УДК 517.927

О ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЯХ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ*

Дж. Аль-Обаиди, В. В. Обуховский

Воронежский государственный педагогический университет

Поступила в редакцию 11.12.2013 г.

Аннотация: Исследуется полулинейное дифференциальное включение в сепарабельном банаховом пространстве E следующего вида

$$y'(t) \in Ay(t) + F(t, y(t)),\ t \in [0, T]$$

с нелокальным граничным условием

$$Ly(0) = \varphi(y),$$

где $L : DomL \subseteq E \to E$ – линейный фредгольмов оператор нулевого индекса, $\varphi : C([0, T]; E) \to E$ – непрерывное отображение. Существование решения указанной задачи сводится к нахождению точки совпадения оператора L и некоторого многозначного отображения. Обсуждаются возможности применения для этой цели топологической степени совпадения. В качестве примера рассматривается разрешимость обобщенной периодической задачи.

Ключевые слова: полулинейное дифференциальное включение, нелокальное граничное условие, точка совпадения, степень совпадения, многозначное отображение, мера некомпактности, уплотняющее отображение.

ON SEMILINEAR DIFFERENTIAL INCLUSIONS WITH NONLOCAL BOUNDARY VALUE CONDITIONS

J. M. Al-Obaidi, V. V. Obukhovskii

Abstract: we study a semilinear differential inclusion in a separable Banach space E of the following form:

$$y'(t) \in Ay(t) + F(t, y(t)),\ t \in [0, T]$$

with a nonlocal boundary condition

$$Ly(0) = \varphi(y),$$

where $L : DomL \subseteq E \to E$ is a linear Fredholm operator of a zero index, $\varphi : C([0, T]; E) \to E$ is a continuous map. The existence of a solution to the this problem is reduced to the search of a coincidence point of an operator L and a certain multivalued map. The opportunities for the application of the topological coincidence degree towards this goal are discussed. As example, we consider the solvability of a generalized periodic problem.

Keywords: semilinear differential inclusion, nonlocal boundary condition, coincidence point, coincidence degree, multivalued map, measure of noncompactness, condensing map.

* Работа поддержана грантами РФФИ 14-01-00468 и 13-01-00041, РНФ (проект 14-21-00066) (Теорема 5) и Минобрнауки России в рамках базовой части госзадания.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Мы будем рассматривать полулинейное дифференциальное включение в сепарабельном банаховом пространстве E

$$y'(t) \in Ay(t) + F(t, y(t)), \qquad t \in [0, T] \tag{1}$$

вместе с нелокальным граничным условием следующего вида

$$Ly(0) = \varphi(y), \tag{2}$$

где $L : DomL \subseteq E \to E$ — линейный фредгольмов оператор нулевого индекса, $\varphi : C([0,T]; E) \to E$ — непрерывное отображение.

Предполагается, что линейная часть включения (1) удовлетворяет условию

A) $A : DomA \subseteq E \to E$ — замкнутый линейный оператор, порождающий C_0-полугруппу e^{At}, $t \geqslant 0$.

В дальнейшем мы полагаем известными элементарные понятия теории многозначных отображений (см., например, [6] и др.) Обозначим символами $K(E)$ $[Kv(E)]$ совокупности всех непустых компактных [соответственно, выпуклых компактных] подмножеств E. Будем считать, что для многозначной нелинейности $F : [0, T] \times E \to Kv(E)$ выполнены условия:

$F1$) мультифункция $F(\cdot, x) : [0, T] \to Kv(E)$ обладает измеримым сечением для каждого $x \in E$;

$F2$) мультиотображение $F(t, \cdot) : E \to Kv(E)$ полунепрерывно сверху для п.в. $t \in [0, T]$;

$F3$) существует функция $\alpha \in L^1_+([0, T])$ такая, что

$$\|F(t, x)\| := \sup\{\|z\| : z \in F(t, x)\} \leqslant \alpha(t)(1 + \|x\|)$$

для п.в. $t \in [0, T]$.

Следующее предположение называется условием χ-регулярности:

$F4$) существует функция $k(\cdot) \in L^1_+([0, T])$ такая, что

$$\chi(F(t, D)) \leqslant k(t) \cdot \chi(D) \quad \text{a.e. } t \in [0, T]$$

для любого ограниченного множества $D \subset E$, где χ — мера некомпактности Хаусдорфа в E:

$$\chi(D) = \inf\{\varepsilon : D \text{ имеет конечную } \varepsilon - \text{сеть}\}.$$

Отметим, что частными случаями граничного условия (2) являются обобщенные периодические задачи

$$Ly(0) = \psi(y(T)), \tag{3}$$

где $\psi : E \to E$ — некоторое непрерывное отображение и

$$Ly(0) = y(T). \tag{4}$$

2. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ

Мы будем рассматривать интегральные решения включения (1), т.е. непрерывные функции $y : [0,T] \to E$ вида

$$y(t) = e^{At}y(0) + \int\limits_0^t e^{A(t-s)} f(s) ds,$$

где $f(s) \in F(s, y(s))$ п.в. $s \in [0,T]$ — суммируемое сечение.

Справедлива следующая теорема существования решения задачи Коши (Theorem 5.2.2 [8]).

Теорема 1. *При выполнении условий* (A), $(F1)$-$(F4)$ *для любого* $x_0 \in E$ *множество* $\Sigma(x_0)$ *всех интегральных решений* $y(\cdot)$ *дифференциального включения* (1), *удовлетворяющих начальному условию*

$$y(0) = x_0 \tag{5}$$

— непустое компактное подмножество $C([0,T]; E)$.

Более того, решения задачи (1), (5) обладают следующими топологическими свойствами (см. [8], Corollaries 5.3.1, 5.2.2).

Теорема 2. *При условиях Теоремы 1 каждое множество* $\Sigma(x)$ *является* R_δ*-множеством, т.е. может быть представлено в виде пересечения убывающей последовательности компактных стягиваемых множеств, и мультиотображение* $\Sigma : E \to K(C([0,T]; E))$ *полунепрерывно сверху.*

Заметим теперь, что задача (1)–(2) сводится к нахождению решения $x \in E$ включения

$$Lx \in \varphi(\Sigma(x)), \tag{6}$$

или, иначе говоря, отысканию точки совпадения оператора L и мультиотображения $\varphi \circ \Sigma$. Такое мультиотображение, представляющее собой композицию полунепрерывного сверху мультиотображения с R_δ-значениями и непрерывного отображения, называется CJ-мультиотображением. Заметим, что CJ-мультиотображения являются частным случаем псевдоациклических мультиотображений, которые рассматривались в работах [1]–[3]. Для конкретизации требований, накладываемых на мультиотображение $\varphi \circ \Sigma$, напомним следующие понятия (см., например, [4], [5], [8]).

Определение 3. Пусть $(\mathcal{A}, \geqslant)$ – частично упорядоченное множество. Отображение $\beta : P(E) \to \mathcal{A}$ называется мерой некомпактности (МНК) в E, если

$$\beta(\overline{co}\Omega) = \beta(\Omega)$$

для любого $\Omega \subset E$, где $\overline{co}$ обозначает выпуклое замыкание множества.

Мера некомпактности β называется:

(i) монотонной, если из $\Omega_0, \Omega_1 \in P(E)$, $\Omega_0 \subseteq \Omega_1$ следует $\beta(\Omega_0) \leqslant \beta(\Omega_1)$;

(ii) несингулярной, если $\beta(\{a\} \cup \Omega) = \beta(\Omega)$ для любых $a \in E$, $\Omega \in P(E)$;

(iii) полуаддитивной, если $\beta(\Omega_0 \cup \Omega_1) = \max\{\beta(\Omega_0), \beta(\Omega_1)\}$ для любых $\Omega_0, \Omega_1 \in P(E)$;

(iv) инвариантной относительно отражения в нуле, если $\beta(-\Omega) = \beta(\Omega)$ для любого $\Omega \in P(E)$;

(v) полуоднородной, если $\beta(\lambda\Omega) = |\lambda|\beta(\Omega)$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$.

Если $\mathcal{A}$ – конус в банаховом пространстве, то МНК β называется:

(vi) алгебраически полуаддитивной, если

$$\beta(\Omega_0 + \Omega_1) \leqslant \beta(\Omega_0) + \beta(\Omega_1)$$

для любых $\Omega_0, \Omega_1 \in P(E)$;

(vii) правильной, если $\beta(\Omega) = 0$ равносильно относительной компактности Ω.

МНК β называется вещественной, если $\mathcal{A} = [0, +\infty]$ с естественным упорядочением и $\beta(\Omega) < +\infty$ для каждого ограниченного множества $\Omega \in P(E)$

Распространенными примерами вещественных мер некомпактности, обладающими свойствами (i)-(vii), являются уже упомянутая выше мера некомпактности Хаусдорфа χ и мера некомпактности Куратовского

$$\alpha(\Omega) = \inf\{d : \ d > 0, \ \Omega \ \text{допускает разбиение на конечное}$$

$$\text{число множеств, диаметр которых меньше } d\}.$$

Нам понадобится следующее понятие (см. [8]). Пусть $L : E \to E$ – ограниченный линейный оператор; χ – МНК Хаусдорфа в E; $B \subset E$ – шар единичного радиуса. Число

$$\|L\|^{(\chi)} := \chi(LB)$$

называется χ-нормой оператора L. Эта характеристика обладает следующими свойствами

$$\|L\|^{(\chi)} \leqslant \|L\|,$$

$$\chi(L\Omega) \leqslant \|L\|^{(\chi)}\chi(\Omega) \text{ для } \Omega \in P(E).$$

Пусть X – замкнутое подмножество пространства E; β – МНК в E. Для простоты всюду ниже мы будем предполагать, что МНК β обладает свойствами (i)-(vii).

Определение 4. (см., например, [5], [8]). Мультиотображение $\mathfrak{F} : X \to K(E)$ или семейство мультиотображений $\mathfrak{G} : X \times \Lambda \to K(E)$ называется уплотняющим относительно МНК β (или β-уплотняющим), если для любого $\Omega \subseteq X$, не являющегося относительно компактным, выполнено, соответственно,

$$\beta(\mathfrak{F}(\Omega)) \not\geq \beta(\Omega)$$

или

$$\beta(\mathfrak{G}(\Omega \times \Lambda)) \not\geq \beta(\Omega).$$

Рассмотрим следующий важный класс уплотняющих мультиотображений.

Пусть β – вещественная МНК в E и $0 \leqslant k < 1$. Мультиотображение $\mathfrak{F} : X \to K(E)$ или семейство мультиотображений $\mathfrak{G} : X \times \Lambda \to K(E)$ называются (k, β)-уплотняющими, если, соответственно, $\beta(\mathfrak{F}(\Omega)) \leqslant k\beta(\Omega)$ или $\beta(\mathfrak{G}(\Omega \times \Lambda)) \leqslant k\beta(\Omega)$ для любого $\Omega \subseteq X$.

Отметим теперь нужные нам для дальнейшего свойства линейного фредгольмова оператора нулевого индекса $L : DomL \subseteq E_1 \to E_2$, где E_1 и E_2 - банаховы пространства (см. [9]).

Существуют линейные непрерывные операторы проектирования $P : E_1 \to E_1$ и $Q : E_2 \to E_2$ такие, что $ImP = KerL$ и $KerQ = ImL$. Оператор $L_P : DomL \cap KerP \to ImL$,

$$L_p(x) = L(x) \text{ для } x \in DomL \cap KerP$$

является линейным изоморфизмом. Оператор $K_P : ImL \to DomL \cap KerP$,

$$K_p(x) = L_P^{-1},$$

называемый псевдообратным к L, непрерывен и удовлетворяет соотношению

$$K_P \circ Lx = x - Px$$

для всех $x \in DomL$.

Линейный непрерывный оператор $K_{P,Q} : E_2 \to E_1$ определяется как

$$K_{P,Q}(y) = K_P(y - Qy).$$

Обозначим также $\Pi : E_2 \to CokerL$ каноническую проекцию

$$\Pi y = y + ImL$$

и зафиксируем непрерывный линейный изоморфизм $\Lambda : CokerL \to KerL$.

Пусть β - МНК в E_1, $U \subset E_1$ - выпуклое открытое ограниченное множество.

Определение 5. CJ-мультиотображение $\mathcal{F} : \overline{U} \to K(E_2)$ называется (L, β)-уплотняющим, если:

(a) множество $\mathcal{F}(\overline{U})$ ограничено в E_2;

(b) мультиотображение
$$K_{P,Q} \circ \mathcal{F} : \overline{U} \to K(E_1)$$
является β-уплотняющим.

Пусть теперь (L, β)-уплотняющее CJ-мультиотображение $\mathcal{F} : \overline{U} \to K(E_2)$ таково, что

$$Lx \notin \mathcal{F}(x) \text{ для всех } x \in DomL \cap \partial U. \tag{7}$$

В этой ситуации определена целочисленная характеристика - степень совпадения $deg(L, \mathcal{F}, \overline{U})$, обладающая свойством гомотопической инвариантности и свойством существования точки совпадения: граничное условие (7) и условие $deg(L, \mathcal{F}, \overline{U}) \neq 0$ влекут непустоту множества точек совпадения

$$Coin(L, \mathcal{F}) = \{x \in U : Lx \in \mathcal{F}(x)\}$$

(см. [3]).

Отсюда вытекает следующий общий принцип разрешимости задачи (1) - (2). Пусть β - МНК в E, $U \subset E$ - выпуклое открытое ограниченное множество.

Теорема 6. *Пусть мультиотображение $\varphi \circ \Sigma : \overline{U} \to K(E)$ является (L, β)-уплотняющим и $deg(L, \varphi \circ \Sigma, \overline{U}) \neq 0$. Тогда нелокальная граничная задача* (1) - (2) *имеет решение.*

Заметим, что из условия подлинейного роста $(F3)$ с помощью априорных оценок вытекает, что множество $\Sigma(\overline{U})$ ограничено в $C([0,T];E)$. Поэтому, в случае, когда отображение φ переводит ограниченные множества в ограниченные, установление (L,β)-уплотняемости мультиотображения $\varphi\circ\Sigma$ сводится к проверке для него выполнения условия (b) Определения 5.

Рассмотрим несколько достаточных условий для этого. Наиболее простым из них является, по-видимому, следующее предположение.

φ) отображение φ вполне непрерывно, то есть переводит ограниченные подмножества $C([0,T];E)$ в относительно компактные подмножества E.

Действительно, поскольку $K_{P,Q}$ является ограниченным линейным оператором, то мультиотображение $K_{P,Q}\circ\varphi\circ\Sigma : \overline{U}\to K(E)$ является вполне полунепрерывным сверху и , следовательно, $(0,\chi)$-уплотняющим относительно МНК Хаусдорфа χ.

Пусть теперь условие (φ), вообще говоря, не имеет места, но справедливо следующее предположение.

$A1$) полугруппа e^{At}, порождаемая оператором A, компактна, то есть линейные операторы e^{At} компактны при каждом $t>0$.

Заметим, что для выполнения этого требования достаточно предположить, что оператор A имеет компактную резольвенту и полугруппа e^{At} непрерывна по норме при $t>0$ (см., например, [7]).

Предположим, что отображение φ является композицией непрерывных отображений

$$\varphi = \varkappa_1\circ\varkappa_0 \tag{8}$$

где $\varkappa_0 : C([0,T];E)\to E^m$ задано как

$$\varkappa_0(y) = (y(t_1),\ldots,y(t_m)), \tag{9}$$

где $0<t_1<\ldots<t_m\leqslant T$, $m\geqslant 1$ – заданные точки, а $\varkappa_1 : E^m\to E$. Например

$$\varkappa_1(z_1,\ldots,z_m) = \sum_{i=1}^{m} a_i z_i,\ a_i\in\mathbb{R}. \tag{10}$$

Из вида интегрального решения включения (1) и условия $(A1)$ вытекает, что каждое множество

$$\Sigma(\overline{U})(t_i) = \{y(t_i) : y\in\sum(\overline{U})\},\ i=1,\ldots,m$$

компактно. Но тогда нетрудно видеть, что мультиотображение $\varphi\circ\Sigma$, а следовательно, и $K_{P,Q}\circ\varphi\circ\Sigma$ вполне полунепрерывны сверху.

Если выполнение условий (φ) или $(A1)$ не гарантировано, то мы можем провести более тонкий анализ, чтобы обеспечить выполнение условия уплотняемости мультиотображения $\varphi\circ\Sigma$. Рассмотрим в качестве примера обобщенную периодическую задачу (1), (4).

Сделаем некоторые дополнительные предположения. Мы будем предполагать выполненными условия $(F1)$-$(F3)$, а также условие T-периодичности

F_T) $F(t+T,\cdot) = F(t,\cdot)$ для почти всех $t\in[0,T]$.

Условие χ-регулярности $(F4)$ будем рассматривать в следующей уточненной форме

$F4_g$) для каждого непустого ограниченного подмножества $\Omega \subset E$ выполнено

$$\chi(F(t,\Omega)) \leqslant g(t,\chi(\Omega)) \text{ для почти всех } t \in [0,T],$$

где $g : [0,T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ – функция типа Каратеодори такая, что $g(t,\cdot) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ – неубывающая функция для почти всех $t \in [0,T]$, $g(t,0) = 0$ для почти всех $t \in [0,T]$ и

$$|g(t,v_1) - g(t,v_2)| \leqslant k(t)|v_1 - v_2|$$

для всех $v_1, v_2 \in \mathbb{R}_+$ при почти всех $t \in [0,T]$, где $k \in L^1_+([0,T])$.

Отметим, что из условия периодичности (F_T) вытекает, что мы можем продолжить функции $g(t,v)$ и $k(t)$ на $\mathbb{R}_+$ по t.

В ситуации задачи (1), (4) отображение φ имеет вид

$$\varphi(y) = y(T).$$

Поэтому мультиотображение $\varphi \circ \Sigma$ есть мультиоператор сдвига $P_T : E \multimap E$,

$$P_T(x) = \{y(T) : y - \text{интегральное решение включения}\,(1), y(0) = x\}$$

по траекториям дифференциального включения (1).

Используя теперь теорему об условиях уплотняемости мультиоператора сдвига (Theorem 6.3.1 [8]), мы получаем следующий результат.

Теорема 7. *Пусть выполнены условия (A), $(F1)$-$(F3)$, $(F4_g)$, а также*

$H1$) *полугруппа e^{At} является χ-убывающей:*

$$\|e^{At}\|^{(\chi)} \leqslant Ce^{-\gamma t},$$

где $C \geqslant 1$ и $\gamma > 0$;

$H2$) *нулевое решение скалярного дифференциального уравнения $r'(t) = -\gamma r(t) + Cg(t, r(t))$, $t \geqslant 0$ экспоненциально устойчиво в том смысле, что $r(t) \leqslant C_1 e^{-\mu t} r(0)$, $t \geqslant 0$ для любого неотрицательного решения $r(t)$, где $C_1 \geqslant 1$, $\mu > 0$;*

$H3$) $T > (\frac{1}{\mu}) ln(CC_1)$;

$H4$) $\|K_{P,Q}\|^{(\chi)} < \frac{e^{\mu T}}{CC_1}$.

Тогда мультиотображение $\varphi \circ \Sigma$ является (L,k,χ)-уплотняющим с коэффициентом

$$k = \|K_{P,Q}\|^{(\chi)} CC_1 e^{-\mu T} < 1. \qquad \square$$

Таким образом, при выполнении указанных выше условий, мы можем вычислять степень совпадения $deg(L, \varphi \circ \Sigma, \overline{U})$ с тем, чтобы применить Теорему 6.

В качестве примера приведем следующее утверждение.

Теорема 8. *Пусть выполнены условия Теоремы 7. Пусть $U \subset E$ – выпуклое открытое ограниченное множество; $P_T : E \to K(E)$ – мультиоператор сдвига по траекториям включения (1), удовлетворяющий следующим условиям:*

$P1$) *для любого $x \in DomL \cap \partial U$:*

$$P_T(x) \cap \{\mu Lx : \mu \geqslant 1\} = \varnothing;$$

P2) $0 \notin \Pi P_T(x)$ *для всех* $x \in KerL \cap \partial U$*;*

P3) $deg_{KerL}(\Lambda\Pi P_T|_{\overline{U}_{KerL}}, \overline{U}_{KerL}) \neq 0$*, где последнее выражение представляет собой топологическую степень* CJ*-мультиполя, вычисляемую в конечномерном пространстве* $KerL$*.*

Тогда существует решение $y(\cdot)$ *обобщенной периодической задачи* (1)*,* (4) *такое, что* $y(0) \in U \cap DomL$*.*

Доказательство. Из Теоремы (3.4) работы [3] вытекает, что

$$deg(L, P_T, \overline{U}) \neq 0$$

и утверждение следует из Теоремы 6. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Аль-Обаиди Дж. Топологическая степень для псевдоациклических многозначных векторных полей / Дж. Аль-Обаиди // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 95–110.

[2] Аль-Обаиди Дж. Топологическая степень для одного класса некомпактных мультиполей в локально выпуклых пространствах / Дж. Аль-Обаиди, В.В. Обуховский // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 3. — С. 88–98.

[3] Аль-Обаиди Дж. Топологическая степень совпадения фредгольмовых операторов и псевдоациклических многозначных отображений / Дж. Аль-Обаиди, В.В. Обуховский // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и Технические науки. — 2014. — № 6. — С. 1771–1783.

[4] Меры некомпактности и уплотняющие операторы / Р.Р. Ахмеров, М.И. Каменский, А.С. Потапов и др. — Новосибирск: Наука, 1986. — 264 с.

[5] Топологические методы в теории неподвижных точек многозначных отображений / Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский // Успехи математических наук. — 1980. — Т. 35, № 1. — С. 59–126.

[6] Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский. — М.: Либроком, 2011. — 226 с.

[7] Engel K.-J. A Short Course on Operator Semigroups / K.-J. Engel, R. Nagel. — Berlin: Springer, 2006. — 250 p.

[8] Kamenskii M. Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca. — De Gruyter Series in Nonlinear Analysis 7, Berlin - New York, Walter de Gruyter, 2001. — 231 p.

[9] Mawhin J. Topological Degree Methods in Nonlinear Boundary Value Problems / J. Mawhin. — Expository lectures from the CBMS Regional Conference held at Harvey Mudd College, Glaremont, Calif., June 9–15, 1977. CBMS Regional Conference in Mathematics, 40. American Mathemaical Society, Providence, R.I., 1977. — 53 p.

REFERENCES

[1] Al-Obaidi J. Topological degree for pseudo-acyclic multivalued vector fields. [Al'-Obaidi Dzh. Topologicheskaya stepen' dlya psevdoaciklicheskix mnogoznachnyx vektornyx polej]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, № 2, pp. 95–110.

[2] Al-Obaidi J., Obukhovskii V.V. Topological degree for a class of non-compact multifields in locally convex spaces. [Al'-Obaidi Dzh., Obuxovskij V.V. Topologicheskaya stepen' dlya odnogo

klassa nekompaktnyx mul'tipolej v lokal'no vypuklyx prostranstvax]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 3, pp. 88–98.

[3] Al-Obaidi J., Obukhovskii V.V. Topological coincidence degree of Fredholm operators and pseudo-acyclic multivalued maps. [Al'-Obaidi Dzh., Obuxovskij V.V. Topologicheskaya stepen' sovpadeniya fredgol'movyx operatorov i psevdoaciklicheskix mnogoznachnyx otobrazhenij]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennye i texnicheskie nauki — Tambov University Reports. Series: Natural and Technical sciences*, 2014, no. 6, pp. 1771–1783.

[4] Akhmerov R.R., Kamenskii M.I, Potapov A.S. et. al. Measures of noncompactness and condensing operators. [Axmerov R.R., Kamenskij M.I., Potapov A.S. i dr. Mery nekompaktnosti i uplotnyayushhie operatory]. Novosibirsk: Nauka, 1986, 264 p.

[5] Borisovich Yu.G., Gelman B.D., Myshkis A.D., Obukhovskii V.V. Topological methods in the fixed point theory of multivalued maps. [Borisovich Yu.G., Gel'man B.D., Myshkis A.D., Obuxovskij V.V. Topologicheskie metody v teorii nepodvizhnyx tochek mnogoznachnyx otobrazhenij]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 1980, vol. 35, no. 1, pp. 59–126.

[6] Borisovich Yu.G., Gelman B.D., Myshkis A.D., Obukhovskii V.V. Introduction to the theory of multivalued maps and differential inclusions. [Borisovich Yu.G., Gel'man B.D., Myshkis A.D., Obuxovskij V.V. Vvedenie v teoriyu mnogoznachnyx otobrazhenij i differencial'nyx vklyuchenij]. Moscow: Librocom, 2011, 226 p.

[7] Engel K.-J., Nagel R. A Short Course on Operator Semigroups. Berlin: Springer, 2006, 250 p.

[8] Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P. Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces, De Gruyter Series in Nonlinear Analysis 7, Berlin - New York, Walter de Gruyter, 2001, 231 p.

[9] Mawhin J. Nopological Degree Methods in Nonlinear Boundary Value Problems, Expository lectures from the CBMS Regional Conference held at Harvey Mudd College, Glaremont, Calif., June 9-15, 1977. CBMS Regional Conference in Mathematics, 40. American Mathemaical Society, Providence, R.I., 1977, 53 p.

Джамхур Аль-Обаиди, аспирант кафедры высшей математики Воронежского Государственного Педагогического Университета, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: alobadi@mail.ru
Тел.: +7–(950)–776–15–64

J.M. Al-Obaidi, Post-graduate student of the chair of higher mathematics of the Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: alobadi@mail.ru
Tel.: +7–(950)–776–15–64

Обуховский В.В., доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, Воронежский государственный педагогический университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: valerio-ob2000@mail.ru
Тел.: 255–36–63

Obukhovskii V., Faculty of Physics and Mathematics, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russia
E-mail: valerio-ob2000@mail.ru
Tel.: 255–36–63