УДК 621.391

ЭФФЕКТИВНОСТЬ ОЦЕНКИ ВРЕМЕННОГО ПОЛОЖЕНИЯ СВЕРХКОРОТКОГО СИГНАЛА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АЛГОРИТМА, ОСНОВАННОГО НА ТЕОРИИ COMPRESSIVE SENSING

В. И. Парфенов, Д. Ю. Голованов

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 16.12.2014 г.

Аннотация: в статье предложен алгоритм оценки временного положения сверхкороткого сигнала, принимаемого на фоне аддитивного белого гауссовского шума. С целью уменьшения количества операций, выполняемых в устройстве оценивания, классический алгоритм оценки был модифицирован в соответствии с теорией Compressive Sensing. На основе проведенного статистического моделирования получены ряд зависимостей характеристик оценки, таких как смещение и рассеяние, от ряда параметров. Проведено сравнение точности оценки для предлагаемого алгоритма и классического алгоритма максимального правдоподобия, позволяющее определить условия его практической применимости.

Ключевые слова: Compressive Sensing, l_1-оптимизация, сверхкороткий сигнал, смещение оценки, рассеяние оценки.

EFFICIENCY OF TIME DELAY ESTIMATION OF ULTRASHORT SIGNAL USING ALGORITHM BASED ON THE THEORY OF COMPRESSIVE SENSING

V. I. Parfenov, D. Y. Golovanov

Abstract: in article the algorithm of time delay estimation of ultrashort signal received on a background of additive white gaussian noise was proposed. To reduce the quantity of operations performing in the estimation device the classical estimation algorithm was modified according to theory of Compressive Sensing. Based on statistical modeling a number of dependences of estimation characteristics, such as bias and dispersion, depending on same parameters were received. A comparison of accuracy of estimation for proposed algorithm and for classical maximum likelihood algorithm was carried out, allowing to define conditions of its practical application.

Keywords: Compressive Sensing, l_1-optimization, ultrashort signal, bias of estimation, dispersion of estimation.

ВВЕДЕНИЕ

В радиолокации, радионавигации и связи задача оценки параметров сигналов является вполне устоявшейся, рассматривалась во многих работах (см., например, [1-3] и др.) и ее решение зачастую основывается на поиске абсолютного (наибольшего) максимума некоторой достаточной статистики $L(\mathbf{l})$, зависящей от оцениваемых параметров $\mathbf{l}$. При этом оценка

$$\overset{\wedge}{\mathbf{l}} = \arg\max L(\mathbf{l}), \quad \mathbf{l} = \|l_1, ..., l_p\|, \quad l_i \in \Lambda_i, \quad i = \overline{1,p},$$

где Λ_i — априорный интервал возможных значений параметра l_i.

Практическая реализация подобных алгоритмов оценки обычно осуществляется путем дискретизации каждого из оцениваемых параметров l_i с некоторым шагом Δl_i и вычислении достаточной статистики для каждой комбинации отсчетных значений этих параметров. Устройство оценки при этом представляет собой многоканальную структуру, содержащую $N_{l_1} \cdot N_{l_2} \cdot ... \cdot N_{l_p}$ каналов, где N_{l_i} — количество отсчетов параметра l_i $(i = \overline{1,p})$.

Даже при оценивании только одного параметра $l \in [\Lambda_{\min}; \Lambda_{\max}]$, если велик априорный интервал его возможных значений $\Lambda = \Lambda_{\max} - \Lambda_{\min}$ по сравнению с шириной математического ожидания достаточной статистики (сигнальной функции [1], [4]), то количество каналов измерителя может стать излишне большим – неприемлемым для практических приложений. Рассмотрим, в качестве примера, задачу оценки временного положения $\tau \in [T_1; T_2]$ сверхкоротких импульсов [5], [6] и др. В этом случае величина априорного интервала $T_2 - T_1$ может превышать длительность сигнальной функции в сотни и тысячи раз, что приведет к непреодолимым техническим сложностям при реализации алгоритма оценки многоканальным способом. Очевидно, во многих случаях число этих каналов может быть чрезвычайно большим, что существенно увеличивает нагрузку на вычислительные устройства, осложняет процесс их реализации, увеличивает время вынесения решения.

Все перечисленное свидетельствует о том, что в современных системах передачи и обработки информации проблемы обработки, хранения и передачи больших объемов информации выходят на первый план.

МЕТОД ТРАНСФОРМИРУЮЩЕГО КОДИРОВАНИЯ. COMPRESSIVE SENSING

Как уже отмечалось ранее, обработка больших объемов информации зачастую сопровождается существенным усложнением, а, следовательно, и удорожанием устройств обработки, для предотвращения чего требуется осуществлять сжатие данных. Как известно, традиционный подход к сжатию информации основан на том, что многие сигналы могут иметь разреженное или сжатое представление в соответствующем базисе (например, Фурье, вейвлет-базисе и др.). Этот подход получил название трансформирующего кодирования и заключается он в том, что сначала вычисляются коэффициенты преобразования исходного сигнала в базисе, обеспечивающем его сжатое представление, а затем сохраняется или передается лишь небольшое число его наибольших по величине коэффициентов вместе с номерами их позиций в векторе коэффициентов разложения. Такие способы кодирования имеют ряд недостатков. Во-первых, начальный размер выборки может быть чрезвычайно большим, даже если размер получаемого набора коэффициентов значительно меньше исходного. Во-вторых, все коэффициенты преобразования должны быть вычислены даже при том, что от большинства из них (кроме самых больших) откажутся. И, в-третьих, дополнительно должны быть закодированы позиции всех выбранных компонент [7].

Однако в последние несколько лет активно развивается новая область получения и обработки информации, получившая в англоязычной литературе название *Compressive Sensing*, *Compressive Sampling* или *Sparse recovery*. Согласно этой теории сигналы, имеющие разреженное или сжатое представление в некотором базисе, могут быть точно или приближенно восстановлены по своим линейным проекциям, причем число этих проекций может быть значительно меньше размерности исходного сигнала.

Рассмотрим основы этой теории. Пусть имеется дискретный сигнал, который может быть представлен вектором $\mathbf{x} \in R^N$ размера $N \times 1$. Любой сигнал в R^N может быть выражен в некотором базисе, образованном векторами $\{\boldsymbol{\psi}_i\}_{i=1}^N$, каждый из которых имеет размер $N \times 1$. Используя $N \times N$ базисную матрицу Ψ со столбцами, образованными этими векторами, сигнал

$\mathbf{x}$ может быть выражен как $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{N} c_i \boldsymbol{\psi}_i$ или в матричной форме:

$$\mathbf{x} = \Psi \mathbf{c}, \tag{1}$$

где $\mathbf{c}$–$N \times 1$ вектор-столбец коэффициентов $c_i = \langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}_i \rangle = \boldsymbol{\psi}_i^T \mathbf{x}$, где "$T$" — операция транспонирования, угловыми скобками обозначено скалярное произведение векторов.

Сигнал $\mathbf{x}$ называется s-разреженным, если он является линейной комбинацией только s базисных векторов, т.е только s компонент c_i в (1) отличны от нуля ($\|\mathbf{x}\|_0 \leqslant s$, где норма $\|\mathbf{x}\|_0$ определяет количество ненулевых компонент вектора $\mathbf{x}$), а остальные $(N - s)$ равны нулю [7]. Следует отметить, что для вектора $\mathbf{x}$ уже изначально может быть справедливо условие $\|\mathbf{x}\|_0 \leqslant s$, т.е. он может быть сразу разреженным без представления его в соответствующем базисе, однако здесь рассмотрен более общий случай. Наряду с определением s-разреженных сигналов введем определение сжимаемых сигналов, наиболее часто встречающихся на практике. Сигнал $\mathbf{x}$ называется сжимаемым, если у него есть представление в виде формулы (1), в которой только несколько компонент c_i достаточно велики, а остальные относительно малы. Такие сигналы могут быть аппроксимированы разреженными сигналами, что лежит в основе трансформирующего кодирования, применяемого, например, в таких известных алгоритмах как JPEG, MPEG или MP3.

Недостатки, присущие традиционным способам кодирования, могут быть устранены в рамках теории *Compressive Sensing* за счет непосредственного представления сигнала в сжатой форме без промежуточного этапа получения N отсчетов сигнала [7]. Рассмотрим линейный процесс измерения, в результате которого вычисляются $M < N$ скалярных произведений вектора $\mathbf{x}$ и векторов $\{\boldsymbol{\varphi}_j\}_{j=1}^{M}$, как $y_j = \langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\varphi}_j \rangle$. Если значения y_j представить в виде $M \times 1$ вектора, а $\boldsymbol{\varphi}_j^T$ записать в качестве рядов $M \times N$ матрицы Φ, то в матричном виде линейный процесс измерения может быть записан как

$$\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} = \Phi \Psi \mathbf{c} = \Theta \mathbf{c}, \tag{2}$$

где $\Theta = \Phi\Psi$ — матрица размера $M \times N$. Задача состоит в том, чтобы восстановить вектор $\mathbf{c}$ по совокупности его линейных измерений, то есть по вектору $\mathbf{y}$. Так как $M < N$, система уравнений (2) является недоопределенной, а, следовательно, имеет бесконечное множество решений. То есть однозначно восстановить вектор $\mathbf{c}$ без дополнительной информации невозможно. Однако, если учесть, что восстанавливаемый сигнал является разреженным или сжимаемым, то при определенных условиях это становится возможным. По сути, сформулированная выше задача и есть стандартная задача *Compressive Sensing (CS)* [7]. Практический интерес в рамках этой теории представляет случай $M << N$. Важно подчеркнуть, что процесс измерения (получения вектора $\mathbf{y}$) в *CS* обычно не производится отдельно, а является частью физического процесса получения данных, что позволяет не затрачивать лишних вычислительных мощностей и экономить энергию в устройствах-сенсорах. В теории *CS* фактически решаются 2 задачи, которые не являются полностью независимыми друг от друга [7]:

1) проектирование такой универсальной матрицы измерений Φ, что существенная информация о любом s-разреженном (или сжимаемом) сигнале не будет повреждена при сокращении размерности от $\mathbf{x} \in R^N$ к $\mathbf{y} \in R^M$, где $M < N$.

2) проектирование алгоритма восстановления сигнала $\mathbf{x}$ (или коэффициентов $\mathbf{c}$, а по ним и сигнала $\mathbf{x}$, если сигнал разрежен в некотором базисе Ψ) по $M \sim s$ измерениям (или по примерно такому же числу измерений, как передаваемое число коэффициентов при традиционном трансформирующем кодировании).

Система уравнений (2) для s-разреженного сигнала $\mathbf{x}$ в случае, когда местоположения s отличных от нуля компонент известны, может быть решена при условии $M \geqslant s$. Необходимым и достаточным условием того, чтобы эта задача была хорошо обусловленной, является то, что для любого вектора $\mathbf{u}$, у которого имеются те же s ненулевых компонент, что и в $\mathbf{c}$, и для некоторого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство [7]:

$$1 - \varepsilon \leqslant \frac{\|\Theta \mathbf{u}\|_2}{\|\mathbf{u}\|_2} \leqslant 1 + \varepsilon. \tag{3}$$

Здесь l_p норма вектора $\mathbf{c}$ понимается традиционным способом [8]:

$$\|\mathbf{c}\|_p = \begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{N} |c_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, p \in [0, \infty); \\ \max\limits_{i=1,2,\dots,N} |c_i|, p = \infty. \end{cases}$$

В общем случае местоположения s отличных от нуля компонент в векторе $\mathbf{c}$ неизвестны, однако выполнение условия (3) для произвольных $2s$-разреженных векторов $\mathbf{u}$ является достаточным для обеспечения возможности стабильного решения задачи для любого s-разреженного вектора $\mathbf{c}$ [7]. В литературе по CS чаще используется другое условие, называемое свойством ограниченной изометрии (Restricted Isometry Property или RIP) [8]: матрица Θ размерности $M \times N$ удовлетворяет свойству $RIP(\delta, M)$ с параметрами $\delta \in (0, 1)$ и $M \in \mathrm{N}$, если для любого ненулевого M-разреженного вектора $\mathbf{u}$ выполняется условие

$$\sqrt{1-\delta} \leqslant \frac{\|\Theta \mathbf{u}\|_2}{\|\mathbf{u}\|_2} \leqslant \sqrt{1+\delta}, \tag{4}$$

где под N понимается множество натуральных чисел. Для восстановления s-разреженного сигнала при наблюдении $\mathbf{y}$ с помехами или сжимаемого сигнала, достаточным является выполнение условий (3) и (4) для произвольного $3s$-разреженного вектора $\mathbf{u}$ [7]. Наряду со свойствами типа RIP в CS используется условие малости взаимной зависимости $ch(\Phi, \Psi)$ строк матрицы Φ и столбцов матрицы Ψ,

$$ch(\Phi, \Psi) = \sqrt{N} \max_{i,j} \frac{|\langle \boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{\psi}_j \rangle|}{\|\boldsymbol{\varphi}_i\|_2},$$

называемое некогерентностью Φ и Ψ [9]. Выполнение этого условия требует, чтобы строки матрицы Φ не могли редко представлять столбцы Ψ и наоборот.

Прямое построение матрицы измерений Φ такой, чтобы $\Theta = \Phi\Psi$ обладала свойством RIP, требует проверки выполнения условия (4) для каждой из $\frac{N!}{s!(N-s)!}$ возможных комбинаций положений s отличных от нуля компонент в векторе $\mathbf{u}$ длины N. Однако свойство RIP и некогерентность могут быть достигнуты с большой вероятностью за счет выбора случайной матрицы в качестве Φ, то есть за счет рандомизации процесса измерения. При этом вектор результатов измерений представляет собой набор M различных линейных комбинаций компонент вектора $\mathbf{x}$ со случайно выбранными весами [7]–[9].

В общем случае, как отмечается в [8], для того, чтобы матрица удовлетворяла свойству RIP, на распределение случайных величин, выступающих элементами матрицы, необходимо наложить 2 условия:

1) Математическое ожидание квадрата случайной величины $\varphi_{i,j}$, т.е. $M\left[\varphi_{i,j}^2\right] = \frac{1}{M}$ и, следовательно, дисперсия $D\left[\varphi_{i,j}\right] = \frac{1}{M}$;

2) Распределение должно быть субгауссовским, что означает существование константы $C > 0$, такой, что $M\left[\exp(\varphi_{i,j} t)\right] \leqslant \exp\left(\frac{C^2 t^2}{2}\right)$ для всех $t \in R$.

Примером субгауссовского распределения является, например, нормальное распределение, распределение Бернулли и др.

Если в качестве элементов матрицы Φ размерности $M \times N$ взять независимые и одинаково распределенные нормальные случайные величины с одинаковыми нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями $\frac{1}{M}$, то для таких матриц справедливо, во-первых, то, что они с высокой вероятностью удовлетворяют свойству RIP при $M \geqslant Cs\log(N/s)$ с малой константой C. Следовательно, s-разреженные и сжимаемые сигналы длины N могут быть восстановлены по $M << N$ случайным измерениям с высокой вероятностью. А во-вторых, матрица Φ является универсальной, в том смысле что $\Theta = \Phi\Psi$ также будет матрицей с нормально распределенными элементами и будет обладать свойством RIP с высокой вероятностью, независимо от выбора ортонормированного базиса Ψ [7]. В *CS* используются и другие матрицы измерений, например матрицы Бернулли, с независимыми и одинаково распределенными элементами, которые принимают значения $\pm\frac{1}{\sqrt{M}}$ с вероятностью 0.5.

Алгоритм восстановления сигнала должен на основании вектора M измерений $\mathbf{y}$, матрицы Φ размера $M \times N$ (или в случае случайного характера ее формирования зная закон, в соответствие с которым она была сгенерирована), а также базиса Ψ восстановить сигнал $\mathbf{x}$ длины N или разреженный вектор коэффициентов $\mathbf{c}$ при условии, что $M < N$ [7].

Классический подход к решению обратных задач этого типа заключается в нахождении вектора с минимальной l_2 нормой (энергией) в сдвинутом нулевом подпространстве [10]:

$$\overset{\wedge}{\mathbf{c}} = \arg\min_{\mathbf{w}} \|\mathbf{w}\|_2\,, \text{ при условии, что } \Theta\mathbf{w} = \mathbf{y}.$$

Решение этой оптимизационной задачи может быть записано в форме метода наименьших квадратов как $\overset{\wedge}{\mathbf{c}} = \Theta^T\left(\Theta\Theta^T\right)^{-1}\mathbf{y}$. Решение почти никогда не будет s-разреженным вектором, а будет содержать много отличных от нуля элементов, так как l_2 норма измеряет энергию сигнала, а не его разреженность. Решить задачу можно также посредством минимизации l_0 нормы, которая подсчитывает количество ненулевых компонент в векторе, то есть [10]

$$\overset{\wedge}{\mathbf{c}} = \arg\min_{\mathbf{w}} \|\mathbf{w}\|_0\,, \text{ при условии, что } \Theta\mathbf{w} = \mathbf{y}.$$

Однако задача оптимизации l_0 нормы невыпуклая и относится к комбинаторному типу, вычислительные процедуры по ее решению являются численно неустойчивыми и NP-сложными, требующими перебора всех $\frac{N!}{s!(N-s)!}$ возможных вариантов размещения ненулевых элементов в векторе $\mathbf{c}$. Наиболее эффективно задачу CS можно решить посредством минимизации l_1 нормы [7]–[10]:

$$\overset{\wedge}{\mathbf{c}} = \arg\min_{\mathbf{w}} \|\mathbf{w}\|_1\,, \text{ при условии, что } \Theta\mathbf{w} = \mathbf{y}. \tag{5}$$

Это задача выпуклой оптимизации, поскольку норма $\|\|_1$ является выпуклой функцией, которая может быть сведена к задаче линейного программирования, известной как выбор базиса (basis pursuit).

В настоящее время существует множество методов решения задачи (5). Одними из самых быстрых алгоритмов восстановления являются так называемые "грубые" алгоритмы (greedy algorithms). К ним относятся, например, Matching Pursuit (MP) [11], Orthogonal Matching Pursuit (OMP) [12], Compressive Sensing Matching Pursuit (CoSaMP) [13] и другие.

ОЦЕНКА ВРЕМЕННОГО ПОЛОЖЕНИЯ СВЕРХКОРОТКОГО СИГНАЛА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АЛГОРИТМА COMRESSIVE SENSING

Рассмотрим задачу оценки временного положения τ_0 детерминированного сверхкороткого сигнала $s(t, \tau_0)$, наблюдаемого на фоне белого гауссовского шума, так что входное колебание может быть представлено в виде

$$x(t) = s(t, \tau_0) + n(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{6}$$

где $n(t)$ – белый гауссовский шум с односторонней спектральной плотностью мощности N_0, а T – время наблюдения. Оценка максимального правдоподобия τ_m неизвестного параметра τ_0 сигнала $s(t, \tau_0)$ находится как положение абсолютного максимума логарифма функционала отношения правдоподобия (ЛФОП), который для данной задачи может быть записан как [1]

$$L(\tau) = \frac{2}{N_0} \int\limits_0^T x(t) \cdot s(t, \tau) dt - \frac{1}{N_0} \int\limits_0^T s^2(t, \tau) dt.$$

С учетом того, что параметр τ является неэнергетическим, достаточная статистика равна

$$\widetilde{L}(\tau) = \int\limits_0^T x(t) \cdot s(t, \tau) dt. \tag{7}$$

При дискретной обработке вместо непрерывной реализации (6) необходимо использовать отсчеты:

$$x_i = s0_i + n_i, \quad i = \overline{0, N_t - 1},$$

где $s0_i = s(t_i, \tau_0)$ – отсчеты полезного сигнала при $\tau = \tau_0$, взятые с шагом Δt,N_t – их количество, n_i – отсчеты белого гауссовского шума. Тогда (7) с точностью до постоянного множителя Δt можно записать в виде

$$L(\tau) = \sum_{i=0}^{N_t - 1} x_i \cdot s_i(\tau), \tag{8}$$

где $s_i(\tau) = s(t_i, \tau)$. Далее, разобьем априорный интервал неизвестного параметра $\tau \in [T_1, T_2]$ на подынтервалы с шагом $\Delta \tau$, а получаемое количество отсчетов обозначим N_τ. Запишем выражение (8) в матричном виде

$$\mathbf{L} = \mathrm{S}^T \mathbf{x}, \tag{9}$$

где $\mathbf{L}$ – $N_\tau \times 1$ вектор отчетов достаточной статистики, $\mathbf{x}$ – $N_t \times 1$ вектор отсчетов реализации, S – матрица размера $N_t \times N_\tau$, элементы которой $s_{i,j} = s(t_i, \tau_j)$, $i = \overline{0, N_t - 1}$, $j = \overline{0, N_\tau - 1}$.

Для того чтобы найти оценку τ_m, необходимо сформировать статистику (9) для каждого из значений τ_j, $j = \overline{0, N_\tau - 1}$ из априорного интервала. Количество отсчетов N_t и N_τ может быть достаточно большим. При этом количество операций умножения для формирования всех N_τ отсчетов вектора $\mathbf{L}$ равно $N_t \times N_\tau$, что также очень велико. В данной работе с целью уменьшения нагрузки на устройство, формирующее отсчеты достаточной статистики, по положению максимального из которых будет вынесена в конечном итоге оценка, предлагается следующий алгоритм, который в дальнейшем будем называть алгоритмом CS:

1) Пропустить реализацию x_i через пороговое устройство с некоторым порогом h с целью ее прореживания, так что

$$v_i = \begin{cases} x_i, \text{если } x_i \geqslant h; \\ 0, \text{ если } x_i < h; \end{cases} \quad i = \overline{0, N_t - 1}.$$

Значение порога h задается следующим образом: сначала выбирается некоторое начальное значение h_0 так, что вероятность его превышения значениями реализации при всех рассматриваемых в задаче отношениях сигнал/шум является чрезвычайно малой. Далее, если все значения v_i оказались нулевыми, это значение порога снижается на некоторую величину Δh.

Так продолжается до тех пор, пока в реализации хотя бы один отсчет v_i не окажется отличным от нуля.

2) В приемном устройстве сформировать $M \times N_\tau$ матрицу Φ, элементами которой будут независимые и одинаково распределенные случайные величины. Например, могут быть выбраны гауссовские случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями. Величина M выбирается из условия $M << N_\tau$. Далее эта матрица умножается на $N_\tau \times N_t$ матрицу S^T из (9), в результате чего получаем матрицу $\Phi 1 = \Phi \mathrm{S}^T$ размера $M \times N_t$. Следует отметить, что эти операции могут быть выполнены до начала обработки входного колебания в приемном устройстве.

3) Получить вектор линейных измерений $\mathbf{y} = \Phi 1 \cdot \mathbf{v}$ размера $M \times 1$, где $\mathbf{v}$ – $N_t \times 1$ вектор отсчетов прореженной реализации. При этом для получения вектора $\mathbf{y}$ требуется всего $M \times N_t$ операций умножения, что существенно меньше, чем при формировании классической статистики (9).

4) Зная матрицу Φ и вектор $\mathbf{y}$, используя теорию *CS*, восстановить вектор $\mathbf{L1} = \mathrm{S}^T \mathbf{v}$, то есть найти его оценку $\overset{\wedge}{\mathbf{L1}}$, решив выпуклую оптимизационную задачу вида:

$$\overset{\wedge}{\mathbf{L1}} = \arg\min_{\mathbf{l}} \|\mathbf{l}\|_1, \text{ при условии, что } \Phi\mathbf{l} = \mathbf{y},$$

которая, как отмечалось выше, может быть сведена к задаче линейного программирования.

5) По положению максимума найденной характеристики $\overset{\wedge}{\mathbf{L1}}$ вынести решение об оценке временного положения сигнала, то есть найти величину $\overset{\wedge}{\tau_m}$.

Применим изложенный выше алгоритм для оценки временного положения сверхкороткого сигнала, модель которого выберем в виде $s(t, \tau_0) = A \exp(-\alpha(t - \tau_0)^2)$. Для определенности положим: $\alpha T^2 = \frac{10^6}{5}$; интервал наблюдения реализации отнормируем к единице, т.е. $t \in [0, 1]$; априорный интервал неизвестного параметра $\tau \in \left[\frac{\Delta\tau_s}{2}, 1 - \frac{\Delta\tau_s}{2}\right]$, где $\Delta\tau_s$–длительность сигнальной функции; шаг дискретизации сигнала, выбранный в соответствие с теоремой Котельникова, положим равным $\Delta t = 0.002$; при этом количество получаемых отсчетов $N_t = 501$; шаг дискретизации по параметру, также выбранный в соответствие с теоремой Котельникова, положим равным $\Delta\tau = \frac{1}{353} \approx 2.83 \cdot 10^{-3}$; при этом количество получаемых отсчетов $N_\tau = 354$; начальное значение порога $h_0 = 2.5$, шаг $\Delta h = 0.1$. Пусть матрица Φ размера $M \times N_\tau$ для описанного выше алгоритма состоит из элементов, представляющих собой случайные величины, распределенные по нормальному закону с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями. В качестве характеристик оценки рассмотрим ее смещение и рассеяние. По результатам проведенного статистического моделирования (количество испытаний для каждого набора параметров составляло не менее 25000) получим ряд зависимостей смещения и рассеяния оценки $\overset{\wedge}{\tau_m}$ от различных параметров для описанного выше алгоритма. Пусть истинное значение параметра τ_0 меняется от реализации к реализации по случайному закону с равномерным распределением на интервале $\left[\frac{\Delta\tau_s}{2}, 1 - \frac{\Delta\tau_s}{2}\right]$, пусть также от реализации к реализации меняется вид матрицы Φ при прежнем алгоритме ее формирования.

На рис. 1 изображена зависимость рассеяния оценки $\overset{\wedge}{\tau_m}$ для алгоритма *CS* от отношения сигнал/шум $z = \sqrt{\frac{2E}{N_0}}$, где E – энергия сигнала, для ряда значений $\frac{M}{N_\tau}$ (кривые 1-3 построены при соответственно $\frac{M}{N_\tau} = \frac{12}{354}, \frac{18}{354}, \frac{36}{354}$). Также на этом рисунке изображена зависимость рассеяния оценки τ_m для классического алгоритма от z (кривая 4).

Далее на рис. 2 изображена зависимость рассеяния оценки $\overset{\wedge}{\tau_m}$ для алгоритма *CS* от отношения $\frac{M}{N_\tau}$ для ряда значений z (кривые 1-3 построены при соответственно $z = 3, 5, 7$).

Как следует из анализа приведенных рисунков, применение предложенного алгоритма оценки, основанного на парадигме *CS*, во-первых, требует меньшего количества операций

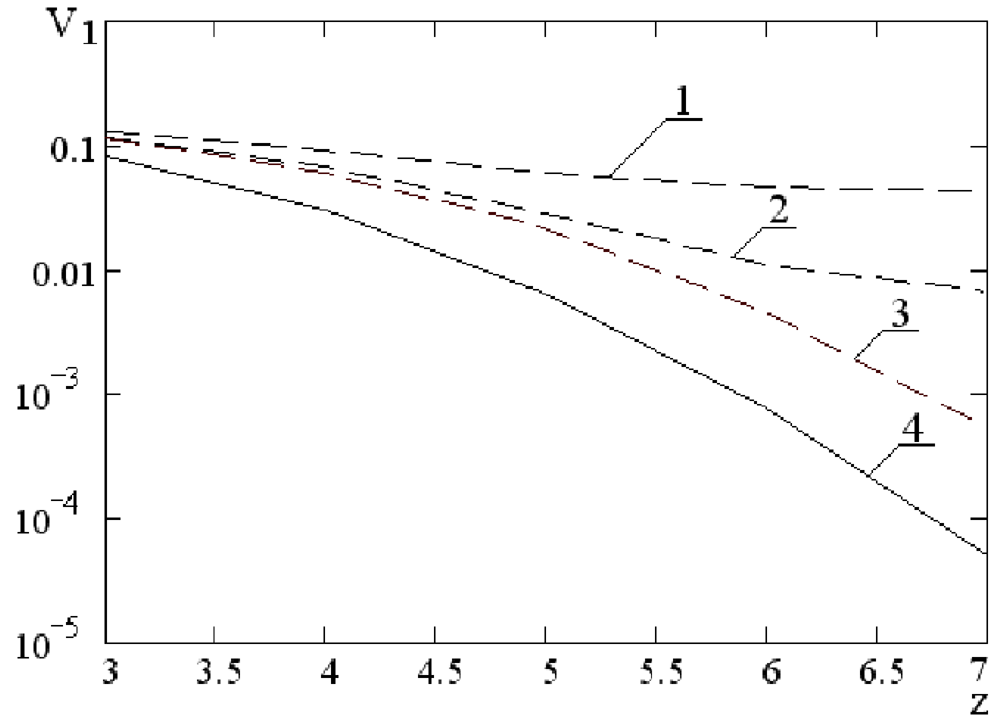

Рис. 1. *Зависимость рассеяния оценки от отношения сигнал/шум для алгоритма CS при различных значениях $\frac{M}{N_\tau}$ и классического алгоритма оценки*

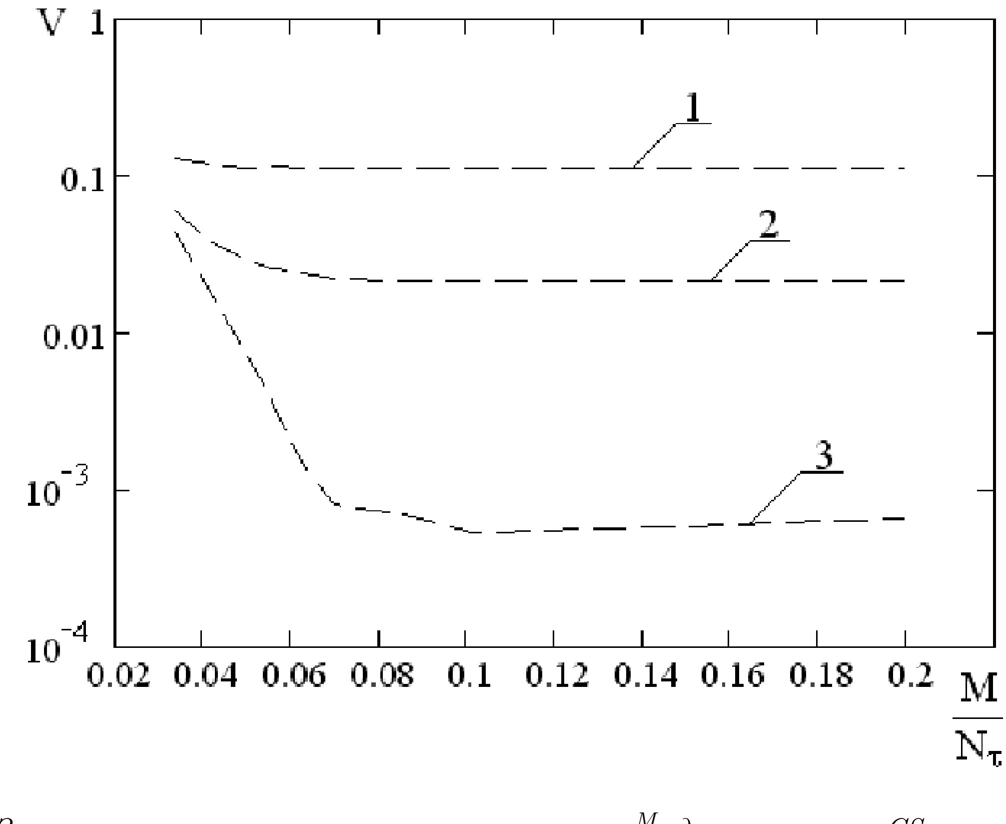

Рис. 2. *Зависимость рассеяния оценки от отношения $\frac{M}{N_\tau}$ для алгоритма CS при различных значениях отношения сигнал/шум*

умножения, во-вторых, обеспечивает при этом достаточно высокую точность оценки. Так, например, при $z = 7$ и $\frac{N_\tau}{M} = 10$ дисперсия оценки ухудшается по сравнению с классическим алгоритмом максимального правдоподобия в 10 раз, а при $z = 5$ – в 3 раза, что во многих случаях может быть вполне допустимо. Кроме того, как показывают исследования, смещение оценки $\overset{\wedge}{\tau_m}$ стремится к 0 при $z > 4-4.5$, т.е. оценка $\overset{\wedge}{\tau_m}$ является асимптотически несмещенной даже при очень малых $\frac{M}{N_\tau} << 1$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предлагаемый в работе алгоритм оценки временного положения сверхкороткого импульса позволяет существенно сократить количество операций, выполняемых в приемном устройстве. Снижение точности оценки для предложенного алгоритма по сравнению с оценкой по методу максимального правдоподобия является вполне приемлемым для практических приложений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Куликов Е.И. Оценка параметров сигналов на фоне помех / Е.И. Куликов, А.П. Трифонов. — М.: Советское радио, 1978. — 296 с.

[2] Захаров А.В. Эффективность асимптотически оптимальной оценки времени прихода флуктуирующего радиоимпульса при наличии аномальных ошибок / А.В. Захаров, А.В. Зюльков // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 14–28.

[3] Парфенов В.И. Прием радиосигналов в каналах с замираниями типа Накагами / В.И. Парфенов // Известия вузов. Радиоэлектроника. — 2005. — Т. 48, № 10. — С. 73–80.

[4] Трифонов А.П. Обнаружение стохастических сигналов с неизвестными параметрами / А.П. Трифонов, Е.П. Нечаев, В.И. Парфенов. — Воронеж: Воронежский государственный университет, 1991. — 246 с.

[5] Радзиевский В.Г. Обработка сверхширокополосных сигналов и помех / В.Г. Радзиевский, П.А. Трифонов. — М.: Радиотехника, 2009. — 290 с.

[6] Астанин Л.Ю. Основы сверхширокополосных радиолокационных измерений / Л.Ю. Астанин, А.А. Костылев. — М.: Радио и связь, 1989. — 190 с.

[7] Baraniuk R. Compressive sensing / R. Baraniuk // IEEE Signal Processing Magazine. — 2007. — Vol. 24, № 4. — P. 118–121.

[8] Eldar C. Compressed sensing: theory and applications / C. Eldar, G. Kutyniok. — Cambridge University Press, 2012. — 555 p.

[9] Candes E. An introduction to compressive sampling / E. Candes, M. Wakin // IEEE Signal Processing Magazine. — 2008. — Vol. 25, № 2. — P. 21–30.

[10] Foucart S. A mathematical introduction to compressive sensing / S. Foucart, H. Rauhut. — Berlin: Springer, 2013. — 625 p.

[11] Chen S. Atomic decomposition by basis pursuit / S. Chen, D. Donoho, M. Saunders // SIAM Journal on Scientific Computing. — 1998. — Vol. 20, № 1. – P. 33–61.

[12] Tropp J. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit / J. Tropp, A. Gilbert // IEEE Transactions on Information Theory. — 2007. — Vol. 53, № 12. — P. 4655–4666.

[13] Needell D. CoSaMP: Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples / D. Needell, J. Tropp // Applied and Computational Harmonic Analysis. — 2009. — Vol. 26, № 3. — P. 301–321.

REFERENCES

[1] Kulikov E.I., Trifonov A.P. Estimation of parameters of signals on a noise background. [Kulikov E.I., Trifonov A.P. Ocenka parametrov signalov na fone pomex]. Moscow: Soviet radio,

1978, 296 p.

[2] Zakharov A.V., Zyulkov A.V. Efficiency of asymptotically optimal estimation of time delay of fluctuated radioimpulse at presence of abnormal errors. [Zaharov A.V., Zyul'kov A.V. E'ffektivnost' asimptoticheski optimal'noj ocenki vremeni prixoda fluktuiruyushhego radioimpul'sa pri nalichii anomal'nyh oshibok]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, №2, pp. 14–28.

[3] Parfenov V.I. Reception of radiosignals in the channel with fadings of Nakagami type. [Parfenov V.I. Priem radiosignalov v kanalax s zamiraniyami tipa Nakagami]. *Izvestiya vuzov. Radioe'lektronika — Radioelectronics and Communications Systems*, 2005, Vol. 48, №10, pp.73–80.

[4] Trifonov A.P., Nechaev E.P., Parfenov V.I. Detection of the stochastic signals with the unknown parameters. [Trifonov A.P., Nechaev E.P., Parfenov V.I. Obnaruzhenie stoxasticheskix signalov s neizvestnymi parametrami]. Voronezh State University, 1991, 246 p.

[5] Radzievsky V.G., Trifonov P.A. Processing of ultrawideband signals and hindrances. [Radzievskij V.G., Trifonov P.A. Obrabotka sverxshirokopolosnyx signalov i pomex]. Moscow: Radio engineering, 2009, 290 p.

[6] Astanin L.Y., Kostylev A.A. Fundamentals of ultrawideband radiolocation measurements. [Astanin L.Y., Kostylev A.A. Osnovy sverxshirokopolosnyx radiolokacionnyx izmerenij]. Moscow: Radio and communication, 1989, 190 p.

[7] Baraniuk R. Compressive sensing. IEEE Signal Processing Magazine, 2007, vol. 24, no. 4, pp. 118–124.

[8] Eldar C., Kutyniok G. Compressed sensing: theory and applications. Cambridge University Press, 2012, 555 p.

[9] Candes E., Wakin M. An introduction to compressive sampling. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, vol. 25, no. 2, pp. 21–30.

[10] Foucart S., Rauhut H. A mathematical introduction to compressive sensing. Springer, 2013, 625 p.

[11] Chen S., Donoho D., Saunders M Atomic decomposition by basis pursuit. SIAM Journal on Scientific Computing, 1998, vol. 20, no. 1, pp. 33–61.

[12] Tropp J., Gilbert A. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit. IEEE Transactions on Information Theory, 2007, vol. 53, no. 12, pp. 4655–4666.

[13] Needell D., Tropp J. CoSaMP: Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2009, vol. 26, no. 3, pp. 301–321.

Парфенов В.И., доктор физико-математических наук, профессор кафедры радиофизики Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: vip@phys.vsu.ru
Тел.: 8–908–146–69–96

Parfenov V.I., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of Radiophysics Chair, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: vip@phys.vsu.ru
Tel.: 8–908–146–69–96

Голованов Д.Ю., аспирант кафедры радиофизики Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: golovanov@amm.vsu.ru
Тел.: 8–950–762–35–19

Golovanov D.Y., graduate student of Radiophysics Chair, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: golovanov@amm.vsu.ru
Tel.: 8–950–762–35–19