УДК 519.711.3; 539.374

АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ ФОРМЫ ЗАПИСИ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ УСЛОВИЙ ПЛАСТИЧНОСТИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯ

М. А. Артемов, Е. С. Барановский, А. П. Якубенко

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 11.06.2014 г.

Аннотация: обсуждаются альтернативные формы записи условий пластичности максимального касательного и максимального приведенного напряжения. Определяется возможное значение медианного напряжения в случае плоской деформации при выборе условия пластичности Треска и Леви. На примере плоской задачи в рамках теории пластического течения рассматривается выполнение условий неразрывности полей напряжений в сжимаемом упругопластическом теле при выборе пластического потенциала Треска и Леви. Для сингулярных точек поверхности пластичности Треска и Рейсса в рамках обобщенного закона пластического течения рассматривается вопрос о получении непрерывных полей деформаций. Для обобщенных условий пластичности Треска и Мизеса, предложенных Херши и Хосфордом, доказана теорема об их представлении через основные инварианты девиатора напряжений.

Ключевые слова: условие пластичности, пластический потенциал, обобщенный ассоциированный закон пластического течения, математическая теория пластичности.

ALTERNATIVE FORMS OF THE PIECEWISE-LINEAR CONDITIONS OF PLASTICITY AND THEIR GENERALIZATIONS

M. A. Artemov, E. S. Baranovskii, A. P. Yakubenko

Abstract: we discuss alternative forms of plasticity conditions the maximum shear and maximum reduced stress. Defines the possible values of the median voltage in the case of plane strain conditions when selecting Tresca and Levi. On the example of the plane problem in the theory of plastic flow is considered that the conditions of continuity of stress fields in compressible elastic-plastic body when choosing potential Tresca and Levi. In the singular points of the surface Tresca and Levi within the generalized law of plastic flow are determined consider the problem of obtaining continuous deformation fields. We prove a theorem that allows you to express generalized conditions Tresca, Mises proposed Hershey and Hosford, through the basic invariants of the stress deviator.

Keywords: yield condition, plastic potential, associated flow rule for non-smooth yield surface, mathematical theory of plasticity.

ВВЕДЕНИЕ

Вопросам построения математических моделей материалов, проявляющих пластические свойства, посвящено большое количество работ. Одно из направлений математической теории пластичности связано с введением условия (критерия) текучести (пластичности), определяющего переход материала в пластическое состояние.

Представляет интерес вопрос об использовании различных форм записи условий пластичности и пластических потенциалов, а также установлении их эквивалентности.

УСЛОВИЕ ПЛАСТИЧНОСТИ ТРЕСКА

Условие максимального касательного напряжения в качестве условия пластичности для поликристаллических изотропных материалов предложил Э. Треска [1]. В симметричной форме относительно главных нормальных компонент тензора напряжений это условие имеет вид [2]

$$max\,\{|\sigma_1-\sigma_3|,|\sigma_2-\sigma_3|,|\sigma_3-\sigma_1|\}=\sigma_T, \tag{1}$$

где $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_2$ — собственные значения тензора напряжений σ (главные нормальные напряжения), σ_T — предел пластичности при одноосном растяжении. При выборе условия пластичности Треска, содержащего одну материальную константу, связь между предела пластичности при чистом сдвиге и пределом пластичности при одноосном растяжении определяется соотношением $k=\sigma_T^{\prime}2$.

Можно рассматривать иные формы записи условия пластичности Треска (1)

$$\begin{aligned}&|\sigma_1-\sigma_3|+|\sigma_2-\sigma_3|+|\sigma_3-\sigma_1|=4k,\\&|s_1-s_3|+|s_2-s_3|+|s_3-s_1|=4k,\end{aligned} \tag{2}$$

где s_1,s_2,s_2 — собственные (главные нормальные) значения деиатора напряжений $\mathbf{s}=\sigma-tr(\sigma)\mathbf{E}/3$, $\mathbf{E}$ — единичный тензор второй валентности.[1)]

В работе А. Рейсса [5] приводится преобразование равенства

$$((s_1-s_2)^2-4k^2)((s_1-s_3)^2-4k^2)((s_2-s_3)^2-4k^2)=0 \tag{3}$$

к виду

$$4J_2^3-27J_3^2-4k^2(4k^2-3J_2)^2=0, \tag{4}$$

где $J_2=\frac{1}{2}tr(\mathbf{s}^2)$, $J_3=\frac{1}{3}tr(\mathbf{s}^3)$ — второй и третий основные инварианты девиатора напряжений, являющиеся коэффициентами характеристического уравнения [6]–[8][2)]

$$|\mathbf{s}-\lambda\mathbf{E}|=-\lambda^3+\lambda J_2(\mathbf{s})+J_3(\mathbf{s})=0.$$

Соотношение (4) в виде

$$4(q+k^2)(q+4k^2)^2+27r^2=0, \tag{5}$$

где $q=s_1s_2+s_2s_3+s_3s_1=-J_2$, $r=-s_1s_2s_3=-J_3$ приводится в работе М. Леви [9].[3)] В. В. Соколовский [10] приводит следующую форму записи уравнения Леви (5):[4)]

$$8(2k^2-J_2)^3-4J_2^2(3k^2-J_2)+27J_3^2=0. \tag{6}$$

В монографии [2] условие пластичности Леви (5) интерпретируется как уравнение грани поверхности пластичности Треска.[5)] Уравнение грани $\sigma_1-\sigma_3=2k$ призмы Треска в работе

---

1) Вместо термина валентность тензора [3] также используется термин ранг тензора [4].

2) Иная расстановка знаков в характеристическом уравнении $-\lambda^3-\lambda J_2(\mathbf{s})+J_3(\mathbf{s})=0$, принятая в ряде работ [4], приводит к тому, что второй основной инвариант девиатора напряжений будет иметь противоположный знак: $J_2=-tr(\mathbf{s}^2)/2$.

3) В работе М. Леви [9] (русский перевод) имеется опечатка: отсутствует показатель степени 2 после вторых скобок в равенстве (5).

4) В монографии В.В. Соколовского [10, стр. 68] отмечается, что в работе Леви цифры 3 и 4 во втором члене ошибочно переменены местами, что было обнаружено И.Я. Штаерманом. Заметим, что в работе М. Леви [9] (русский перевод), на которую делается ссылка, приведено уравнение (5), а не уравнение (6).

5) В работе [2] второй и третий инварианты девиатора напряжений определяются по формулам $q=(s_{ij})^2$ (имелось ввиду, что $q=tr(\mathbf{s}^2)=tr(\mathbf{s}\cdot\mathbf{s})=s_{ij}s_{ij}=2J_2(\mathbf{s})$), $r=s_{ij}s_{jk}s_{ki}=J_3(\mathbf{s})$, что не соответствует обозначениям, принятым в работе М. Леви [9]. Это несоответствие устранено в работе [11].

[11] преведено в виде (сохранены обозначения авторов)

$$4(k^2 - \Sigma_2')(4k^2 - \Sigma_2')^2 + 27{\Sigma_3'}^2 = 0, \tag{7}$$

где $\Sigma_2' = J_2(\mathbf{s}) = (4k^2 + 2k\xi - \xi^2)/3$, $\Sigma_3' = J_3(\mathbf{s}) = -2(-8k^3 - 6k^2\xi + 3k\xi^2 + \xi^3)/27$, $\xi = \sigma_2 - \sigma_1$. Поскольку уравнение (7) эквивалентно уравнению (3), что было показано А. Рейссом [5], то при выборе условия $\sigma_1 - \sigma_3 = 2k$, уравнение (3) выполняется тождественно.

Рассмотрим спектральное представление тензора напряжений

$$\sigma = \sigma_1 \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1 + \sigma_2 \mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_2 + \sigma_3 \mathbf{n}_3 \otimes \mathbf{n}_3,$$

где $\mathbf{n}_1$ — собственные векторы тензора σ. С учетом равенства $\sigma_1 - \sigma_3 = 2k$, рассматриваемого в работе [11], его можно представить в виде

$$\sigma = \sigma_1 \mathbf{E} + (\sigma_2 - \sigma_1)\mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_2 - 2k\mathbf{n}_3 \otimes \mathbf{n}_3.$$

Тогда для девиатора напряжений будет справедлива формула

$$\mathbf{s} = (\frac{2k-\xi}{3})\mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1 + (\frac{2\xi+2k}{3})\mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_2 + (\frac{-\xi-4k}{3})\mathbf{n}_3 \otimes \mathbf{n}.$$

Учитывая определения степени тензора второй валентности [4], из этой формулы получаем, что ($\xi = \sigma_2 - \sigma_1$)

$$\Sigma_2' = \frac{tr(\mathbf{s}^2)}{2} = \frac{4k^2 + 2k\xi + \xi^2}{3}, \Sigma_3' = \frac{tr(\mathbf{s}^3)}{3} = -\frac{2}{27}(8k^3 - 6k^2\xi + 3k\xi^2 + \xi^3). \tag{8}$$

При подстановке формул (8) в уравнение (7) получаем тождество, так что уравнение (7) при дополнительном условии $\sigma_1 - \sigma_3 = 2k$ не определяет грань призмы Треска, о чем говорится в работах [2], [11].

Равенство (3), как форма записи условия пластичности Треска, принимается в ряде работ, например, [5], [12], [13]. Соотношения Рейсса (3) и Леви (4) не равносильны условию пластичности Треска (1) [14]–[16]. На девиаторной плоскости эти условия пластичности определяют разные линии (Рис. 1,a; 1,b).

В качестве аналога условия Треска можно рассматривать соотношения А. Рейсса [5] (рис. 1,b)

$$\begin{cases} 4J_2^3 - 27J_3^2 - 4k^2(4k^2 - 3J_2)^2 = 0, \\ 3J_2 \leqslant \sigma_T^2. \end{cases}$$

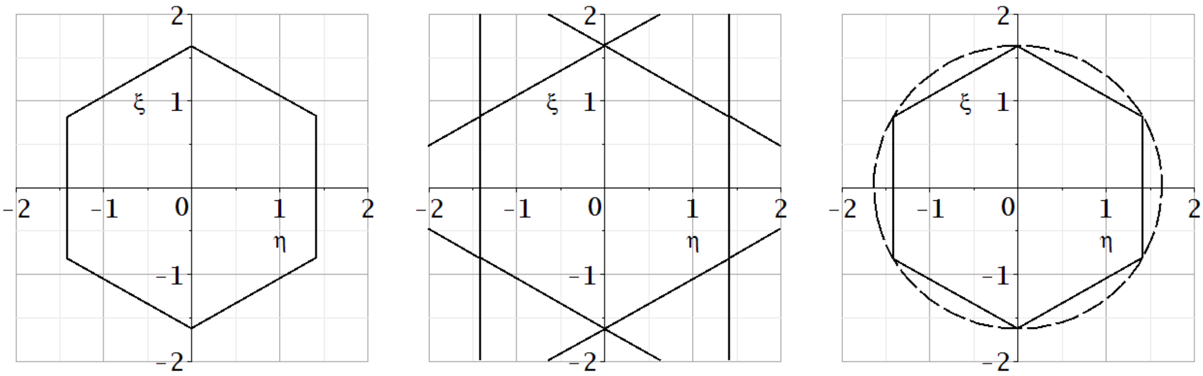
Подход А. Рейсса [5] основан на рассмотрении кубического уравнения (3). Аналогично уравнению (3) можно рассматривать уравнение [14]

$$(s_1 - s_2 - 2\kappa k)(s_2 - s_3 - 2\kappa k)(s_3 - s_1 - 2\kappa k) = 0,$$

определяющее на девиаторной плоскости в пространстве главных напряжений линии, изображенные на рис. 1,*a*. Величина κ определяет знак главного касательного напряжения равного $2k$.

СООТНОШЕНИЯ АССОЦИИРОВАННОГО ЗАКОНА ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛОВ ТРЕСКА, ЛЕВИ И РЕЙССА

Если рассматривать функции пластичности Треска (2), Рейсса (3) или Леви (4) в качестве пластических потенциалов, то соотношения ассоциированного закона пластического течения



a) b) c)

Рис. 1. *След поверхности пластичности на девиаторной плоскости в координатах* $\eta = \sqrt{2}(\sigma_2 - \sigma_1)$, $\xi = \sqrt{6}(2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2)$, *соответствующий условию a) Треска, a) Леви, b) Рейсса* $(k = 1)$

для этих потенциалов не будут совпадать. Для доказательства этого утверждения рассмотрим грань поверхности пластичности Треска, которая определяется условиями

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2k, \quad \sigma_3 - \sigma_2 < 2k, \quad \sigma_1 - \sigma_3 < 2k. \tag{9}$$

В случае плоской деформации (для определенности принимаем, что компоненты тензоров не меняются в направлении оси x_3 декартовой системы координат) ассоциированный с условием пластичности (3) закон пластического течения определяет равенство

$$\dot{\varepsilon}_3^p = \dot{\lambda}\frac{\partial\left(((\sigma_1 - \sigma_2)^2 - 4k^2)((\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 4k^2)((\sigma_2 - \sigma_3)^2 - 4k^2)\right)}{\partial\sigma_3} = 0,$$

из которого следует, что

$$((\sigma_1 - \sigma_2)^2 - 4k^2)((\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_3) - 4k^2)(2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2) = 0. \tag{10}$$

Из соотношения (10), полученного А. Рейссом [5], в работе Ю. Радаева [17] делается вывод, что в случае плоского деформированного состояния медианное главное напряжение

$$2\sigma_3 = (\sigma_1 + \sigma_2). \tag{11}$$

В терминах компонент девиатора напряжений равенство эквивалентное (11) имеет вид $2s_3 = s_1 + s_2 = 0$, в то время как для грани призмы Треска, определяемой соотношениями (9), из равенства $\partial(\sigma_1 - \sigma_2)/\partial\sigma_3 = 0$ значение среднего главного напряжения σ_3 не определяется [18]–[20].

Заметим, что соотношение (10) выполняется тождественно, когда рассматривается случай $(\sigma_1 - \sigma_2)^2 = 4k^2$.

В работе [17] также отмечается, что равенство (10) выполняется, когда $\sigma_3 = (\sigma_1 + \sigma_2)/2 \pm \sqrt{5}k$. Если в этом соотношении от компонент тензора напряжений перейти к компонентам девиатора напряжений $s_3 = (s_1 + s_2)/2 \pm \sqrt{5}k$ и учесть соотношение $s_1 + s_2 + s_3 = 0$, то девиаторная составляющая компоненты σ_3 тензора напряжений будет определяться формулой $s_3 = \pm 2\sqrt{5}k/3$. Данное значение s_3 на девиаторной плоскости определяют токи, не принадлежащие шестиугольнику Треска.

Если выбирается условие пластичности Леви (4), то согласно ассоциированному закону пластического течения,[6] имеем

$$\dot{\varepsilon}^p = 6\dot{\lambda}\left((2J_2^2(\mathbf{s}) + 4k^2(4k^2 - 3J_2(\mathbf{s})))\mathbf{s} - 3J_3(\mathbf{s})(3\mathbf{s}^2 - tr(\mathbf{s}^2)\mathbf{E})\right), \quad \lambda \geqslant 0. \qquad (12)$$

Учитывая, что третий основной инвариант девиатора напряжений $J_3 = s_1 s_2 s_3$, из соотношения (12) следует, что равенство $\dot{\varepsilon}_3^p = 0$ будет выполнено, если, например, $s_3 = 0$. Однако, если решается упругопластическая задача и учитывается упругая сжимаемость, например, в случае плоско-деформированного состояния, когда $\varepsilon_3 = 0$, в упругой области согласно закону Гука $\sigma_3 = \nu(\sigma_1 + \sigma_2)$, а в пластической области ($\lambda > 0$) согласно формуле (12) $\sigma_3 = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$. То есть, при выборе условий пластичности в форме (3) или (4) компонента тензора напряжений σ_3 на упругопластической границе будет претерпевать разрыв. При решении же упругопластической задачи при условии пластичности Треска (1), (2) значение компоненты тензора напряжений σ_3 в пластической области определяется с учетом неразрывности напряжений на упругопластической границе [21], а не из соотношений ассоциированного закона пластического течения.

ОБ ОБОБЩЕННОМ АССОЦИИРОВАННОМ ЗАКОНЕ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ

Для сингулярных точек поверхности пластичности применяется обобщенный ассоциированный закона пластического течения, согласно которому в пространстве главных напряжений на ребре поверхности пластичности может реализоваться “веер” векторов скоростей пластических деформаций [5, 22]. Однако при решении ряда упругопластических задач соотношения обобщенного закона пластического течения не реализуются и пластические деформации претерпевают скачок [20].

УСЛОВИЕ ПЛАСТИЧНОСТИ ШМИДТА-ИШЛИНСКОГО

Условия пластичности максимального приведенного напряжения было введено независимо рядом авторов [23], [24].[7] В симметричной относительно главных нормальных компонентах девиатора напряжений форме это условие определяется равенством

$$max\,\{|s_1|, |s_2|, |s_3|\} = 2\sigma_T' 3, \text{ или } \quad |s_1| + |s_2| + |s_3| = 4\sigma_T' 3.$$

Пусть одно из собственных значений тензора $\mathbf{s}$ равно $k = 2\sigma_T/3$. Тогда тензор $\mathbf{s}^2 - k^2\mathbf{E}$ будет вырожденным, то есть

$$\det(\mathbf{s}^2 - k^2\mathbf{E}) = 0. \qquad (13)$$

В произвольном базисе из равенства (13) следует, что [25]

$$J_3^2(\mathbf{s}) - k^2(J_2(\mathbf{s}) - k^2)^2 = 0. \qquad (14)$$

Рассмотрим грань поверхности пластичности максимального приведенного напряжения, для которой

$$|s_i| = k, \quad |s_j| \leqslant k, \quad |s_k| \leqslant k, \quad s_1 + s_2 + s_3 = 0. \qquad (15)$$

Индексы i, j, k циклически принимают значения 1,2,3. При выполнении соотношений (15) девиатор тензора напряжений

$$\mathbf{s} = \kappa k \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i - (\kappa k + s_k)\mathbf{n}_j \otimes \mathbf{n}_j + s_k \mathbf{n}_k \otimes \mathbf{n}_k, \ -k \leqslant s_k \leqslant k, \ \kappa = sign(s_i)$$

---

[6] Заметим, что если в качестве пластического потенциала выбрать функцию Леви (7), то неопределенный множитель $\lambda \leqslant 0$.

[7] В работе Шмидта 1932 года [23], наряду с другими вариантами условия пластичности для упрочняющегося тела, наибольшее главное значение девиатора напряжений рассматривается как функция наибольшего главного значения девиатора деформаций.

имеет один независимый инвариант, что приводит к уравнению

$$\kappa J_3(\mathbf{s}) + kJ_2(\mathbf{s}) - k^3 = 0, \quad \kappa = 1, -1. \tag{16}$$

Равенства (16) также следует из того, что тензор

$$\mathbf{s} - \kappa k \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i = -(2\kappa k + s_l)\mathbf{n}_j \otimes \mathbf{n}_j + (s_l - \kappa k)\mathbf{n}_l \otimes \mathbf{n}_l$$

является вырожденным, то есть $\det(\mathbf{s} - \kappa k \mathbf{E}) = 0$ [26]. Решения уравнения (16) на девиаторной плоскости определяют линии, изображенные на рис. 4.а).

В работе [27] отмечалось, что равенства (13), (146) и (16) не равносильны условию пластичности максимального приведенного напряжения, поскольку на девиаторной плоскости определяют разные линии (Рис.2).

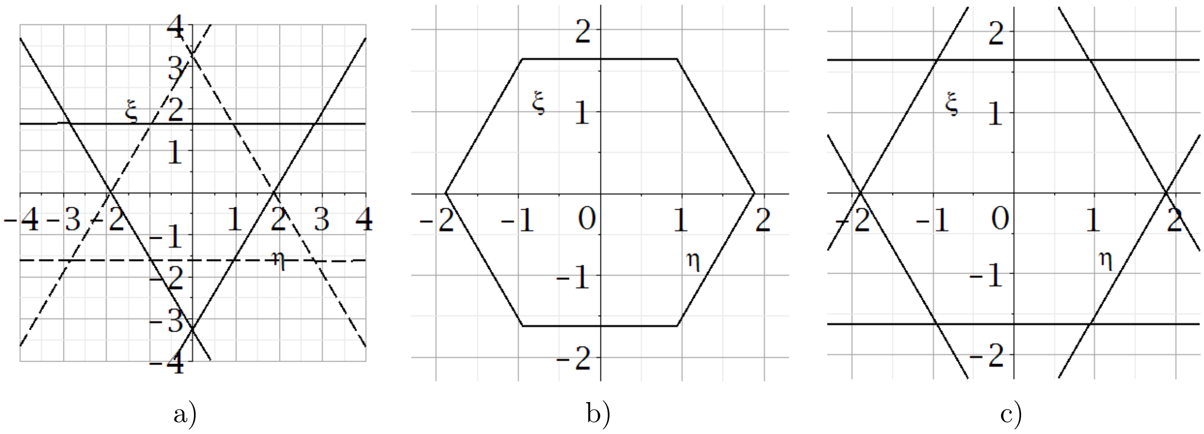


Рис. 2. *Линии, определяемые уравнением a)* $\kappa J_3(\mathbf{s}) + kJ_2(\mathbf{s}) - k^3 = 0$. *Сплошная линия соответствует* $\kappa = 1$, *пунктирная* $\kappa = -1$, *b) шестиугольник Шмидта-Ишлинского, c) "шестиугольник" Ивлева-Артемова-Аннина,* $k = 1$.

В качестве аналога условия пластичности максимального приведенного напряжения можно использовать систему

$$\begin{cases} J_3^2(\mathbf{s}) - k^2(J_2(\mathbf{s}) - k^2)^2 = 0, \\ J_2(\mathbf{s}) \leqslant k^2. \end{cases}$$

ОБОБЩЕННЫЕ УСЛОВИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ ТРЕСКА-МИЗЕСА И ШМИДТА-ИШЛИНСКОГО

А. Херши [28] и В. Хосфорд [29] предложили условие пластичности $|s_1 - s_3|^m + |s_2 - s_3|^m + |s_3 - s_1|^m = 2k^m$, которое при $m = 1$ и $m \to \infty$ переходит в условие Треска, а при $m = 2$ в условие пластичности Мизеса.

Аналогично обобщенному условию пластичности Треска-Мизеса [28, 29] можно рассматривать обобщенное условие Мизеса-Шмидта-Ишлинского [30] $|s_1|^m + |s_2|^m + |s_3|^m = \frac{2^m+2}{3^m}k^m$, которое переходит при $m = 1$ и $m \to \infty$ переходит в условие Шмидта-Ишлинского, а при $m = 2$ в условие пластичности Мизеса.

Рассмотрим задачу. Пусть $\mathbf{s}$ — симметричный тензор второй валентности, $tr(\mathbf{s}) = 0$. Обозначим через s_1, s_2, s_3 его собственные значения. Требуется выразить $(s_1 - s_2)^{2m} + (s_1 - s_3)^{2m} + (s_2 - s_3)^{2m}$ через основные второй и третий инварианты J_2 и J_3 тензора $\mathbf{s}$.

Заметим, что силу теоремы Гамильтона-Кэли справедливо соотношение ($tr(\mathbf{s}) = 0$)

$$-\mathbf{s}^3 + J_2\mathbf{s} + J_3\mathbf{E} = {}^2\bar{\mathbf{0}}.$$

Отсюда получаем рекуррентную формулу $tr(\mathbf{s}^i) = J_2 tr(\mathbf{s}^{i-2}) + J_3 tr(\mathbf{s}^{i-3})$. С учетом того, что $tr(\mathbf{s}^2) = 2J_2,\ tr(\mathbf{s}^3) = 3J_3$ мы можем теперь выразить $tr(\mathbf{s}^i)$, $i = 1, 2, ...$, через инварианты J_2 и J_3. Попытаемся выразить величину

$$(s_1 - s_2)^{2m} + (s_1 - s_3)^{2m} + (s_2 - s_3)^{2m}$$

через величины $tr(\mathbf{s}^i)$, $i = 1, 2, ...$

Теорема. Справедлива формула

$$(s_1 - s_2)^{2m} + (s_1 - s_3)^{2m} + (s_2 - s_3)^{2m} =$$
$$= 2tr(\boldsymbol{s}^{2m}) + \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^i C_{2m}^i (tr(\boldsymbol{s}) tr(\boldsymbol{s}^{2m-i}) - tr(\boldsymbol{s}^{2m})) + \frac{(-1)^m}{2} C_{2m}^m (tr^2(\boldsymbol{s}^m) - tr(\boldsymbol{s}^{2m})).$$

Доказательство. Используя биномиальное разложение и группируя слагаемые специальным образом, приходим к равенству

$$(s_1 - s_2)^{2m} + (s_1 - s_3)^{2m} + (s_2 - s_3)^{2m} = 2(s_1^{2m} + s_2^{2m} + s_3^{2m}) + \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^i C_{2m}^i s_1^{2m-i} (s_2^i + s_2^i)$$

$$+ \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^i C_{2m}^i s_2^{2m-i} s_2^{2m-i} (s_1^i + s_3^i) + \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^i C_{2m}^i s_3^{2m-i} (s_1^i + s_2^i) + (-1)^m C_{2m}^m (s_1^m s_2^m + s_1^m s_3^m + s_2^m s_3^m).$$

Отсюда с учетом соотношения

$$2(s_1^m s_2^m + s_1^m s_3^m + s_2^m s_3^m) = tr^2(\mathbf{s}^m) - tr(\mathbf{s}^{2m})$$

нетрудно вывести требуемую формулу [31]. Теорема доказана.

Очевидно, что доказанная выше теорема применима к условиям вида

$$f(A_i, T_j) = 0,$$

где $A_i^{(2m)} = (c_{(i)1} - c_{(i)3})^{2m} + (c_{(i)2} - c_{(i)3})^{2m} + (c_{(i)3} - c_{(i)1})^{2m}$, $T_j^{(n)} = tr(\mathbf{b}_j^n)$ — инварианты тензоров второй валентности $\mathbf{c}_i$, $\mathbf{b}_j$, $i, j = 1, 2, ...$

В частности, эта теорема позволяет записать ряд условий пластичности для анизотропных и упрочняющихся материалов [32-35] через инварианты девиатора напряжений или инварианты тензора напряжений, когда $\mathbf{c}_i = {}^4\bar{\mathbf{L}}_i \cdot\cdot \mathbf{s}$, $\mathbf{b}_j = {}^4\bar{\mathbf{L}}_j \cdot\cdot \sigma$, ${}^4\bar{\mathbf{L}}_i$ — тензоры четвертой валентности, характеризующие анизотропию материала.

ВЫВОДЫ

Варианты записи условий пластичности максимального касательного напряжения (условие пластичности Треска) и максимального приведенного напряжения (условие пластичности Шмидта-Ишлинснского) через основные инварианты девиатора напряжений (условия Леви-Рейсса и Ивлева-Артемова-Аннина) должны дополняться ограничениями, позволяющими отсечь на девиаторной плоскости лишние линии, не принадлежащие шестиугольнику Треска и шестиугольнику Шмидта-Ишлинского. Использование аналогов кусочно-линейных условий пластичности, выраженных через собственные значения тензора напряжений и основные инварианты тензора напряжений, приводит к неэквивалентным результатам, если их рассматривать в качестве пластических потенциалов. Обобщенные условия пластичности Треска-Мизеса-Шмитдта-Ишлинского могут быть выражены через координаты тензора напряжений в произвольном базисе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Tresca H. E. Mémoire sur l'écoulement des corps solides soumis á de fortes pressions / H. E. Tresca // Compt. Rehd. Acad. Sci. Paris. — 1864. — V. 59. — P. 754–758.

[2] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. — М.: Наука, 1966. — 232 с.

[3] Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д. В. Беклемишев. — М. : Наука, 1998. — 320 с.

[4] Лурье А.И. Нелинейная теория упругости / А.И. Лурье. — М. : Наука, 1980. — 512 с.

[5] Reuss A. Vereintachte Berechnung der plastischen Formänderungs-geschwindingkeiten bei Voraussetzung der Schubspannungsfliesbedingung / A. Reuss // Ztschr. Angew. Math. und Mech. — 1933. — Band. 13. — Heft 5. — S. 365-360.

[6] Соколовский В.В. Теория пластичности / В.В. Соколовский. — М. : Высшая школа, 1969. — 608 с.

[7] Качанов Л. М. Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. — М.: Наука, 1969. — 420 с.

[8] Hill R. The Mathematical Theory of Plasticity / R. Hill. — Oxford: Clarendon Press, 1950. — 356 p.

[9] Lévy M. Extrait du mémoire sur les équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au delá des limites oú l'élasticité pourrait les ramener á leur premier état / M. Lévy // J. Math. Pures Appl. — 1871 — sre. II, V. 16. — P. 369–372.

[10] Соколовский В.В. Теория пластичности / В.В. Соколовский. — М.–Л.: Гос. изд. технико-теор. лит., 1950. — 396 с.

[11] Ивлев Д. Д. Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. — М.: Наука, 1978. — 208 с.

[12] Prager W. Theory of perfectly plastic solids / W. Prager, P.G. Hodge. — John Wiley and Sons: New York, 1951. — 328 p.

[13] Malvern L. E. Introduction to the mechanics of a continuous medium / L. E. Malvern. — Prentice-Hall, Inc.: Englewood Cliffs. New Jersey, 1969. — 713 p.

[14] Артемов М. А. О записи кусочно-линейных условий пластичности / М. А. Артемов, А. П. Якубенко // Кибернетика и высокие технологии XXI века. Труды X Международной научно-технической конференции. — Воронеж: ВГУ, 2009. — Т. 2. — С. 823–833.

[15] Артемов М.А. О соотношениях, вытекающих из условия пластичности Треска / М. А. Артемов, Н. С. Потапов, А. П. Якубенко // Вестник Воронежского государственного технического университета. — 2011. — Т. 7, № 3. — С. 7–8.

[16] Артемов М. А. Соотношения изотропии и ассоциированный закон течения / М. А. Артемов, Е. С. Барановский, А. П. Якубенко // Материалы Международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики". Россия, Тула 15-19 сентября 2014 года. — Тула : ТулГУ, 2014. — С. 103–110.

[17] Радаев Ю. Н. Граничные условия для пространственных состояний идеально пластических тел / Ю. Н. Радаев // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. — 2008. — № 2 (61). — С. 230–247.

[18] Артемов М. А. К определению перемещений в задачах плоского деформированного состояния сжимаемых упруго-пластических тел / М. А. Артемов, В. А. Баскаков, А. П. Якубенко // Труды пятой Международной научно-технической конференции: Авиакосмические технологии "АКТ-2004". Ч. 1: Технологии авиастроения. Конструкция и прочность / Воронеж: Воронеж. гос. тех. ун-т., 2004. — С. 231–236.

[19] Артемов М. А. / Следствия нормального закона пластического течения / М. А. Артемов, Н. С. Потапов, А. П. Якубенко // Вестник Воронежского государственного технического университета. — 2009. — Т. 5, № 9. — С. 145–147.

[20] Артемов М. А. Соотношения изотропии и ассоциированный закон течения / М. А. Артемов, Е. С. Барановский, А. П. Якубенко // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 4. — С. 81–91.

[21] Артемов М. А. О выполнении условия полной пластичности при плоском деформированном состоянии / М. А. Артемов, Н. П. Бестужева, Н. С. Потапов // Вестник Воронежского государственного технического университета. — 2010. — Т. 6, № 7. — С. 88–92.

[22] Koiter W. T. Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elasto-plastic material with a singular yield surface / W. T. Koiter // Quart. Appl. Math. 1953. — V. 11. — P. 350–354.

[23] Schmidt R. Über den Zusammenhang von Spannungen und Formänderungen im Verfestigungsgebiet / R. Schmidt // Ingenieur archiv. — 1932. — Band. III. — Heft 3. — S. 215–235.

[24] Ишлинский А. Ю. Гипотеза прочности формоизменения // Учен. записки МГУ. Механика. — 1940. — Вып. 46. — С. 117-124.

[25] Анин Б. Д. Теория идеальной пластичности с сингулярной поверхностью текучести / Б. Д. Анин // Прикл. механика и теор. физ. — 1999. — Т. 40, № 2. — С. 181–188.

[26] Артемов М. А. О статических и кинематических соотношениях в теории идеальной пластичности при кусочно-линейных условиях текучести / М. А.Артемов, Д. Д. Ивлев // Известия РАН. Механика твердого тела. — 1995. — № 3. — С. 104–110.

[27] Артемов М.А. О соотношениях, вытекающих из условия пластичности максимального приведенного напряжения / М. А. Артемов, Н. С. Потапов, А. П. Якубенко // Вестник Воронежского государственного технического университета. — 2011. — Т. 7, № 4. — С. 4–5.

[28] Hershey A. V. The plasticity of an isotropic aggregate of anisotropic face centered cubic crystals / A. V. Hershey // J. Appl. Mech. Trans. ASME. — 1954. — V. 21. — P. 241–249.

[29] Hosford W. F. A generalize isotropic yield criterion / W. F. Hosford // J. Appl. Mech. — 1972. — V. 39, № 2. — P. 607–609.

[30] Karafillis A. P. A general anisotropic yield criterion using bounds and a transformation weighting tensor / A. P. Karafillis, M. C. Boyce // J. Mech. Phys. Solid. — 1993. — V. 41. — P. 1859–1886.

[31] Артемов М. А. Альтернативная форма записи условия пластичности / М. А. Артемов, Е. С. Барановский // Успехи современного естествознания. — 2014. — № 12–3. — С. 292.

[32] Yielding description of solution strengthened aluminum alloys / F. Barlat, R. C. Becker, Y. Hayashida et. al. // Int. J. Plasticity. — 1997. — V. 13. — P. 385–401.

[33] Bron F. A yield function for anisotropic materials: Application to aluminium alloys / F. Bron, J. Besson // Int. J. Plast. — 2004. — V. 20 (4–5). — P. 937–963.

[34] Артемов М. А. Вариант теории пластического течения анизотропных материалов / М. А. Артемов, С. Н. Пупыкин, А. В. Рыжков // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2002. — № 1. — С. 69–73.

[35] Артемов М. А. К теории пластичности анизотропных материалов / М. А. Артемов // Проблемы механики: Сборник статей. К 90-летиюсо дня рождения А. Ю. Ишлинского. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — С. 100–104.

REFERENCES

[1] Tresca H.E. Mémoire sur l'écoulement des corps solides soumis á de fortes pressions. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris. 1864, vol. 59, pp. 754–758.

[2] Ivlev D.D. Theory of Ideal Plasticity. [Ivlev D.D. Teorija idealnoj plastichnisti]. Moscow: Nauka, 1966, 232 p.

[3] Beklemishev D. V. Course of analytical geometry and linear algebra. [Beklemishev D. V. Kurs analiticheskoij geometrii I lineijnoij algebri]. Moscow: Nauka. 1998, 320 p.

[4] Lurie A.I. Nonlinear theory of elasticity. [Lur'e A.I. Nelinejnaya teoriya uprugosti]. Moscow: Nauka, 1980, 512 p.

[5] Reuss A. Vereintachte Berechnung der plastischen Formänderungs-geschwindingkeiten bei Voraussetzung der Schubspannungsfliesbedingung. Ztschr. Angew. Math. und Mech, 1933, Band. 13, heft 5, s. 365–370.

[6] Sokolovskii V.V. Theory of plasticity. [Sokolovskij V.V. Teoriya plastichnosti]. Moscow-Leningrad: Gos. tech.-teoret. izdat, 1950, 398 p.

[7] Kachanov L. M. Foundations of the Theory of Plasticity. [Kachanov L. M. Osnovy teorii plastichnosti]. Moscow: Nauka, 1973, 576 p.

[8] Hill R. The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford, Clarendon Press, 1950, 356 p.

[9] Lévy M. Extrait du mémoire sur les équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au delá des limites oú l'élasticité pourrait les ramener á leur premier état. J. Math. Pures Appl., 1871, Ser. II, Vol. 16, pp. 369—372.

[10] Sokolovskii V.V. Theory of plasticity. [Sokolovskij V.V. Teoriya plastichnosti]. Moscow: Vishaya Shkola, 1950, 396 p.

[11] Ivlev D.D., Ershov L. V. Perturbation method in the theory of elastic-plastic body. [Ivlev D.D., Ershov L.V. Metod vozmushhenij v teorii uprugoplasticheskogo tela]. Moscow: Nauka, 1978, 208 p.

[12] Prager W., Hodge , P.G. Theory of perfectly plastic solids. John Wiley and Sons: New York, 1951, 328 p.

[13] Malvern L. E. Introduction to the mechanics of a continuous medium. Prentice-Hall, Inc.: Englewood Cliffs. New Jersey, 1969, 713 p.

[14] Artemov M.A., Yakubenko A.P. On recording piecewise linear plasticity conditions. [Artemov M.A, Yakubenko A.P. O zapisi kusochno-lineiynich usloviy plastichnosti]. Cybernetics and high technology of the XXI century. Proceedings of the X International Scientific and Technical Conference. Russia, Voronezh: Voronezh State University, 2009. V. 2, pp. 823–833.

[15] Artemov M.A., Potapov N.S., Yakubenko A.P. About relations arising from Treska plasticity condition. [Artemov M.A, Bestuzheva N.P., Potapov N.S. O sootnoshenijah, vytekajushhih iz uslovija plastichnosti Treska]. *Vestnik Voronezhskogo technicheskogo universiteta — Proceedings of Voronezh State Technical University*, 2011, vol. 7, no. 3, pp. 7–8.

[16] Artemov M.A. Baranovskii E.S., Yakubenko A.P. Ratio isotropy and associated flow law. [Artemov M.A. Baranovskii E.S., Yakubenko A.P. Sootnoshenija izotropii i associirovannyj zakon techenija]. International scientific conference "Modern problems of mathematics, mechanics, computer science". Russia, Tula, September 15–19, 2014, Tula: Tula State University, 2014, pp. 103–110.

[17] Radayev Y.N. Boundary conditions for state-space perfectly plastic bodies. [Radaev Yu.N. Granichnye uslovija dlja prostranstvennyh sostojanij ideal'no plasticheskih tel]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya — Vestnik of Samara state University. Science series*, 2008, no. 2 (61), pp. 230–247.

[18] Artemov M.A., Baskakov V.A., Yakubenko A.P. Determination of displacements in the plane strain problems of compressible elastic-plastic bodies. [Artemov M.A., Baskakov V.A., Yakubenko A.P. K opredeleniju peremeshhenij v zadachah ploskogo deformirovannogo sostojanija szhimaemyh uprugo-plasticheskih tel]. Proceedings of the Fifth International Scientific Conference: Aerospace Technologies 2004. Part 1: Technology of aviation. Construction and Strength, Voronezh: Voronezh State Technical University, pp. 231–236.

[19] Artemov M.A., Potapov N.S., Yakubenko A.P. Normal plastic flow implications. [Artemov M.A., Potapov N.S., Yakubenko A.P. Sledstviya normal'nogo zakona plasticheskogo techeniya]. *Vestnik Voronezhskogo technicheskogo universiteta — Proceedings of Voronezh State Technical University*, 2009, vol. 5, no. 9, pp. 145–147.

[20] Artemov M.A. Baranovskii E.S., Yakubenko A.P. Ratio isotropy and associated flow law. [Artemov M.A. Baranovskii E.S., Yakubenko A.P. Sootnoshenija izotropii i associirovannyj zakon techenija]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 4, pp. 81–91.

[21] Artemov M.A, Bestuzheva N.P., Potapov N.S. The implementation of full plasticity condition at flat strain state. [Artemov M.A, Bestuzheva N.P., Potapov N.S. O vypolnenii uslovija polnoj plastichnosti pri ploskom deformirovannom sostojanii]. *Vestnik Voronezhskogo technicheskogo universiteta — Proceedings of Voronezh State Technical University*, 2010, vol. 6, no. 7, pp. 88–92.

[22] Koiter W.T. Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elasto-plastic material with a singular yield surface. Quart. Appl. Math, 1953, V. 11, pp. 350–354.

[23] Schmidt R. Über den Zusammenhang von Spannungen und Formänderungen im Verfestigungsgebiet. Ingenieur-archiv, 1932. Band. III, heft 3, s. 215–235.

[24] Ishlinskii A.Y. Hypothesis of strength of shape change. [Ishlinskii A.Y. Gipoteza prochnosti formoizmenenija]. *Uchebnye Zapiski Moskovskogo Universiteta, Mekhanika — Proceedings of Moscow State University. Mechanics*, 1940, no. 46, pp. 117–124.

[25] Annin B. D. Theory of ideal plasticity with a singular yield surface. [Anin B. D. Teoriya ideal'noj plastichnosti s singulyarnoj poverxnost'yu tekuchesti]. *Prikladnaya mexanika i texnicheskaya fizika — Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1999, vol. 40, no. 2, pp. 347–353.

[26] Artemov M.A., Ivlev D.D. About static and kinematic relations in the theory of ideal plasticity at piecewise linear yield conditions. [Artemov M.A., Ivlev D.D. O staticheskih i kinematicheskih sootnoshenijah v teorii ideal'noj plastichnosti pri kusochno-linejnyh uslovijah tekuchesti]. *Izvestiya RAN. Mekhanika Tverdogo Tela — Mechanics of Solids*, 1995, no. 3, pp. 104–110.

[27] Artemov M.A., Potapov N.S., Yakubenko A.P. About relations arising from the maximum reduced stress plasticity condition. [Artemov M.A., Potapov N.S., Yakubenko A.P. O sootnoshenijah, vytekajushhih iz uslovija plastichnosti maksimal'nogo privedennogo naprjazhenija]. *Vestnik Voronezhskogo technicheskogo universiteta — Proceedings of Voronezh State Technical University*, 2011, vol. 7, no. 4, pp. 4–5.

[28] Hershey A.V. The plasticity of an isotropic aggregate of anisotropic face centered cubic crystals. Journal of Applied Mechanics. Trans. ASME, 1954, vol. 21, pp. 241–249.

[29] Hosford W. F. A generalize isotropic yield criterion. J. Appl. Mech, 1972. Vol. 39, no. 2, pp. 607–609.

[30] Karafillis A.P., Boyce M.C. A general anisotropic yield criterion using bounds and a transformation weighting tensor. J. Mech. Phys. Solid, 1993. vol. 41(12), pp. 1859–1886.

[31] Artemov M.A. Baranovskii E.S. Alternative forms of plasticity condition. [Artemov M.A. Baranovskii E.S. Al'ternativnaja forma zapisi uslovija plastichnosti]. *Uspehi sovremennogo estestvoznanija — Advances in Current Natural Sciences*, 2014. no. 12 (3), p. 292.

[32] Barlat F. and al. Yielding description of solution strengthened aluminum alloys. Int. J. Plasticity. 1997, vol. 13, pp. 385–401.

[33] Bron F, Besson J. A yield function for anisotropic materials: Application to aluminium alloys. Int. J. Plast. 2004, vol. 20 (4–5), pp. 937–963.

[34] Artemov M.A., Pupykin S.N, Ryzhkov A.V. Variant of the theory of plastic flow of anisotropic materials. [Artemov M.A., Pupykin S.N., Ryzhkov A.V. Variant teorii plasticheskogo techenija anizotropnyh materialov]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2002, no. 1, pp. 69–73.

[35] Artemov M.A. On theory of plasticity of anisotropy solids. [Artemov M.A. K teorii

plastichnosti anizotropnyx materialov]. Problems in mechanics: a Collection of articles. To the 90th anniversary of the birthday A.Y. Ishlinsky. Moscow: FIZMATLIT, 2003, pp. 100–104.

Артемов Михаил Анатольевич, заведующий кафедрой программного обеспечения и администрирования информационных систем факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского госуниверситета, д.ф.-м.н., профессор, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: artemov_m_a@mail.ru

Artemov, Mikhail Anatolievich, Head of the Chair of Programming Software and Administration of Voronezh State University, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Voronezh, Russian Federation
E-mail: artemov_m_a@mail.ru

Барановский Евгений Сергеевич, доцент кафедры программного обеспечения и администрирования информационных систем факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского госуниверситета, к.ф.-м.н., Воронеж, Российская Федерация
E-mail: esbaranovskii@gmail.com

Baranovskii Evgeni Sergeevich, Associate Professor of the Chair of Programming Software and Administration of Voronezh State University, candidate of physical and mathematical sciences, Voronezh, Russian Federation
E-mail: esbaranovskii@gmail.com

Якубенко Андрей Павлович, преподаватель кафедры программного обеспечения и администрирования информационных систем факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского госуниверситета, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: Andrey.Yakubenko@dataart.com

Yakubenko Andrey Pavlovich, Lecturer of the Chair of Programming Software and Administration of Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: Andrey.Yakubenko@dataart.com