УДК 517.97: 512.81: 512.526

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ТЕПЛОМАССООБМЕНОМ НА ПРОНИЦАЕМЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ ПРИ ГИПЕРЗВУКОВЫХ РЕЖИМАХ ПОЛЁТА

Н. Г. Бильченко

Казанский государственный энергетический университет

Поступила в редакцию 01.11.2013 г.

Аннотация: Рассматриваются три задачи математического моделирования оптимальной эффузионной тепловой защиты поверхностей гиперзвуковых летательных аппаратов, рассчитанных на вход в атмосферу. Учтены физико-химические процессы (диссоциация и ионизация) в ламинарном пограничном слое сжимаемого газа. Применён теоретико-групповой подход к оптимизации систем с распределёнными параметрами. В основу расчётов положен метод обобщённых интегральных соотношений А. А. Дородницына. Обсуждаются результаты вычислительных экспериментов. Подробно рассмотрен случай обтекания проницаемой цилиндрической поверхности при гиперзвуковых режимах полёта.

Ключевые слова: оптимальное управление, тепломассообмен, ламинарный пограничный слой, гиперзвуковые течения, диссоциация, ионизация.

COMPUTATION EXPERIMENTS IN THE PROBLEMS OF HEAT AND MASS TRANSFER OPTIMAL CONTROL ON PERMEABLE SURFACES IN HYPERSONIC FLOWS

N. G. Bilchenko

Abstract: three problems of intended for the atmosphere entry hypersonic aircraft surfaces optimal effusion heat protection mathematical modeling are considered. The physico-chemical processes (the dissociation and the ionization) in laminar boundary layer of compressible gas are appreciated. The Groups theory approach to distributed parameters systems optimization is applied. A. A. Dorodnitsyn's method of generalized integral relations is taken as a basis of calculations. Computation experiments numerical results are discussed. The case of permeable cylindrical surface in hypersonic flows is reported on in detail.

Keywords: optimal control, heat and mass transfer, laminar boundary layer, hypersonic flows, dissociation, ionization.

ВВЕДЕНИЕ

Для решения актуальной проблемы тепловой защиты поверхностей гиперзвуковых летательных аппаратов (ЛА), рассчитанных на вход в атмосферу, учёт физико-химических процессов (диссоциации и ионизации), а также конечной скорости их протекания (неравновесности течения) становится практически необходимым. Теплопередача на поверхностях гиперзвуковых ЛА может быть исследована в рамках теории пограничного слоя. В рамках точных уравнений пограничного слоя большинство работ посвящено оптимальному управлению движением несжимаемой жидкости, оптимальные задачи динамики вязкого сжимаемого газа рассмотрены в единичных публикациях.

Рассматриваются три задачи математического моделирования оптимальной эффузионной тепловой защиты поверхностей гиперзвуковых летательных аппаратов [1]–[4]. В качестве минимизируемого функционала выступает интегральный тепловой поток, передаваемый от пограничного слоя к криволинейной пористой стенке; в качестве ограничения — мощность системы охлаждения, определяемая с учётом фильтрационного закона Дарси; управляющим воздействием является удельный расход охладителя (газа того же состава, что и в набегающем потоке).

Получены необходимые условия оптимальности: уравнения Эйлера–Лагранжа–Остроградского и соответствующие условия трансверсальности.

С помощью теоретико-группового подхода [5] к проблеме оптимизации систем с распределенными параметрами, основанного на совместном использовании инфинитезимального аппарата Ли–Овсянникова и теории инвариантных вариационных задач Нётер — Ибрагимова, удается сконструировать интегралы Нётер для систем уравнений Эйлера–Лагранжа–Остроградского для различных случаев управления пограничным слоем. С вычислительной точки зрения знание дивергентных форм (первых интегралов) в задачах оптимизации управляемых процессов значительно упрощает проблему поиска оптимальных управлений.

Групповые свойства для трёх оптимальных задач гиперзвуковой аэродинамики [1], [3], [6] исследованы в [7], [8].

Установлена особая роль однопараметрической группы переносов по независимой переменной в задачах оптимального управления ламинарным пограничным слоем [9]: первые интегралы для сопряжённых систем (которые получаются только на бесконечномерном операторе) в точности совпадают с первыми интегралами, построенными на операторах переноса по независимой переменной (поперёк пограничного слоя).

В 1960 г. А. А. Дородницын предложил обобщённый метод интегральных соотношений и применил его к решению уравнений пограничного слоя [10]. Особенностью этого метода является то, что он позволяет быстро получить решение задачи на ПЭВМ с необходимой степенью точности. Несмотря на то, что он требует большой предварительной работы по составлению системы аппроксимирующих обыкновенных дифференциальных уравнений, этот метод получил широкое распространение в инженерной практике при расчёте аэродинамических характеристик плоских и осесимметричных потоков сжимаемого газа [11], [12], [13] и трёхмерного пограничного слоя [14].

В основу расчётов [2], [15], [16], [17] положен метод обобщённых интегральных соотношений А. А. Дородницына. Даётся вывод интегральных соотношений для систем уравнений ламинарного пограничного слоя воздуха на проницаемых поверхностях и интегральных соотношений, соответствующих сопряжённым системам, а также приводятся аппроксимирующие системы для рассматриваемых случаев. Разработан алгоритм расчёта минимизирующей последовательности значений конвективного теплового потока. Приводятся результаты вычислительных экспериментов.

Данная работа соответствует докладу, представленному на секции “Механика деформируемого твёрдого тела. Механика жидкости и газа” Международной конференции “Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики”, посвящённой 95-летию Воронежского государственного университета, проходившей 12–14 декабря 2013 г. в ВГУ, и представляет собой заключительную часть исследований, посвящённых решению актуальной проблемы тепловой защиты поверхностей гиперзвуковых летательных аппаратов, рассчитанных на вход в атмосферу [23], [24].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЛАМИНАРНЫМ ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕГО ГАЗА

Эффективным способом управления тепловыми потоками является пористое охлаждение спускаемых летательных аппаратов; при этом, поскольку энергетические ресурсы (суммарный расход охладителя, мощность системы охлаждения) на борту ограничены, то возникает задача построения *оптимального расхода охладителя* на пористом участке поверхности.

При высоких температурах, характерных для полета гиперзвуковых летательных аппаратов, возникает ионизация, благодаря которой газ становится электропроводящим, и появляется возможность воздействовать на газовый поток с помощью магнитных полей.

Поэтому представляет интерес построение *комбинированной* тепловой защиты. С математической точки зрения эта задача укладывается в вариационную схему типа Майера.

1.1. Система уравнений ламинарного пограничного слоя электропроводящего газа на *цилиндрическом* теле при обтекании его под нулевым углом атаки имеет вид [18]:

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{dp}{dx}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\sigma B^2u;$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)=0;$$

$$\rho\left(u\frac{\partial H}{\partial x}+v\frac{\partial H}{\partial y}\right)=\frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial H}{\partial y}\right)+\left(1-\frac{1}{\mathrm{Pr}}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu u\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\sigma B^2u^2;$$

$$p=\rho RT;\quad \mu=\mu_{e0}\tau b(\tau). \tag{1}$$

Здесь ось x направлена вдоль контура тела, ось y перпендикулярна оси x по направлению внешней нормали; u, v — проекции вектора скорости на координатные оси; ρ — плотность; p — давление; μ — вязкость; Pr — число Прандтля; σ — проводимость; $B=B(x;y)$ — магнитная индукция; H — полная энтальпия, R — газовая постоянная, T — температура газа, $b(\tau)$ — известная функция безразмерной температуры $\tau=T/T_{e0}$.

Граничные условия к системе (1) следующие:

$$u=0,\quad v=(m/\rho)_w,\quad H=H_w,\quad (y=0);$$

$$u=U_e(x),\quad H=H_e(x),\quad (y\to\infty);$$

$$u=U_0(y),\quad H=H_0(y),\quad (x=0, y>0). \tag{2}$$

Индекс "e" соответствует параметрам газа на внешней границе пограничного слоя, "0" — в точке полного торможения потока, "w" — параметрам газа на стенке. Здесь $H_w(x)=C_pT_w(x)$, где T_w — заданная температура наружной стороны обшивки (допускается, что она равна температуре пристеночного слоя газа), C_p — удельная теплоёмкость газа; $m_w=(\rho v)_w$ — массовый расход вдуваемого газа (того же состава, что и в набегающем потоке) через единицу поверхности в единицу времени.

Ставится следующая вариационная задача. Среди непрерывных управлений $m_w(x)$ требуется найти такое, которое доставляет минимальное значение количеству тепла

$$Q=\int\limits_0^{x_k}\left(\frac{\lambda}{C_p}\frac{\partial H}{\partial y}\right)_{y=0}dx, \tag{3}$$

передаваемому в единицу времени от пограничного слоя к поверхности тела, при заданном ограничении на мощность системы охлаждения, оценивающуюся с помощью фильтрационного закона Дарси [19],

$$N = \int\limits_0^{x_k} a v_w^2\left(x\right) dx \tag{4}$$

и связях (1), (2). В (3) λ — коэффициент теплопроводности.

1.2. Система уравнений ламинарного пограничного слоя электропроводящего газа на *теле вращения* при обтекании его под нулевым углом атаки [18] совпадает по форме с (1), за исключением уравнения неразрывности, имеющего вид:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho \cdot r \cdot u\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho \cdot r \cdot v\right) = 0. \tag{5}$$

Здесь r — текущий радиус тела осевой симметрии. Г.у. к системе (1) (с уравнением неразрывности (5)) совпадают с (2).

В этом случае вариационная задача имеет вид: среди непрерывных управлений $m_w\left(x\right)$ требуется найти такое, которое доставляет минимальное значение количеству тепла

$$Q = 2\pi \int\limits_0^{x_k} r\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} dx, \tag{6}$$

передаваемому в единицу времени от пограничного слоя к поверхности тела, при заданном ограничении на мощность системы охлаждения, оценивающуюся с помощью фильтрационного закона Дарси [19],

$$N = 2\pi \int\limits_0^{x_k} r \cdot a v_w^2\left(x\right) dx \tag{7}$$

и связях (1) (с (5)), (2).

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЛАМИНАРНЫМ ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ ДИССОЦИИРУЮЩЕГО ГАЗА НА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ

2.1. Система уравнений, описывающая случай *неравновесной диссоциации*, имеет вид [20]:

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho v\right) = 0,$$

$$\rho\left(u\frac{\partial C_A}{\partial x} + v\frac{\partial C_A}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho D_{12}\frac{\partial C_A}{\partial y}\right) + W_A,$$

$$\rho\left(u\frac{\partial H}{\partial x} + v\frac{\partial H}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{\Pr}\frac{\partial H}{\partial y} + \mu\left(1 - \frac{1}{\Pr}\right)u\frac{\partial u}{\partial y} - \left(\frac{1}{Le} - 1\right)\rho D_{12}\left(h_A - h_M\right)\frac{\partial C_A}{\partial y}\right),$$

$$p = \rho\widetilde{R}T, \quad \widetilde{R} = \frac{k}{2m_A}\left(1 + C_A\right). \tag{8}$$

Здесь C_A — массовая концентрация атомов (степень диссоциации); D_{12} — коэффициент бинарной диффузии; W_A — скорость массообмена атомарного компонента на единицу объема;

$H = h + \frac{u^2}{2}$ — полная энтальпия; $h_i = \int_0^T C_{p_i} dT + h_i^0$ — энтальпия компонента смеси; Le — число Льюиса; h_i^0 — энтальпия образования i — го компонента ($i = A, M$ — индексы соответственно атомарного и молекулярного компонента), k — постоянная Больцмана, m_A — масса атома. Отметим, что для случая "замороженного" газа $W_A \equiv 0$.

Граничные условия к системе (8) следующие:

$$u = 0, \quad v = (m/\rho)_w\,, \quad H = H_w, \quad C_A = 0 \text{ (каталитическая стенка)}\ ,$$

$$\left(\frac{\partial C_A}{\partial y}\right)_w = 0 \text{ (некаталитическая стенка)},\ (y = 0, x > 0)\,;$$

$$u = U_e\,(x)\,, \quad H = H_e\,(x)\,, \quad C_A = C_{Ae} \quad (y \to \infty)\,;$$

$$u = U_0\,(y)\,, \quad H = H_0\,(y)\,, \quad (x = 0, y > 0)\,. \tag{9}$$

Здесь $m_w = (\rho v)_w$ — массовый расход вдуваемого газа (того же состава, что и в набегающем потоке) через единицу поверхности в единицу времени; $e, w, 0$ — индексы параметров потока (аналогичны (2)).

При обтекании поверхности высокотемпературным *химически замороженным* потоком теплообмен будет определяться состоянием поверхности, так как химические реакции могут проходить только на поверхности тела вследствие её каталитического действия. Для *каталитической* поверхности не наблюдается заметного изменения теплового потока к поверхности. Если же стенка *некаталитическая* (например, некоторые стекловидные материалы и углепластики), то может быть достигнуто значительное снижение величины теплового потока, вызванное образованием около стенки слоя нерекомбинированных атомов, препятствующих диффузии легких частиц к поверхности, вследствии чего уменьшается перенос тепла к стенке диффузией, и, таким образом, уменьшается тепловой поток. Наиболее интересным представляется рассмотрение случая некаталитической стенки.

Постановка вариационной задачи аналогична п.1.1, только выражение для теплового потока, поступающего от пограничного слоя к обтекаемой поверхности единичной ширины в данном случае имеет вид

$$Q = \int_0^{x_k} q_w dx, \tag{10}$$

где q_w — удельный тепловой поток к стенке от ламинарного пограничного слоя идеально диссоциирующего газа, определяемый теплопроводностью и диффузионным переносом тепла [20]:

$$-q_w = \left(\frac{\lambda}{C_p}\frac{\partial H}{\partial y}\right)_{y=0} + \left(\rho D_{12} h_A^0 \frac{\partial C_A}{\partial y}\right)_{y=0}.$$

2.2. Постановка вариационной задачи для *равновесно диссоциирующего* газа.

В случае химически равновесного течения предполагается, что скорости химических реакций настолько велики, что в каждой точке пограничного слоя устанавливается состав, соответствующий химическому равновесию при данном давлении, температуре и соотношении элементов. Если пренебречь изменением соотношения компонентов поперёк пограничного слоя (такое предположение строго для бинарной смеси, какой является идеально диссоциирующий газ [20]), то система уравнений (8) может быть существенно упрощена. В частности, уравнение диффузии может быть исключено из рассмотрения. Эффективным методом решения в этом случае является метод полных коэффициентов [21].

Удельный тепловой поток от пограничного слоя к стенке имеет вид:

$$q_w = -\left(\lambda + \lambda_x\right) \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0} = -\lambda_{\text{эф}} \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0},$$

где

$$\lambda_x = -\sum_{i=1}^{n} H_i \sum_j \frac{m_i}{m^2} \rho D_{ij} \left(\frac{\partial C_j m}{\partial T} \right)_p,$$

здесь m — молекулярная масса смеси, m_i — молекулярная масса i–го компонента, C_j — массовая концентрация j–го компонента. При высоких температурах λ_x может быть во много раз больше, чем λ. Аналогично определяются полная удельная теплоемкость $(C_p)_{эф}$, учитывающая тепло химических реакций и полная эффективная энтальпия $H_{эф}$. Значения $H_{эф}$ и $(C_p)_{эф}$ для воздуха приведены в работе [22].

Используя метод полных коэффициентов, систему уравнений равновесного пограничного слоя можно привести к следующим трём дифференциальным уравнениям:

$$\rho \left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0;$$

$$\rho \left(u\frac{\partial H}{\partial x} + v\frac{\partial H}{\partial y} \right) = \frac{1}{\mathrm{Pr}_{эф}} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\lambda_{эф}}{(C_p)_{эф}} \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \left(1 - \frac{1}{\mathrm{Pr}_{эф}} \right) \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu u \frac{\partial u}{\partial y} \right), \tag{11}$$

$$\mu = \mu_{e0} \tau b(\tau),$$

совпадающим по форме с уравнениями пограничного слоя для гиперзвукового потока совершенного газа, в которых вместо истинных коэффициентов используются полные коэффициенты. Г.у. к (11) аналогичны (9).

Ставится следующая вариационная задача. Среди непрерывных управлений $m_w(x)$ требуется найти такое, которое доставляет минимальное значение количеству тепла

$$Q = \int_0^{x_k} \left(\frac{\lambda_{эф}}{(C_p)_{эф}} \frac{\partial H}{\partial y} \right)_{y=0} dx, \tag{12}$$

передаваемому в единицу времени от пограничного слоя к поверхности тела, при заданном ограничении на мощность системы охлаждения, оценивающуюся с помощью фильтрационного закона Дарси [19]

$$N = \int_0^{x_k} a v_w^2(x) dx, \tag{13}$$

и связях (9), (11).

Если известны зависимости вязкости смеси и эффективного числа Прандтля $\mathrm{Pr}_{эф} = \frac{\mu (C_p)_{эф}}{\lambda_{эф}}$ от температуры [21], то решение рассматриваемой вариационной задачи может быть получено с использованием подхода, предложенного К. Г. Гараевым в [13] для построения оптимальной неразрушающейся тепловой защиты поверхностей, обтекаемых гиперзвуковым потоком совершенного газа.

3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО ОПТИМИЗАЦИИ ТЕПЛОМАССООБМЕНА НА ПРОНИЦАЕМОМ ЦИЛИНДРЕ В ГИПЕРЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

В качестве примера приводятся результаты вычислительного эксперимента по построению оптимального управления для случая обтекания прямого кругового цилиндра радиуса $R =$

0,1 м гиперзвуковым потоком ($M_\infty = 10$) равновесно диссоциирующего газа ([20]) при $\bar{x}_k = 1$, $\tau_w = 0{,}25$ и параметрах стандартной атмосферы, соответствующих высоте $H = 10\,000$ м.

На рис. 1 и 2 кривая 1 соответствует случаю постоянного вдува $m_{const}(\bar{x}) \equiv 0{,}3$; кривая 2 — оптимальному управлению $m_{opt}(\bar{x})$.

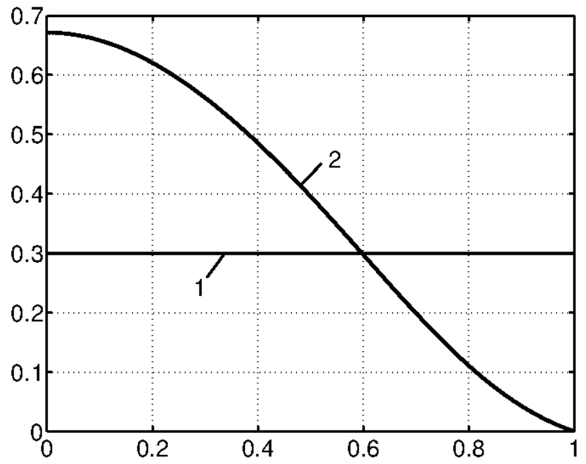

Рис. 1. *Зависимость оптимальной скорости вдува от координаты*

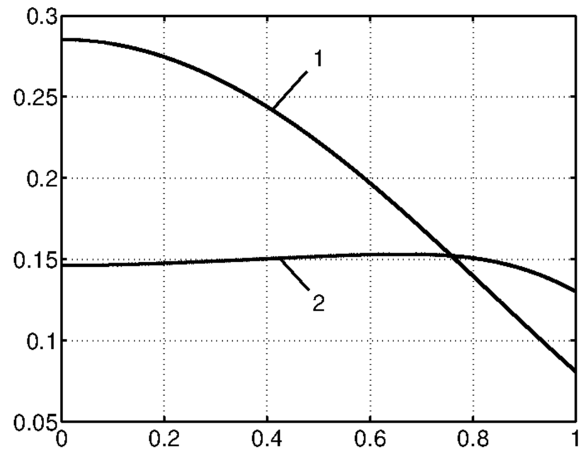

Рис. 2. *Зависимость безразмерного локального теплового потока от координаты*

Были проведены вычислительные эксперименты для различных значений мощности системы охлаждения, протяжённости участка вдува, безразмерной температуры поверхности, напряжённости магнитного поля (в случае ионизированного газа), геометрических размеров и формы летательного аппарата, высоты и скорости полёта.

По результатам вычислительных экспериментов можно сделать следующие выводы:

1) С уменьшением температурного фактора τ_w выигрыш в значении интегрального теплового потока увеличивается (см. Таблицу 1) (с точки зрения энергетических затрат пористое охлаждение выгоднее применять для интенсивно охлаждаемой поверхности).

2) С увеличением мощности системы охлаждения (при фиксированном температурном

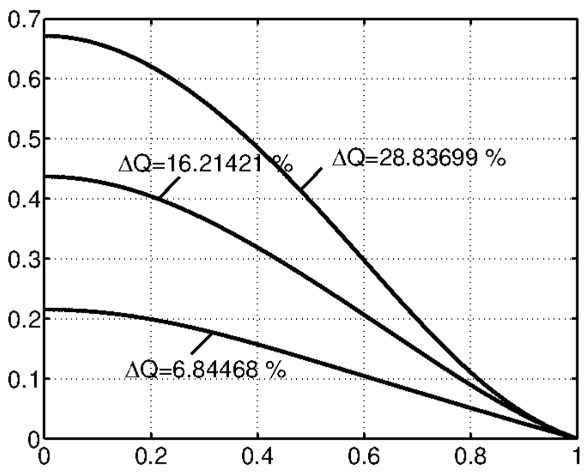

Рис. 3. *Зависимость оптимальной скорости вдува от координаты для* $m_{const}(\bar{x}) \in \{0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3\}$ *при* $\tau_w = 0{,}25$.

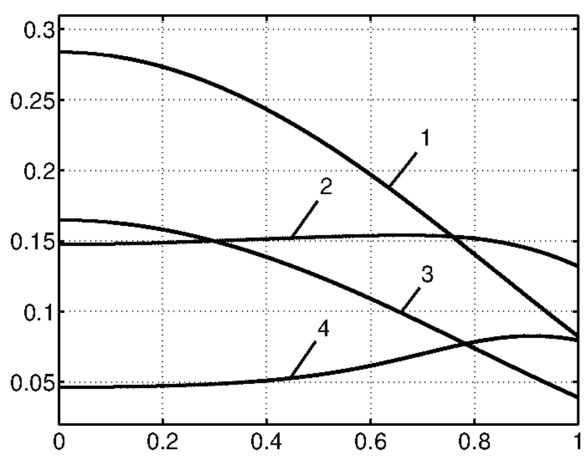

Рис. 4. *Зависимость безразмерного локального теплового потока от координаты с учётом (кривые 1 и 2) и без учёта (кривые 3 и 4) эффекта диссоциации.*

факторе) увеличивается выигрыш в значении функционала (см. Рисунок 3).

3) Влияние эффекта диссоциации воздуха проявляется ([20]), начиная с $M_\infty = 6$. При этом выигрыш в значении интегральных тепловых потоков существенно меньше [17], чем для полученных по модели [13] для случая обтекания цилиндрической поверхности потоком совершенного газа (см. Рисунок 4 и Таблицу 2).

4) При $M_\infty > 10$ воздух полностью продиссоциирует ([20]) и перейдёт в ионизированное состояние. Влияние магнитного поля на изменение теплового потока к телу проявляется, начиная со значений $\sigma B_0^2 \approx 10^3$ [Тл/Ом $\cdot$ м] (см. Рисунки 5 и 6).

5) Применение комбинированной системы теплозащиты, использующей электромагнитный способ управления пограничным слоем наряду с массообменным, позволяет увеличить выигрыш в значении теплового потока к поверхности при одновременном снижении массового расхода охладителя. Для технически реализуемых на сегодняшний день значений магнитной индукции этот вклад невелик (порядка $1-8\%$), но при продвижении в область более сильных магнитных полей он может оказывать существенное влияние на теплообмен в пограничном слое.

6) Использование оптимального управления позволяет снизить значение суммарной силы ньютоновского трения.

Таблица 1.

	$\tau_w = 0{,}25$	$\tau_w = 0{,}50$	$\tau_w = 0{,}75$
$Q(m \equiv 0{,}3)$	0.208662	0.157909	0.0849764
$Q(m_{opt})$	0.148490	0.123655	0.0693853
ΔQ	28.83699 %	21.69214 %	18.34752 %

Таблица 2.

M_∞	3	4	5	6	8	10	20	40
$\Delta Q_{\text{сов}}$, %	44,17	46,49	47,63	48,27	48,92	49,23		
$\Delta Q_{\text{дисс}}$, %				28,19	28,63	28,83	29,11	29,18

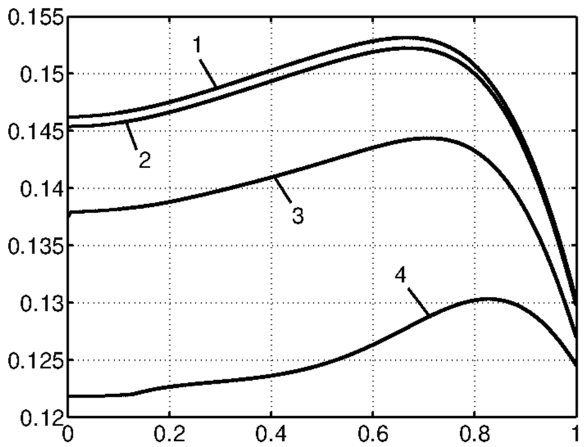

Рис. 5. *Зависимость безразмерного локального теплового потока от координаты для* $\sigma B_0^2 \in \{0;\ 10^2;\ 10^3;\ 3\cdot 10^3\}$ [*Тл/ Ом* $\cdot$ *м*] *при* $M_\infty = 10$.

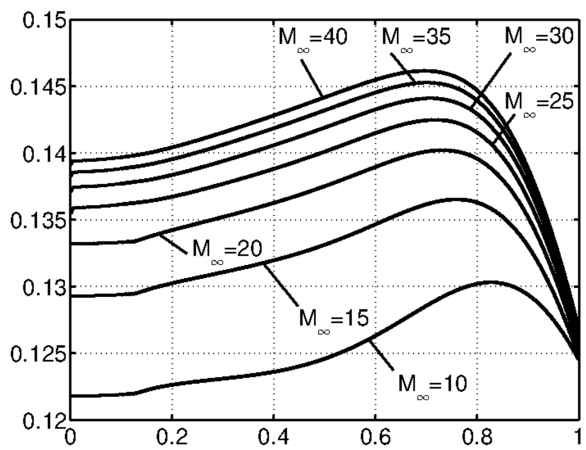

Рис. 6. *Зависимость безразмерного локального теплового потока от координаты для* $M_\infty \in \{10; 15; \ldots; 40\}$ *при* $\sigma B_0^2 = 3 \cdot 10^3$ [*Тл/Ом* $\cdot$ *м*].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ результатов расчётов подтверждает вывод о необходимости учёта эффектов диссоциации и ионизации при оптимизации тепломассообмена на поверхностях летательных аппаратов при гиперзвуковых режимах полёта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Бильченко Н.Г. К задаче оптимального управления пограничным слоем электропроводящей жидкости в магнитном поле / Н.Г. Бильченко, К.Г. Гараев, С.А. Дербенёв // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. — 1994. — № 1. — С. 23–27.

[2] Бильченко Н.Г. К задаче обтекания проницаемой цилиндрической поверхности потоком неравновесно диссоциирующего газа / Н.Г. Бильченко // Труды математического центра им. Н. И. Лобачевского. — Казань: УНИПРЕСС, 1998. — С. 173–183.

[3] Бильченко Н.Г. К задаче оптимального управления пограничным слоем неравновесно диссоциирующего замороженного газа / Н.Г. Бильченко // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. — 2002. — № 2. — С. 12–15.

[4] Гараев К.Г. Инвариантные вариационные задачи ламинарного пограничного слоя при различных режимах течения / К.Г. Гараев, В.А. Овчинников, Н.Г. Бильченко. — Казань: Изд–во КГТУ, 2003. — 123 с.

[5] Гараев К.Г. Группы Ли и теория Нётер в проблеме управления с приложениями к оптимальным задачам пограничного слоя / К.Г. Гараев. — Казань: Изд–во КГТУ, 1994. — 240 с.

[6] Бильченко Н.Г. О существовании первого интеграла в одной оптимальной задаче с распределёнными параметрами / Н.Г. Бильченко, К.Г. Гараев // Известия высших учебных заведений. Математика. — 1993. — №. 12. — С. 31–34.

[7] Бильченко Н.Г. О группе Ли, допускаемой одной нелинейной системой уравнений в частных производных параболического типа / Н.Г. Бильченко, В.А. Овчинников // Известия высших учебных заведений. Математика. — 1997. — №. 1. — С. 69–74.

[8] Бильченко Н.Г. Группа симметрии и законы сохранения в задаче оптимального управления ламинарным пограничным слоем неравновесно диссоциирующего газа / Н.Г. Бильченко, К.Г. Гараев, В.А. Овчинников // Известия высших учебных заведений. Математика. — 1999. — №. 11. — С. 11–19.

[9] Бильченко Н.Г. Об особой роли группы переносов по независимой переменной в задачах оптимального управления ламинарным пограничным слоем / Н.Г. Бильченко // Седьмая Четаевская конференция по аналитической механике, устойчивости и управлению движением: Тезисы докладов. — Казань: Изд–во КГТУ, 1997. — С. 112.

[10] Дородницын А.А. Об одном методе решения уравнений ламинарного пограничного слоя / А.А. Дородницын // Прикладная математика и техническая физика. — 1960. — № 3. — С. 111–118.

[11] Павловский Ю.Н. Численный расчет пограничного слоя в сжимаемом газе / Ю.Н. Павловский // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1962. — Т. 2, № 5. — С. 884–901.

[12] Лю-Шень-Цюань. Расчет ламинарного слоя в сжимаемом газе при наличии отсоса или вдува / Лю-Шень-Цюань // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1962. — Т. 2, № 5. — С. 868–883.

[13] Гараев К.Г. Об оптимальном управлении тепломассообменом в ламинарном пограничном слое сжимаемого газа на проницаемых поверхностях / К.Г. Гараев // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. — 1988. — № 3. — С. 92–100.

[14] Башкин В.А. Расчет уравнений пространственного ламинарного пограничного слоя

методом интегральных соотношений / В.А. Башкин // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1968. — Т. 8, № 6. — С. 1280–1290.

[15] Bilchenko N.G. Optimization of heat and mass transfer on permeable cylinder under supersonic flow of electroconductive gas / N.G. Bilchenko, K.G. Garaev // International Conference "Research in hypersonic flows and hypersonic technologies". Section 3. Viscous hypersonic flow. TsAGI. — 1994. — P. 10–12.

[16] Бильченко Н.Г. Оптимальное управление ламинарным пограничным слоем электропроводящего газа на телах вращения при сверхзвуковых режимах обтекания / Н.Г. Бильченко, К.Г. Гараев // Международная научно-техническая конференция "Актуальные проблемы математического моделирования и автоматизированного проектирования в машиностроении": Тезисы докладов. Секция 3. Моделирование и оптимизация процессов управления в машиностроении.- Казань: Изд–во КГТУ, 1995. — С. 29–31.

[17] Бильченко Н.Г. Об оптимальном управлении тепломассообменом в ламинарном пограничном слое диссоциирующего газа / Н.Г. Бильченко, К.Г. Гараев // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. — 2000. — № 3. — С. 17–19.

[18] Ватажин А.Б. Магнитогидродинамические течения в каналах / А.Б. Ватажин, Г.А. Любимов, С.А. Регирер. — М.: Наука, 1970. — 672 с.

[19] Белов С.В. Пористые металлы в машиностроении / С.В. Белов. — М.: Машиностроение, 1981. — 247 с.

[20] Дорренс У.Х. Гиперзвуковые течения вязкого газа / У.Х. Дорренс. — М.: Мир, 1966. — 439 с.

[21] Основы теплопередачи в авиационной и ракетно–космической технике / Под ред. В.К. Кошкина. — М.: Машиностроение, 1975. — 624 с.

[22] Предводителев А.С. Таблицы термодинамических свойств воздуха в интервале температур от 6000 $^\circ$K до 12000 $^\circ$K и в интервале давлений от 0,001 атм. до 1000 атм / А.С. Предводителев. — М.: Изд–во АН СССР, 1962. — 270 с.

[23] Бильченко Н.Г. Интегралы Нётер в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта / Н.Г. Бильченко // "Актуальные проблемы прикл. матем., информ. и механ.". Сб. трудов Междунар. конф. — Воронеж, 2011. — С. 71–72.

[24] Бильченко Н.Г. Метод обобщённых интегральных соотношений А.А. Дородницына в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта / Н.Г. Бильченко // "Актуальные проблемы прикл. матем., информ. и механ.". Сб. трудов Междунар. конф. Ч.1. — Воронеж, 2012. — С. 36–40.

REFERENCES

[1] Bilchenko N.G., Garaev K.G., Derbenev S.A. On the problem of optimal control of electroconductive liquid laminar boundary layer in magnetic field. [Bil'chenko N.G., Garaev K.G., Derbenyov S.A. K zadache optimal'nogo upravleniya pogranichnym sloem e'lektroprovodyashhej zhidkosti v magnitnom pole]. *Izvestiya vysshix uchebnyx zavedenij. Aviacionnaya texnika — Russian Aeronautics*, 1994, no. 1, pp. 23–27.

[2] Bilchenko N.G. On the problem of flow around a permeable cylindrical surface by non-equilibrium dissociating gas. [Bil'chenko N.G. K zadache obtekaniya pronicaemoj cilindricheskoj poverxnosti potokom neravnovesno dissociiruyushhego gaza]. Proceedings of N. I. Lobachevsky Mathematical Center. Kazan: UNIPRESS, 1998, pp. 173–183.

[3] Bilchenko N.G. On the problem of non-equilibrium dissociating freezing gas boundary layer optimal control. [Bil'chenko N.G. K zadache optimal'nogo upravleniya pogranichnym sloem neravnovesno dissociiruyushhego zamorozhennogo gaza]. *Izvestiya vysshix uchebnyx zavedenij. Aviacionnaya texnika — Russian Aeronautics*, 2002, no. 2, pp. 12–15.

[4] Garaev K.G., Ovchinnikov V.A., Bilchenko N.G. Invariant variation problems of laminar boundary layer under various flow conditions. [Garaev K.G., Ovchinnikov V.A., Bil'chenko N.G. Invariantnye variacionnye zadachi laminarnogo pogranichnogo sloya pri razlichnyx rezhimax techeniya]. Kazan: KGTU Publishers, 2003, 123 p.

[5] Garaev K.G. The Lie groups and the Noether theory in the control problem with application to boundary layer optimal problems. [Garaev K.G. Gruppy Li i teoriya Nyoter v probleme upravleniya s prilozheniyami k optimal'nym zadacham pogranichnogo sloya]. 1994, 240 p.

[6] Bilchenko N.G., Garaev K.G. On the existence of the first integral in an optimal problem with distributed parameters. [Bil'chenko N.G., Garaev K.G. O sushhestvovanii pervogo integrala v odnoj optimal'noj zadache s raspredelyonnymi parametrami]. *Izvestiya vysshix uchebnyx zavedenij. Matematika — Russian Mathematics*, 1993, no. 12, pp. 31–34.

[7] Bilchenko N.G., Ovchinnikov V.A. On the Lie group allowed by one nonlinear parabolic type partial differential equations system. [Bil'chenko N.G., Ovchinnikov V.A. O gruppe Li, dopuskaemoj odnoj nelinejnoj sistemoj uravnenij v chastnyx proizvodnyx parabolicheskogo tipa]. *Izvestiya vysshix uchebnyx zavedenij. Matematika — Russian Mathematics*, 1997, no. 1, pp. 69–74.

[8] Bilchenko N.G., Garaev K.G., Ovchinnikov V.A. Symmetry group and conservation laws in the problem of non-equilibrium dissociating gas laminar boundary layer optimal control. [Bil'chenko N.G., Garaev K.G., Ovchinnikov V.A. Gruppa simmetrii i zakony soxraneniya v zadache optimal'nogo upravleniya laminarnym pogranichnym sloem neravnovesno dissociiruyushhego gaza]. *Izvestiya vysshix uchebnyx zavedenij. Matematika — Russian Mathematics*, 1999, no. 11, pp. 11–19.

[9] Bilchenko N.G. On the special part of translation group along independent variable in the problems of laminar boundary layer optimal control. [Bil'chenko N.G. Ob osoboj roli gruppy perenosov po nezavisimoj peremennoj v zadachax optimal'nogo upravleniya laminarnym pogranichnym sloem]. Seventh Chetaev's Conference of analytical mechanics, stability and motion control: Abstracts, Kazan: KGTU Publishers, 1997, p. 112.

[10] Dorodnitsyn A.A. On a method of laminar boundary layer equations solution. [Dorodnicyn A.A. Ob odnom metode resheniya uravnenij laminarnogo pogranichnogo sloya]. *Applied mathematics and technical physics — Prikladnaya matematika i texnicheskaya fizika*, 1960, no. 3, pp. 111–118.

[11] Pavlovsky Yu.N. Numerical computation of boundary layer in compressible gas. [Pavlovskij Yu.N. Chislennyj raschet pogranichnogo sloya v szhimaemom gaze]. *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki — Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1962, vol. 2, iss. 5, pp. 884–901.

[12] Lyu Shen'-Tsyuan' Calculation of the laminar boundary layer in a compressible gas in the presence of suction or blowing. [Lyu-Shen'-Cyuan'. Raschet laminarnogo sloya v szhimaemom gaze pri nalichii otsosa ili vduva]. *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki — Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1962, vol. 2, iss. 5, pp. 868–883.

[13] Garaev K.G. On optimal control of heat-and-mass transfer in laminar boundary layer of compressible gas on permeable surfaces. [Garaev K.G. Ob optimal'nom upravlenii teplomassoobmenom v laminarnom pogranichnom sloe szhimaemogo gaza na pronicaemyx poverxnostyax]. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika zhidkosti i gaza — Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Fluid Mechanics*, 1988, no. 3, pp. 92–100.

[14] Bashkin V.A. A computation of space laminar boundary layer by integral relations method. [Bashkin V.A. Raschet uravnenij prostranstvennogo laminarnogo pogranichnogo sloya metodom integral'nyx sootnoshenij]. *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki — Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1968, vol. 8, iss. 6, pp. 1280–1290.

[15] Bilchenko N.G., Garaev K.G. Optimization of heat and mass transfer on permeable cylinder under supersonic flow of electroconductive gas. International Conference "Research in hypersonic

flows and hypersonic technologies". Section 3. Viscous hypersonic flow. TsAGI, 1994, pp. 10–12.

[16] Bilchenko N.G., Garaev K.G. Optimal control of electroconductive gas laminar boundary layer on rotation bodies under supersonic flow conditions. [Bil'chenko N.G., Garaev K.G. Optimal'noe upravlenie laminarnym pogranichnym sloem e'lektroprovodyashhego gaza na telax vrashheniya pri sverxzvukovyx rezhimax obtekaniya]. International Scientific and Technical Conference "Actual problems of mathematical modeling and design automation in engineering ": Abstracts. Section 3. Modeling and control processes optimization in engineering. Kazan: KGTU Publishers, 1995, pp. 29–31.

[17] Bilchenko N.G., Garaev K.G. On optimal control of heat and mass transfer in laminar boundary layer of dissociating gas. [Bil'chenko N.G., Garaev K.G. Ob optimal'nom upravlenii teplomassoobmenom v laminarnom pogranichnom sloe dissociiruyushhego gaza]. *Izvestiya vysshix uchebnyx zavedenij. Aviacionnaya texnika — Russian Aeronautics*, 2000, no. 3, pp. 17–19.

[18] Vatazhin A.B., Lyubimov G.A., Regirer S.A. Magnetohydrodynamical flows in channels. [Vatazhin A.B., Lyubimov G.A., Regirer S.A. Magnitogidrodinamicheskie techeniya v kanalax]. Moscow: Nauka, 1970, 672 p.

[19] Belov S.V. Porous metals in engineering. [Belov S.V. Poristye metally v mashinostroenii]. Moscow: Mashinostroenie, 1981, 247 p.

[20] Dorrance W.H. Viscous hypersonic flow. [Dorrens U.X. Giperzvukovye techeniya vyazkogo gaza]. Moscow: Mir, 1966, 439 p.

[21] Principles of heat transfer in aircraft and spacecraft. Edited by V.K. Koshkin. [Osnovy teploperedachi v aviacionnoj i raketno — kosmicheskoj texnike. Pod red. V.K. Koshkina]. Moscow: Mashinostroenie, 1975, 624 p.

[22] Predvoditelev A.S. Tables of thermodynamical air properties in temperature interval from 6000 K to 12000 K and pressure interval from 0,001 atmosphere to 1000 atmosphere. [Predvoditelev A.S. Tablicy termodinamicheskix svojstv vozduxa v intervale temperatur ot 6000 $^\circ$K do 12000 $^\circ$K i v intervale davlenij ot 0,001 atm. do 1000 atm]. Moscow: Izdatel'stvo AN SSSR, 1962, 270 p.

[23] Bilchenko N.G. Noether integrals in problems of heat and mass transfer optimal control on permeable surfaces in hypersonic flow. [Bil'chenko N.G. Integraly Nyoter v zadachax optimal'nogo upravleniya teplomassoobmenom na pronicaemyx poverxnostyax pri giperzvukovyx rezhimax polyota]. "Actual problems of applied mathematics, informatics and mechanics". Proceedings of International Conference, Voronezh, 26-28 September 2011, Voronezh: Izdatel'sko-poligraficheskij tsentr Voronezhskogo Gosudarstvennogo Universiteta, 2011, pp. 71–72.

[24] Bilchenko N.G. The method of generalized integral relations by A.A. Dorodnitsyn in the problems of heat and mass transfer optimal control on permeable surfaces in hypersonic flow. [Bil'chenko N.G. Metod obobshhyonnyx integral'nyx sootnoshenij A.A. Dorodnicyna v zadachax optimal'nogo upravleniya teplomassoobmenom na pronicaemyx poverxnostyax pri giperzvukovyx rezhimax polyota]. "Actual problems of applied mathematics, informatics and mechanics". Proceedings of International Conference, Voronezh, 26–28 November 2012: in two parts. Part 1.- Voronezh: Izdatel'sko-poligraficheskij tsentr Voronezhskogo Gosudarstvennogo Universiteta, 2012, pp. 36–40.

Бильченко Наталья Григорьевна, доцент кафедры Высшей Математики Казанского Государственного Энергетического Университета, Казань, Российская Федерация
E-mail: bilchnat@gmail.com

Bilchenko N.G., Associate Professor of Department of Higher Mathematics of Kazan State Power Engineering University, Kazan, Russian Federation
E-mail: bilchnat@gmail.com