

УДК 539.374; 519.6; 550.34.013.4

**ТЕЧЕНИЕ МИКРОСТРУКТУРНОГО
ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА В КОЛЬЦЕВОМ
ЗАЗОРЕ ПРИ УСЛОВИЙ КАЧЕНИЯ
ПРЕДСТАВИТЕЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА НА СТЕНКАХ**

Аль Имам А. А.

*университет г. Диалы, Ирак;
Воронежский государственный университет*

Поступила в редакцию 10.10.2014 г.

Аннотация: Исследуемое в статье уравнение продольного движения микроструктурного вязкопластического материала в кольцевом зазоре под действием перепада давления является обыкновенным дифференциальным уравнением 4-го порядка с малым параметром при старшей производной. Малый параметр характеризует относительный размер представительного элемента и при его отсутствии уравнение описывает движение вязкой жидкости. Граничные условия полного прилипания представительного элемента к стенкам зазора или условия качения представительного элемента к границе не допускают как твёрдого ядра течения так и застойных зон у стенок зазора. Численный анализ течения методом показал: а) В случае прилипания возмущений материала течения к стенкам уменьшение зазора ведёт к уменьшению скорости течения. в) В случае качения представительного элемента вдоль границы имеет место проскальзывание вдоль границы при этом максимум скорости течения достигается не внутри области течения, а на внешней границе щели.

Ключевые слова: Микроструктура, вязкопластичность, скольжение, слоистость.

**Al-Imam Adel A
FEATURES LONGITUDINAL FLOW OF
VISCOPLASTIC MATERIAL TAKING INTO ACCOUNT
ITS MICROSTRUCTURE IN THE ANNULUS**

Abstract: in this paper show that equation of the longitudinal movement which for a microstructural viscoplastic material in a ring gap under a pressure difference is ordinary differential equation 4-s order with small parameter characterize in the highest derivatives. Small parameter characterizes the relative size of the representative element and in his absence the equation describes the motion of a viscous fluid. The boundary conditions of full sticking to the walls of the representative element of the gap or the rolling conditions of the representative element to the border do not allow a solid core flow and stagnant zones near the walls of the gap. Numerical analysis of flow small parameter method showed: a) In the case of the flow of material sticking to the walls and reduction of the gap leads to a decrease in the flow velocity. b) In case of r representative element along the boundary sliding occurs along the boundary with the maximum flow rate is achieved not within a region of flow but at the outer edge of the gap.

Keywords: microstructure, stationary place of flow, viscoplasticity, annulus.

ВВЕДЕНИЕ

Продольное течение различного рода технических материалов в кольцевых зазорах под действием перепада давлений достаточно широко распространено в нефтехимической промышленности, технологических процессах строительных материалов, в работе машин и механизмов. Свойства сложных материалов определяются свойствами жидкости, внесенного в жидкость наполнителя, что проявляется в синергетическом эффекте и появлении новых эмерджентных свойств материала, которые можно объяснить влиянием характерного размера h представительного объема $\Delta V = h^3$, вязкостью пластичностью таких материалов и видом граничных условий [1].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается осесимметричное течение изучаемого материала в кольцевом зазоре (Рис. 1) под действием перепада давления $\partial p / \partial z = Const$. Поле скоростей $w(r)$ определяется обыкновенным дифференциальным уравнением 4-го порядка, учитывающем вязкость материала и характерный размер $\delta = h / R_o$ микроструктуры [2]

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\delta^2}{12} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right) \right) + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right) \right] = -q^2, \quad (1)$$

здесь: $\xi = r / R_o$; $w = \nu / V_o$; $\delta = h / R_o$; $q^2 = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{R_o^2}{V_o}$; r — радиальная координата; R_o — радиус внешнего контура цилиндрической цели; V_o — характерная скорость течения; μ — коэффициент вязкости.

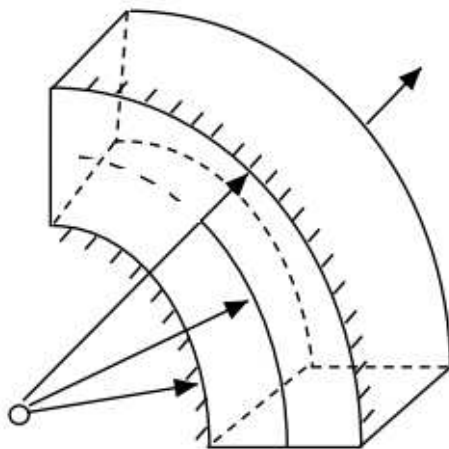


Рис. 1. Схематическое изображение цилиндрического зазора с выделением границы $r = r^v$ застойной зоны, гипотетически примыкающей к внутренней $\nu = R^-$ или внешней R_o границам зазора.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ЗАЗОРЕ ПРИ УСЛОВИИ ПОЛНОГО ПРИЛИПАНИЯ МАТЕРИАЛА К СТЕНКАМ

Точное решение сингулярно возмущенного за счет малого параметра δ линейного обыкновенного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами (1) построить не

удается, поэтому воспользуемся методом малого параметра [3], [4]. Представим решение для скорости $w(\xi, \delta)$ в виде ряда по параметру δ и ограничимся членами порядка δ^2 не выше

$$w(\xi, \delta) = w^0(\xi) + \delta^2 w^1(\xi) + \dots \quad (2)$$

Уравнение (1) для члена $w^0(\xi)$ ряда (2) упрощается

$$\frac{d^2 w^0}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dw^0}{d\xi} = -q^2. \quad (3)$$

Решение уравнения (3) имеет вид

$$w^0(\xi) = -\frac{q^2}{4} \cdot \xi^2 + C_1 \ln \xi + C_2. \quad (4)$$

Выбор граничных условий прилипания материала к границам $\xi = 1$ или возможном 2-м случае течения к границе $\xi = \xi^-$ и условий на границе застойной зоны $\xi = \xi^v$ приводит к невозможности течения, невозможности существования границы ядра течения в области течения.

В самом деле, в случае возможности 1-го варианта течения при граничных условиях прилипания для определения постоянных C_1, C_2 и границ застойной зоны ξ^v , получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} -\frac{q^2}{4} + C_2 &= 0; \\ -\left(\frac{q^2}{4}\right) \xi^v + C_1 \ln \xi^v + C_2 &= 0; \\ -\frac{q^2}{2} \xi^v + \frac{C_1}{\xi^v} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Из (5) следует, что: $C_2 = q^2/4$; $C_1 = \frac{q^2}{2} \xi^v$, а граница застойной зоны $\xi = \xi^v$ определяется из уравнения $\Phi(\xi) = \xi^v (2 \ln \xi^v - 1) + 1 = 0$. Графическое исследование (Рис. 2) решения этого уравнения показывает, что оно имеет единственное точное решение $\xi^v = 1$, что соответствует застойной зоне, занимающей всю область течения $\xi \in [\xi^-, \xi^+]$, где $\xi^+ = 1$, т.е. течение в щели при таком выборе граничных условий отсутствует.

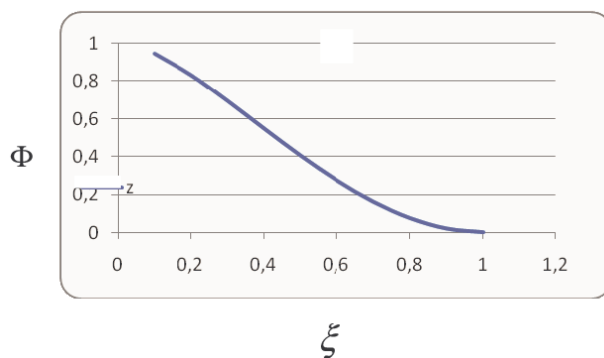


Рис. 2. Графическое представление решения уравнения $\Phi\left(\xi^v\right) = 0$ для нахождения радиуса $\xi = \xi^v$ застойной зоны.

Аналогичные исследования гипотезы прилипания застойной зоны к внешней границе цилиндрической щели, показывают невозможность такой ситуации, т.е. невозможность гипотетического течения с образованием застойных зон у стенок зазора.

Таким образом, в условиях прилипания материала к стенкам цилиндрической щели возможно течение только без образования застойных зон (в нулевом приближении разложения $w(\xi, \delta)$ в степенной ряд) и распределение скорости $w^0(\xi)$ имеет вид

$$w^0(\xi) = \frac{q^2}{4} \left(1 - \xi^2 - (1 - \bar{\xi}^2) \frac{\ln \xi}{\ln \bar{\xi}} \right) \quad (6)$$

$$w^0(1) = 0; \quad w^0(\bar{\xi}) = 0.$$

График распределения скорости $w^0(\xi)/\frac{q^2}{4}$ приведен на Рис. 3.

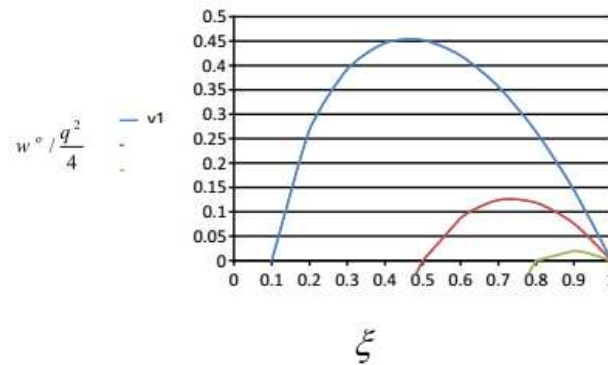


Рис. 3. Графическое изображение распределения относительной скорости течения вязкопластического материала в цилиндрическом щелевом зазоре $\xi \in [\bar{\xi}; 1]$ в условиях полного прилипания материала к стенкам $\frac{w^0(\xi)}{q^2/4} = 1 - \xi^2 - (1 - \bar{\xi}^2) \frac{\lg \xi}{\lg \bar{\xi}}$, для $\bar{\xi} \in [0, 1; 0, 5; 0, 9]$.

ТЕЧЕНИЕ МИКРОСТРУКТУРНОГО ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА ПРИ УСЛОВИИ КАЧЕНИЯ ПРЕДСТАВИТЕЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА ВДОЛЬ ГРАНИЦЫ

Рассмотрим возможность течения материала в цилиндрическом зазоре с образованием застойной зоны $\xi = \xi^*$ вблизи внутренней границы $\xi = \bar{\xi}$. Скорость $w(\xi)$ в области определяется формулой (4) в нулевом приближении разложения в ряд по параметру δ . Граничные условия представим как условие качения представительного элемента у стенки и условие покоя зоны застоя ($\xi \in [\bar{\xi}; \xi^*]$) и условие непрерывности скорости $w(\xi)$ на границе $\xi = \xi^*$ зоны застоя

$$w(\xi) = -\frac{q^2}{4}\xi^2 + c_1 \ln \xi + c_2; \quad w(\xi^*) = 0; \quad w'(\xi^*) = 0; \quad w(1) - jw'(1) = 0. \quad (7)$$

Система граничных условий для определения c_1, c_2 и ξ^* приводит к одному уравнению для радиуса ξ^* границы зоны застоя

$$\varphi(\xi^*) = (1 - 2\gamma) \left(1 - \xi^{*2} \right) + 2\xi^{*2} \ln \xi^* = 0. \quad (8)$$

В области $\xi^* \leq 1$ уравнение (8) имеет единственное решение $\xi^* = 0$ что означает заполнение застойной зоной всей области возможного течения. Таким образом течение материала с возможной зоной застоя у внутренней границы $\xi = \bar{\xi}$ невозможно.

Исследуем течение материала с образованием зоны застоя у внешней границы цилиндрического зазора. Граничные условия примут вид

$$w(\tilde{\xi}) = 0; \quad w'(\tilde{\xi}) = 0; \quad w(\bar{\xi}) + \gamma w'(\bar{\xi}) = 0. \quad (9)$$

Система уравнений (9) для постоянных C_1 , C_2 и радиуса $\bar{\xi}$ застойной зоны имеет вид

$$\begin{aligned} -\frac{q^2}{2}\bar{\xi} + \frac{c_1}{\bar{\xi}} &= 0; & -\frac{q^2}{2}\bar{\xi}^2 + c_1 \ln \bar{\xi} + c_2 &= 0; \\ -\frac{q^2}{4}\bar{\xi}^2 + c_1 \ln \bar{\xi} + c_2 - \frac{q^2}{2}\bar{\xi} \cdot \gamma + \gamma \frac{c_1}{\bar{\xi}} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Система уравнений (10) не имеет положительного решения для $\bar{\xi}$, так что течение с жесткой зоной у внешней границы зазора невозможно, в самом деле для $\bar{\xi} = \bar{\xi}(1 + \Delta)$ получим уравнение

$$2(1 + \Delta)\Delta - (1 + \Delta)^2 \ln(1 + \Delta) + \frac{\gamma}{\bar{\xi}}(2 + \Delta)\Delta = 0. \quad (11)$$

для малых Δ уравнение (11) упрощается

$$\frac{\Delta^3}{2} + \Delta \left(\frac{1}{2} + \bar{\gamma} \right) + 1 + 2\bar{\gamma} = 0. \quad (12)$$

Для $\Delta > 0$ уравнение (12) не имеет решений.

Анализ возможного течения материала с ядром течения показал его невозможность.

Рассмотрим течение без образования жестких зон. Граничных условия примем в виде (качение представительного объема вдоль стенок)

$$w(1) - \gamma w'(1) = 0; \quad w'(\bar{\xi}) + \gamma w'(\bar{\xi}) = 0. \quad (13)$$

Постоянные интегрирования C_1 , C_2 уравнения (3) в выражении для скорости течения $w'(\xi)$ находятся из (13)

$$w(\xi) = -\frac{q^2}{4}(\xi^2 - c_1 \ln \xi - c_2) \quad (14)$$

Здесь $c_1 = \frac{1 - 2\gamma + 2\gamma\bar{\xi} - \bar{\xi}^2}{\gamma/\bar{\xi} - \gamma - \ln \bar{\xi}} < 0$;

$$c_2 = -\frac{-\ln \bar{\xi} + \frac{\gamma}{\bar{\xi}} - 2\gamma + 2\gamma^2 - 2\gamma^2\bar{\xi} + \gamma\bar{\xi}^2}{\gamma/\bar{\xi} - \gamma - \ln \bar{\xi}} < 0. \quad (15)$$

Течение в соответствии с выражением (15) для скорости $w(\xi)$ обладает свойством проскальзывания вдоль стенок зазора $\xi = 1$ и $\xi = \bar{\xi} < 1$, причем $w(1) \approx q^2/2$; $w(\bar{\xi}) \approx \frac{q^2}{2}$; $w((1 + \bar{\xi})/2) \approx \frac{3}{4}q^2$.

На графиках Рис. 4 представлена скорость как функция точек ξ , $\bar{\xi}$ для различных значений параметра микроструктуры $\gamma \in [0, 1; 0, 2]$. Из физических соображений имеет смысл рассматривать скорость w только в области течения при $1 \geq \xi \geq \bar{\xi}$. Из графиков $w(\xi)$ следует, что с увеличением $\bar{\xi} < 1$ скорость течения материала в зазоре увеличивается, при этом имеет место рост скорости проскальзывания на внешней границе зазора $\bar{\xi} = 1$, возникает ощущение как бы затвердевания материала, увеличивающееся с ростом микроструктурного параметра γ .

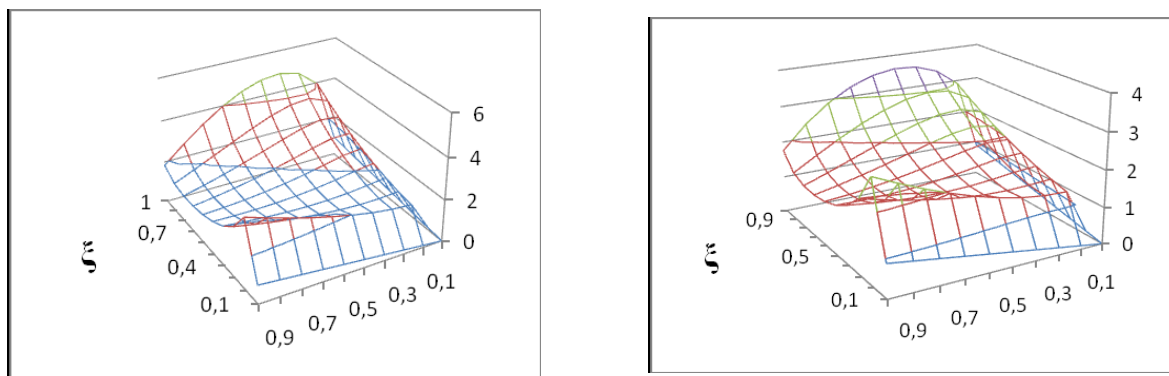


Рис. 4. Графическое компьютерное представление поведения скорости $w(\xi)$ течения материала в зазоре шириной $[1 - \xi]$ в зависимости от параметра микроструктура γ

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ивлев Д.Д. Механика пластических сред. Т. 2 / Д.Д. Ивлев. — М: Физматлит, 2001. — 448 с.
- [2] Лодж А.С. Эластичные жидкости / А.С. Лодж. — М.: Наука, 1969. — 464 с.
- [3] Течение и деформирование материалов однородной микроструктуры / М.И. Быкова, Н.Д. Вервейко, П.П. Сумец, С.А. Шашкина. — Воронеж: Изд. ВГУ, 2010. — 192 с.
- [4] Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости / М. Ван-Дайк. — М: Мир, 1967. — 310 с.
- [5] Коул Дж. Метод возмущений в прикладной математике / Дж. Коул. — М.: Мир, 1972. — 274 с.

REFERENCES

- [1] Ivlev D.D. Mechanics of plastic media. V.2. [Ivlev D.D. Mexanika plasticheskix sred. T. 2]. Moscow: FIZMATLIT, 2001, 448 p.
- [2] Lodge A.S. Elastic liquids. [Lodzh A.S. E'lastichnye zhidkosti]. Moscow: NAUKA, 1969, 464 p.
- [3] Bykova M.I., Vervejko N.D., Sumets P.P., Shashkina S.A. Flow and deformation of materials and uniform microstructure. [Bykova M.I., Vervejko N.D., Sumec P.P., Shashkina S.A. Tечenie i deformirovanie materialov odnorodnoj mikrostruktury]. Voronezh: Voronezh State University, 2010, 192 p.
- [4] Van Dyke M. Perturbation methods in fluid mechanics. [Van-Dajk M. Metody vozmushhenij v mexanike zhidkosti]. Moscow: Mir, 1967, 310 p.
- [5] Cole J. Perturbation method in applied mathematics. [Koul Dzh. Metod vozmushhenij v prikladnoj matematike]. Moscow: Mir, 1972, 274 p.

Аль Имам Адель А., преподаватель университета г. Диалы, Ирак; Аспирант кафедры теоретической и прикладной механики ВГУ, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: adelpro76@yahoo.com

Al-Imam Adel A, teacher at the University of Diyala, Iraq; PhD student, Department of Theoretical and Applied Mechanics VSU, Voronezh, Russian Federation
E-mail: adelpro76@yahoo.com