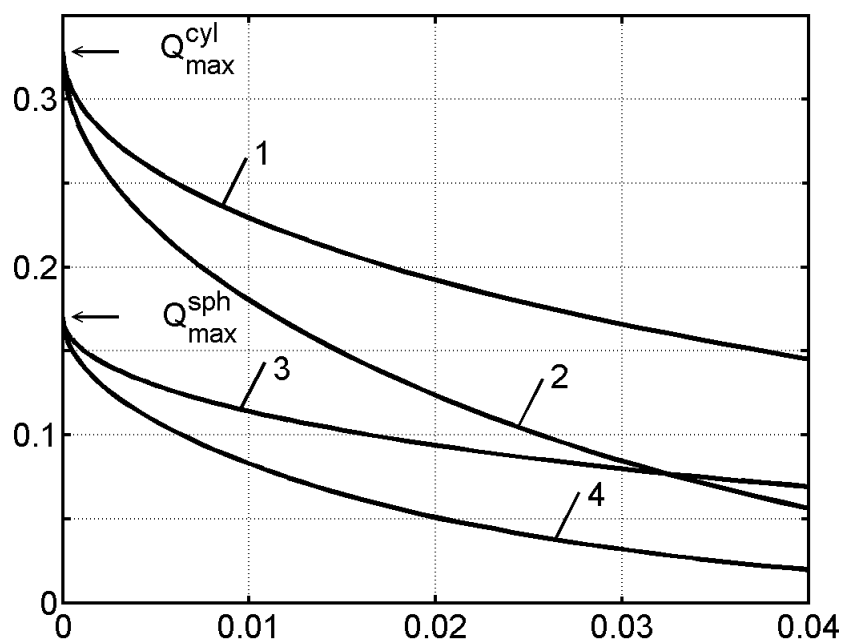


Рис. 2. Зависимость безразмерного интегрального теплового потока от мощности системы охлаждения для цилиндра (кривые 1 и 2) и сферы (кривые 3 и 4)

На рисунке 3 кривая 1 соответствует случаю постоянного вдува $m_{IV}^c(x) \equiv 0,3$; кривая 2 оптимальному управлению $m_{opt}^{cyl}(x)$ на цилиндрической поверхности [1], кривая 3 оптимальному управлению $m_{opt}^{sph}(x)$ на сферической поверхности [2].

Результаты вычислительных экспериментов представлены в таблицах 1-5.

В Таблице 1 кратко представлены основные результаты вычислительных экспериментов

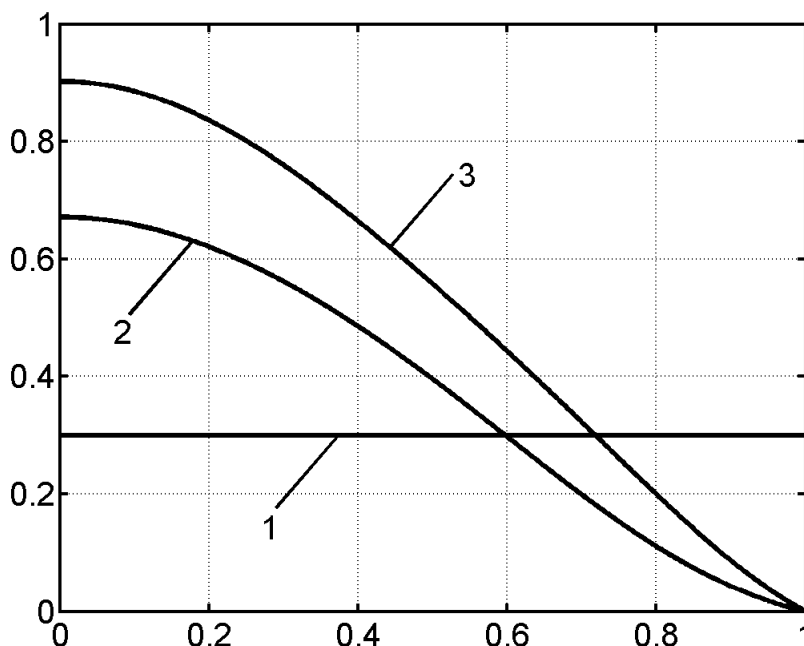


Рис. 3. Зависимость оптимальной скорости вдува от координаты

по построению оптимального управления для цилиндрического [1] и сферического [2] тел радиуса $R = 0,1$ м, находящихся в одинаковых условиях полёта ($\tau_w = 0,25$; $M_\infty = 10$; $H = 10\,000$ м).

Следует отметить, что в обоих случаях оптимальное управление было получено в аналитическом виде с привлечением методов вариационного и операционного исчисления, применением теоретико-группового подхода к оптимизации систем с распределёнными параметрами, а для расчёта характеристик пограничного слоя был использован метод обобщённых интегральных соотношений А.А.Дородницына.

В таблице 1 введены следующие обозначения:

$m_{opt}(0)$ — значение оптимального управления (безразмерного расхода) в окрестности точки торможения; Q_{max} — безразмерное значение интегрального теплового потока, соответствующее случаю отсутствия вдува (неохлаждаемая поверхность); N и Q_{IV}^c — безразмерные значения мощности системы охлаждения и интегрального теплового потока, соответствующие закону постоянного вдува ($m_{IV}^c(x) \equiv 0,3$); Q_{opt} — безразмерное значение интегрального теплового потока, соответствующее оптимальному закону вдува; ΔQ — выигрыш в значении интегрального теплового потока (в процентах), вычисляемый по формуле

$$\Delta Q = \frac{Q_{IV}^c - Q_{opt}}{Q_{IV}^c} \cdot 100. \tag{6}$$

Таблица 1.

	$m_{opt}(0)$	$Q_{max} \cdot 10^3$	$Q_{IV}^c \cdot 10^3$	$Q_{opt} \cdot 10^3$	$\Delta Q, \%$	$N \cdot 10^3$
цилиндр	0,6714	328,3582	208,6626	148,4906	28,83	15,0696
сфера	0,9024	170,0743	115,5563	85,3297	26,16	9,4115

В таблицах 2–5 приведены результаты вычислительных экспериментов по построению тепловой защиты, близкой к оптимальной, реализуемой с помощью “простых” законов вдува I–IV соответственно. Двухпараметрическая оптимизация проводилась численно.

В таблицах 2-5 введены следующие обозначения:

Q_i — безразмерные значения интегрального теплового потока, соответствующие “простым” законам ($i = I, II, III, IV$) вдува; индекс *cyl* относится к случаю обтекания цилиндрического тела, *sph* — сферического; ΔQ_i — выигрыш в значении интегрального теплового потока (в процентах), вычисляемый по формуле

$$\Delta Q_i = \frac{Q_{IV}^c - Q_i}{Q_{IV}^c} \cdot 100. \quad (7)$$

Таблица 2.

x^*	m^*	$Q_I^{cyl} \cdot 10^3$	ΔQ_I^{cyl}	x^*	m^*	$Q_I^{sph} \cdot 10^3$	ΔQ_I^{sph}
1,0	0,7457	149,2739	28,46	1,0	1,0673	85,5186	25,99
0,905	0,8074	147,6861	29,22	0,934	1,1847	84,7274	26,68
0,775	0,9002	150,3134	27,96	0,925	1,2017	84,7424	26,67

Таблица 3.

x^*	m^*	$Q_{II}^{cyl} \cdot 10^3$	ΔQ_{II}^{cyl}	x^*	m^*	$Q_{II}^{sph} \cdot 10^3$	ΔQ_{II}^{sph}
0,867	0,3504	191,2166	8,36	0,905	0,3506	107,7802	6,73
0,472	0,5001	158,7067	23,94	0,654	0,5002	93,5359	19,06
0,066	0,7006	149,3649	28,42	0,064	1,0003	85,5225	25,99

Таблица 4.

x^*	m^*	$Q_{III}^{cyl} \cdot 10^3$	ΔQ_{III}^{cyl}	x^*	m^*	$Q_{III}^{sph} \cdot 10^3$	ΔQ_{III}^{sph}
0,90	0,3583	188,9140	9,46	0,90	0,3843	104,0030	10,00
0,60	0,5531	162,3177	22,21	0,70	0,6078	94,9784	17,81
0,30	0,8687	185,8696	10,92	0,50	0,9713	102,0918	11,65

В данной работе (аналогично [1] и [2]) все вычисления производились с количеством знаков, максимально возможным (80 бит) для имевшегося в наличии оборудования (x87 FPU, соответствующего стандарту IEEE 754); специальное программное обеспечение (повышающее точность) не использовалось. Решения в этом смысле можно считать точными: итерации прекращались при отсутствии их влияния на последние знаки. Однако, в тексте результаты вычислений приводятся в усечённом, достаточном для качественного анализа, виде.

На рисунках 4 и 5 представлены графики зависимостей безразмерного локального теплового потока от координаты для цилиндра и тела вращения соответственно. Здесь кривая 1 соответствует закону вдува “треугольник” (1), кривая 2 - закону “горизонтальная трапеция” (2), кривая 3 - закону “ступенька” (3), кривая 4 - закону “вертикальная трапеция” (4), кривая 5 - случаю постоянного вдува (5), кривая 6 - оптимальному управлению $m_{opt}(x)$, кривые 7 и 8 - случаям предельных вариантов закона IV, кривая 9 - случаю отсутствия вдува (неохлаждаемая поверхность). Значения $(x^*; m^*)$, для которых построены кривые 1-3, и $(m_0; m_1)$ - для кривых 4, 5, 7-9 приведены в таблице 6.

По результатам проведённых расчётов можно сделать следующие выводы:

- 1) Для “горизонтальной трапеции” (закон II) минимум функционала интегрального теплового потока Q_{II} достигается только на границе области, т.е. при $x^* = 0$.
- 2) Для “вертикальной трапеции” (закон IV) минимум Q_{IV} достигается только на границе области, т.е. при $m_1 = 0$.
- 3) Для “треугольника” (закон I) минимум Q_I достигается в точке x^* , являющейся внутренней точкой отрезка $[0; 1]$.

Таблица 5.

m_0	m_1	$Q_{IV}^{cyl} \cdot 10^3$	ΔQ_{IV}^{cyl}	m_0	m_1	$Q_{IV}^{sph} \cdot 10^3$	ΔQ_{IV}^{sph}
0,0	0,3996	264,9339	-26,97	0,0	0,3664	132,2805	-14,47
0,15	0,3566	235,7002	-12,96	0,15	0,3358	123,6709	-7,02
0,35	0,2778	200,1897	4,06	0,35	0,2869	112,9663	2,24
0,55	0,1673	169,7252	18,66	0,70	0,1751	96,7251	16,30
0,7457	0,0	149,2739	28,46	1,0673	0,0	85,5186	25,99

Таблица 6.

Кривая	Закон	x_{cyl}^*	m_{cyl}^*	x_{sph}^*	m_{sph}^*
1	I	0,905	0,8074	0,934	1,1847
2	II	0,472	0,5001	0,654	0,5002
3	III	0,6	0,5531	0,7	0,6078
		m_0^{cyl}	m_1^{cyl}	m_0^{sph}	m_1^{sph}
4	IV	0,55	0,1673	0,70	0,1751
5	IVс	0,3	0,3	0,3	0,3
7	IV	0,7457	0,0	1,0673	0,0
8	IV	0,0	0,3996	0,0	0,3664
9	IV ($N = 0$)	0	0	0	0

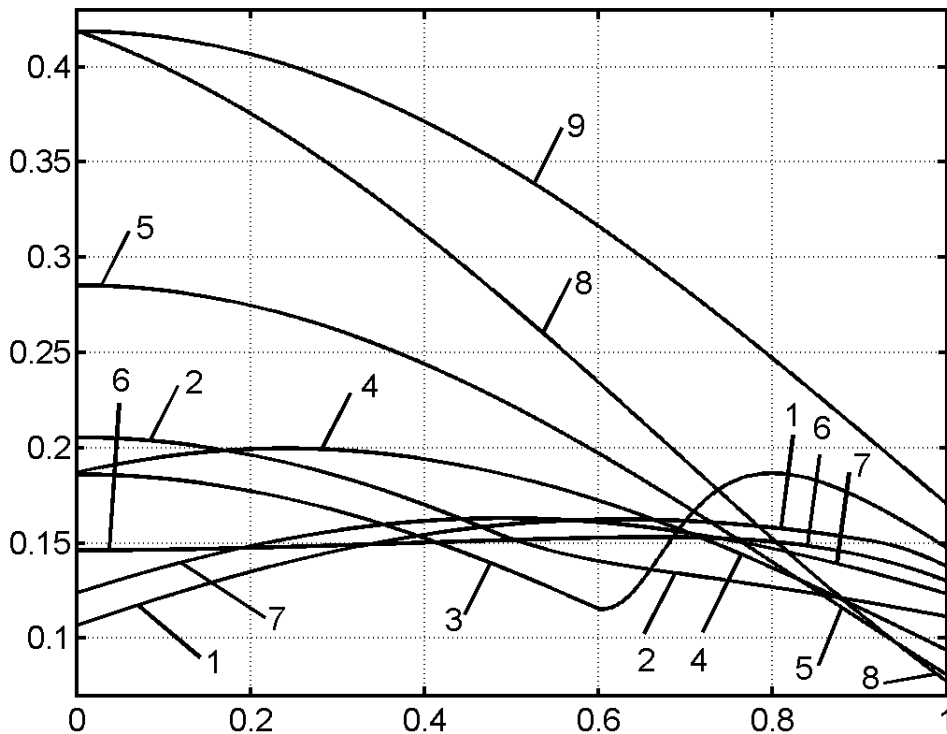


Рис. 4. Зависимость безразмерного локального теплового потока от координаты для различных законов вдува (на цилиндрическом теле)

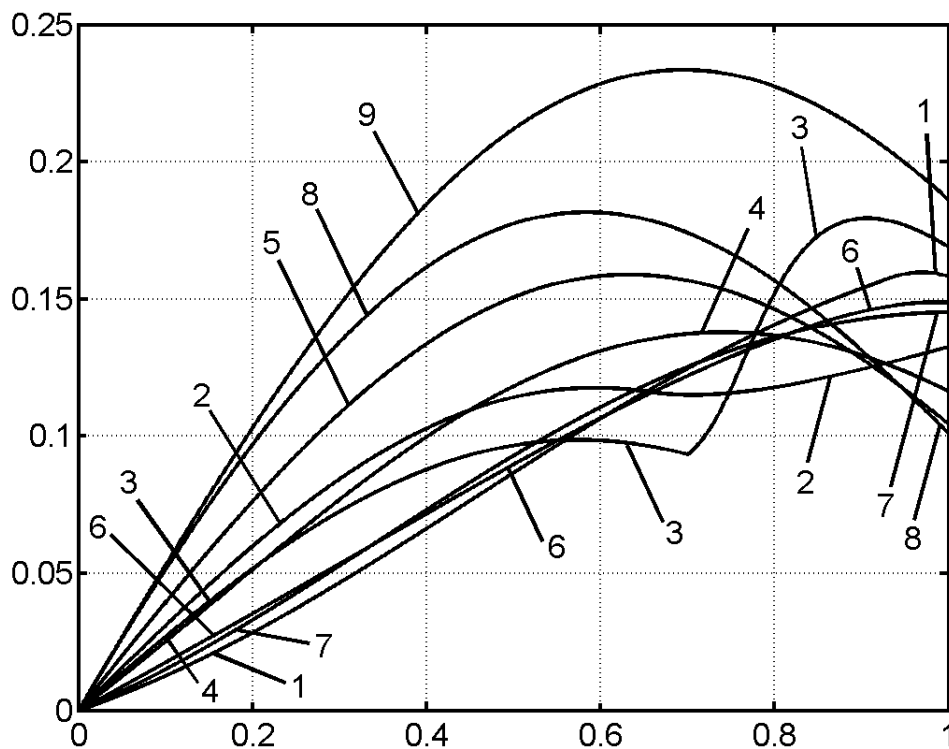


Рис. 5. Зависимость безразмерного локального теплового потока от координаты для различных законов вдува (на теле вращения)

4) Для “треугольника” минимальные значения Q_I оказались даже чуть меньше соответствующих значений Q_{opt} , полученных по аналитической формуле (в первом приближении). В свою очередь, значения Q_{opt} оказались чуть меньше минимальных значений Q_{II} и Q_{IV} :

$$Q_I^{\min} < Q_{opt} < Q_{II}^{\min} = Q_{IV}^{\min}.$$

5) Для “одноступенчатого” вдува (закон III) минимум Q_{III} достигается в точке x^* , являющейся внутренней точкой отрезка $[0; 1]$.

6) Из рассмотренных четырёх “простых” законов вдува наиболее эффективным является “треугольник”, хотя реализуемость “трапеций” лучше с точки зрения “слабого” вдува.

Замечание 1. Оптимальное управление $m_{opt}(x)$ было построено в классе гладких управлений с ограниченными производными. Закон III имеет неограниченную первую производную в точке x^* . У законов I и II вторая производная в точке x^* не ограничена.

Замечание 2. В данной работе были рассмотрены лишь четыре “простых” (кусочно-линейных и кусочно-постоянных) законов вдува (из многих возможных при одной точке излома или разрыва), имеющих наиболее важный (с точки зрения инженерного применения) смысл. Рассмотрение остальных “простых” (в том числе, в некотором смысле абсурдных: например, имитирующих отказ системы управления на начальном участке, или нецелесообразное увеличение охлаждения на конечном участке по сравнению с начальным - см. две верхние строки таблицы 5), а также тех, где численно оптимизируются уже три параметра, а также нелинейных законов вдува, является предметом отдельных исследований.

Замечание 3. Когда у “треугольника” $x^* \rightarrow 1$ или у “горизонтальной трапеции” $x^* \rightarrow 0$ (при этом $m^* \rightarrow m_{\max}$), или у “вертикальной трапеции” $m_1 \rightarrow 0$ (при этом $m_0 \rightarrow m_{\max}$) - реализуется один и тот же закон. При этом

$$m_{\max} > m_{opt}(0).$$

Заключение. Анализ результатов расчётов позволяет обосновать возможность применения “простых” (с точки зрения технической реализации) законов вдува для осуществления эффективной тепловой защиты проницаемых поверхностей гиперзвуковых летательных аппаратов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Бильченко Н.Г. Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта / Н.Г. Бильченко // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2015. — № 1. — С. 83–94.

[2] Бильченко Н.Г. Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях тел вращения при гиперзвуковых режимах полёта / Н.Г. Бильченко // Вестник Воронежского Государственного Университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии. — 2015. — № 1. — С. 5–8.

REFERENCES

[1] Bilchenko N.G. Computation experiments in the problems of heat and mass transfer optimal control on permeable surfaces in hypersonic flows. [Bil'chenko N.G. Vychislitel'nye e'ksperimenty v zadachax optimal'nogo upravleniya teplomassoobmenom na pronicaemyx poverxnostyax pri giperzvukovykh rezhimakh polyota]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2015, no. 1, pp. 83–94.

[2] Bilchenko N.G. Computation experiments in the problems of heat and mass transfer optimal control on permeable spherical surfaces in hypersonic flows. [Bil'chenko N.G. Vychislitel'nye e'ksperimenty v zadachax optimal'nogo upravleniya teplomassoobmenom na pronicaemyx poverxnostyax tel vrashheniya pri giperzvukovykh rezhimakh polyota]. *Vestnik Voronezhskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya: Sistemnyj analiz i informacionnye tehnologii — Proceedings of Voronezh State University. Series: System Analysis and Information Technologies*, 2015, no. 1, pp. 5–8.

*Бильченко Наталья Григорьевна, доцент кафедры Высшей Математики Казанского Государственного Энергетического Университета, Казань, Российская Федерация
E-mail: bilchnat@gmail.com*

*Bilchenko N.G., Associate Professor of Department of Higher Mathematics of Kazan State Power Engineering University, Kazan, Russian Federation
E-mail: bilchnat@gmail.com*