

ЛУЧЕВОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДИФРАКЦИИ ПЛОСКОЙ УПРУГОЙ ВОЛНЫ ЗА ВЫПУКЛЫМ ПРЕПЯТСТВИЕМ

К. И. Быкова, М. И. Быкова, Н. Д. Вервейко

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 27.01.2015 г.

Аннотация: в работе рассмотрено лучевое представление интенсивности дифрагированной волны за выпуклым препятствием. В качестве препятствия выбран эллипсоид. При распространении дифрагированного фронта вдоль поверхности препятствия интенсивность зависит от времени, от расстояния, пройденного точкой волны, и параметров, характеризующих пространственное положение дифрагированной волны. Построены графики, отображающие эту зависимость для разных случаев распространения волны на поверхности эллипсоида. В результате проведенного исследования получил подтверждение физически оправданный факт экспоненциального затухания интенсивности дифрагированной волны в области тени за препятствием.

Ключевые слова: дифракция, упругая волна, интенсивность, лучевое приближение, геодезические линии.

THE RAY APPROXIMATION OF THE INTENSITY OF DIFFRACTIONAL WAVE WHICH PROPAGATES BEHIND A CONVEX OBSTACLE

K. I. Bykova, M. I. Bykova, N. D. Verveyko

Abstract: the work is devoted to the ray approximation of the intensity of the diffractive wave which is located behind a convex obstacle. Ellipsoid was selected as obstacle. When the propagation of the diffracted front along the surface obstacle intensity depends of time, on the distance moved by the wave point, and parameters describing the spatial position diffractive wave. Graphs showing this dependence for different cases of wave propagation on the surface of the ellipsoid. In the study received the physically justified fact of the exponential decay of the intensity of diffractive wave in the shadow area behind the obstacle was confirmed.

Keywords: diffraction, elastic wave, intensity, ray approximation, geodesic lines.

ВВЕДЕНИЕ

Расчет интенсивности дифрагированных упругих волн за выпуклым препятствием произвольной формы осложнен рядом обстоятельств. Во-первых, на переднем фронте волны на дифрагированной поверхности Σ отсутствует разрыв скорости, а производная от скорости материальных частиц по направлению нормали к фронту волны неограниченна [3], [4] (рис. 1), что не позволяет использовать в качестве характеристики дифрагированной волны Σ величину $\frac{\partial v}{\partial n}|_{\Sigma}$, которая неограниченна в точке $n = 0$ на поверхности S . Это препятствие можно обойти введением в качестве характеристики таких волн величину $\frac{\partial v}{\partial n}|_{\Sigma_\varepsilon}$, вычисленную на малом расстоянии ε от переднего фронта (рис. 1), где $\frac{\partial v}{\partial n}|_{\Sigma_\varepsilon}$ ограничено $\left(\frac{\partial v}{\partial n}|_{\Sigma_\varepsilon} = tg\gamma\right)$.

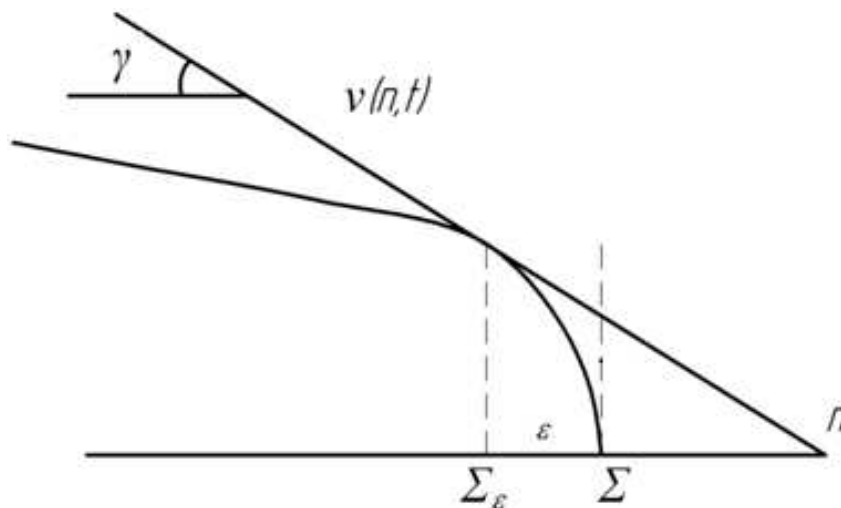


Рис. 1. Схематическое представление поведения скорости материальных частиц за фронтом дифрагированной волны Σ

Таким образом, исследование поля скоростей лучевым методом за передним фронтом дифрагированной волны Σ переносится за подобную Σ поверхность Σ_ϵ .

Вторым обстоятельством, затрудняющим использование лучевого метода для описания дифрагированных волн, является определение траектории точки переднего фронта дифрагированной волны на выпуклом препятствии S . Волновой принцип Ферма состоит в том, что точка переднего фронта волны перемещается к своему следующему положению по направлению нормали \vec{n} к Σ по кратчайшему пути. Это приводит к тому, что нормальной траекторией волнового фронта дифрагированной волны на поверхности S является геодезическая линия L [1], [5], совпадающая с направлением движения фронта волны вдоль одной из взаимно ортогональных линий криволинейной системы координат (y_1, y_2) поверхности S , а именно, с y_1 (рис. 2).

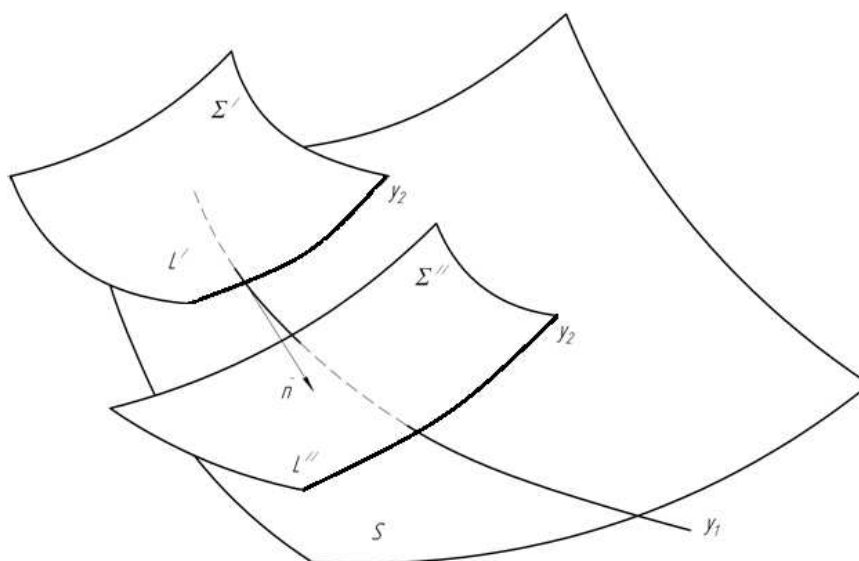


Рис. 2. Схематическое изображение дифрагированной поверхности Σ вблизи поверхности препятствия S , где L' и L'' - следы волны на поверхности S препятствия.

Использование локальных геодезических линий y_1, y_2 в окрестности точки M на поверхности S и выбор одной из этих линий, а именно, y_1 в качестве ортогональной траектории следа L волнового дифрагированного фронта на поверхности S приводит к возможности сведения общей задачи дифракции к анализу дифракции за локальной осесимметричной поверхностью радиуса $R_2(y_1)$. Использование аппроксимации дифрагирующей поверхности S осесимметричной поверхностью оправдано тем, что в уравнение “переноса” интенсивности волн входят только главные кривизны самой волновой поверхности Σ и отражающей поверхности S . Локальной осью вращения поверхности S в окрестности точки M является нормаль \vec{N} к плоскости, содержащей касательную к линии y_2 , и проходящей через центр кривизны геодезической линии y_2 .

Таким образом, задача нахождения начальных параметров дифрагированной волны на поверхности S будет рассматриваться локально, как задача распространения дифрагированной волны на локально осесимметричной поверхности вращения $S(M)$ вдоль y_1 . Главные радиусы кривизны $\rho_L(u)$ и $\rho_\perp(v)$ будут рассматриваться в зависимости от параметров $u(y_2)$ и $v(y_1)$.

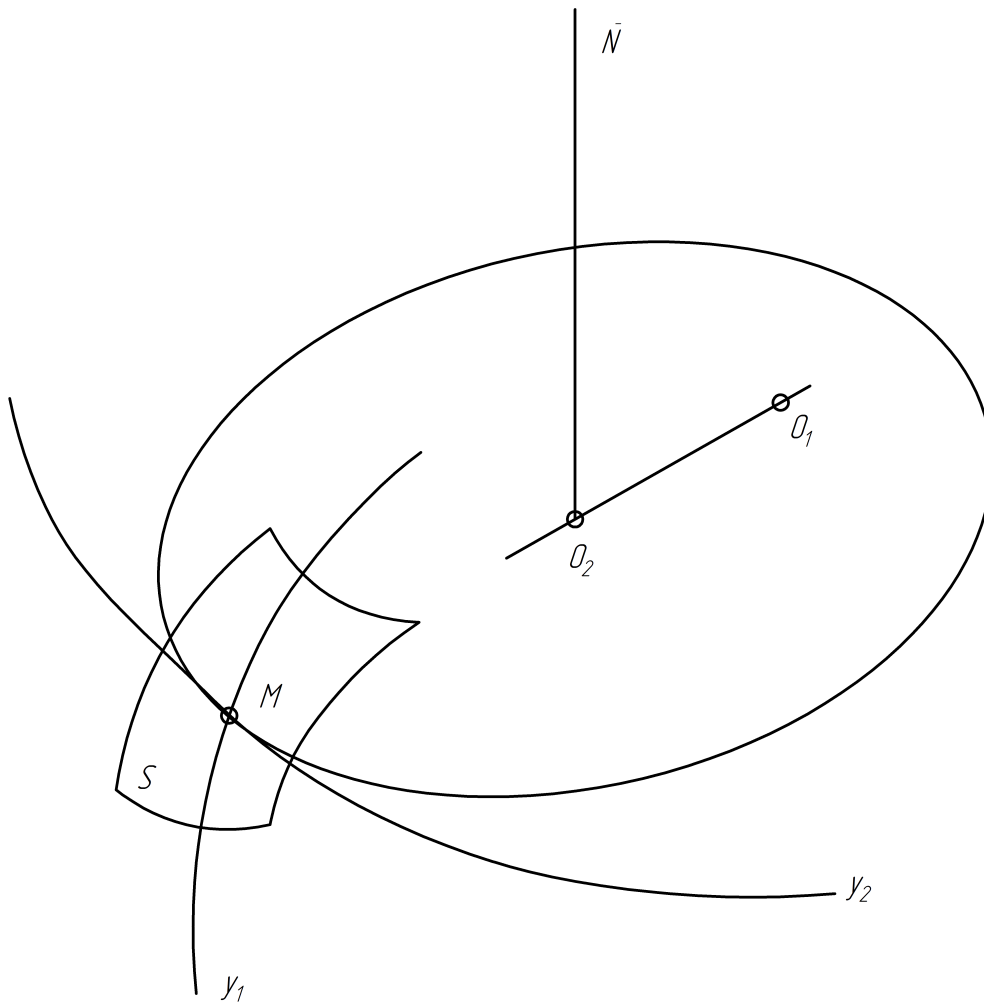


Рис. 3. Схематическое изображение элемента препятствия, ограниченного поверхностью S со следами y_1 и y_2 геодезических линий, где дифрагированная поверхность Σ касается поверхности S по линии y_2 . Здесь \vec{N} - нормаль к соприкасающемуся кругу геодезической линии y_2 в точке M , O_1 - центр кривизны геодезической линии y_1 , O_2 - центр кривизны геодезической линии y_2 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИВИЗН МЕРИДИАН И ПАРАЛЛЕЛЕЙ ЭЛЛИпсоИДА

В качестве примера исследования интенсивности дифрагированных волн рассмотрим пространственное препятствие в виде эллипсоида (рис.4), заданного в параметрическом виде уравнениями:

$$\begin{cases} x = a \sin u \cos v, \\ y = b \sin u \sin v, \\ z = -c \cos u. \end{cases} \quad (1)$$

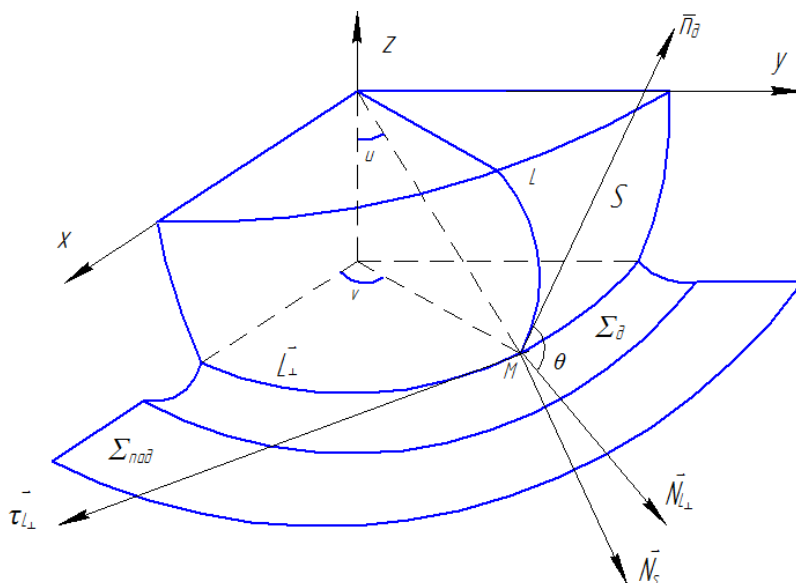


Рис. 4. Схематическое изображение падающей и дифрагированной волн на эллиптическую поверхность

Линиями кривизн являются сечения поверхности эллипсоида плоскостями $v = v_0$ (меридианы) и $u = u_0$ (параллели).

Кривизны линий, являющихся сечениями эллипсоида плоскостями $v = v_0$ (меридианы) и $u = u_0$ (параллели), позволяют определить главные кривизны поверхности Σ_d в момент ее зарождения.

Параллель $L_{\perp}(u = u_0)$ лежит в плоскости, перпендикулярной оси Z , и представлена уравнениями и (1) при $u = u_0$.

Кривизна кривой, заданной параметрически, в регулярной точке вычисляется по формуле [1]:

$$\chi = \frac{\sqrt{(z''y' - y''z')^2 + (x''z' - z''x')^2 + (y''x' - x''y')^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2)$$

Для рассматриваемого эллипсоида имеем:

$$\begin{cases} x' = -a \sin u_0 \sin v, \\ y' = b \sin u_0 \cos v, \\ z' = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x'' = -a \sin u_0 \cos v, \\ y'' = -b \sin u_0 \sin v, \\ z'' = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Используя соотношения (3) получим выражение для кривизны линии L_{\perp} ($u = u_0$):

$$\chi_{\perp} = \frac{ab}{\sin u_0 (a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v)^{\frac{3}{2}}}. \quad (4)$$

Вектор касательной к кривой L_{\perp} имеет координаты: $\vec{T}_{L_{\perp}}(-a \sin u_0 \sin v, b \sin u_0 \cos v, 0)$, его модуль определяется: $|\vec{T}_{L_{\perp}}| = \sin u_0 \sqrt{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v}$. Обозначим $a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v = A$. Тогда координаты единичного вектора касательной примут вид:

$$\vec{\tau}_{L_{\perp}} \left(\frac{-a \sin v}{\sqrt{A}}, \frac{b \cos v}{\sqrt{A}}, 0 \right). \quad (5)$$

Единичный вектор нормали к L_{\perp} имеет вид:

$$\vec{n}_{L_{\perp}} \left(\frac{-b \cos v}{\sqrt{A}}, \frac{-a \sin v}{\sqrt{A}}, 0 \right), \quad (6)$$

Аналогично вычислим единичные векторы касательной и нормали к меридиану $L(v = v_0)$, а также кривизну χ_L .

$$\vec{\tau}_L \left(\frac{a \cos u \cos v_0}{\sqrt{C}}, \frac{b \cos u \sin v_0}{\sqrt{C}}, \frac{c \sin u}{\sqrt{C}} \right), \quad (7)$$

где $C = a^2 \cos^2 u \cos^2 v_0 + b^2 \cos^2 u \sin^2 v_0 + c^2 \sin^2 u$.

Координаты единичного вектора нормали к линии L имеют вид:

$$\vec{n}_L \left(\frac{-ac^2 \sin u \cos v_0}{\sqrt{D}}, \frac{-bc^2 \sin u \sin v_0}{\sqrt{D}}, \frac{c \cos u (b^2 \sin^2 v_0 + a^2 \cos^2 v_0)}{\sqrt{D}} \right), \quad (8)$$

где $D = a^2 c^4 \sin^2 u \cos^2 v_0 + b^2 c^4 \sin^2 u \sin^2 v_0 + c^2 \cos^2 u (b^2 \sin^2 v_0 + a^2 \cos^2 v_0)^2$.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ГЛАВНЫХ НАЧАЛЬНЫХ КРИВИЗН ДИФРАГИРОВАННОЙ ВОЛНЫ В МОМЕНТ ЕЕ ЗАРОЖДЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ S

Для построения дифференциального уравнения “переноса” интенсивности дифрагированной волны необходимо знание начальных главных кривизн поверхности Σ_d . Зафиксируем начальное положение точки M на дифрагированном фронте параметрами u_0, v_0 , и из геометрических соображений (рис. 4) вычислим начальные главные кривизны волновой поверхности Σ_d .

Начальный радиус кривизны ρ_2^0 можно вычислить, зная радиус кривизны сечения эллипсоида плоскостью $z = const$, то есть параллели L_{\perp} , принадлежащей эллипсоиду, и дифрагированной поверхности Σ_d . Нормалью \vec{n}_d к дифрагированной поверхности Σ_d в точке M является касательная $\vec{\tau}_L$ к поверхности эллипсоида в плоскости $v = v_0 = const$.

Линия L_{\perp} не является линией главной кривизны для поверхности Σ_d , но знание ее радиуса кривизны ρ_{\perp} позволяет вычислить главный радиус кривизны $\rho_{\perp d}$ дифрагированной поверхности Σ_d .

Обозначим через θ угол между нормальями $\vec{n}_{L_{\perp}}$ и \vec{n}_d . Тогда $\rho_{\perp d} = \rho_{\perp} \cos \theta$, где $\cos \theta = \vec{n}_{L_{\perp}} \cdot \vec{n}_d$.

Отсюда, с учетом последнего выражения и формул (7), (8), получим:

$$\cos \theta = -\frac{ab \cos u \cos(v - v_0)}{\sqrt{AC}}. \quad (9)$$

Таким образом, выражение для главной начальной кривизны дифрагированной поверхности Σ_d представимо в виде:

$$\chi_2^0 = \frac{1}{\rho_{\perp d}} = \frac{1}{\rho_{\perp} \cos \theta} = \frac{\chi_{\perp}}{\cos \theta}. \quad (10)$$

Используя (9), будем иметь:

$$\chi_2^0 = \frac{\sqrt{C}}{A \cos u \sin u_0 \cos(v - v_0)}. \quad (11)$$

Вследствие особенностей зарождения фронта дифрагированной волны Σ_d в точке M при ее распространении вдоль линии L начальный радиус кривизны равен 0, и кривизна неограниченна. Это объясняется тем, что в соответствии с принципом Гюйгенса, точка, в которую пришла волна, становится источником возмущения. Эта точка может быть заменена сферой бесконечно малого радиуса. Поэтому для проведения расчетов будем полагать начальный радиус кривизны $\rho_1^0 = \varepsilon$, а $\chi_1^0 = \frac{1}{\varepsilon}$. Такое предположение соответствует сдвигу от поверхности эллипсоида на малое расстояние порядка ε .

ПЕРЕНОС ИНТЕНСИВНОСТИ ДИФРАГИРОВАННОЙ ВОЛНЫ ВДОЛЬ ПОВЕРХНОСТИ ЭЛЛИПСОИДА

Интенсивность фронта дифрагированной волны Σ_d за эллипсоидом S является функцией времени, а, следовательно, функцией расстояния s , пройденного точкой волны Σ_d , а также параметров u и v , характеризующих пространственное положение дифрагированной поверхности Σ_d относительно поверхности эллипсоида.

Уравнение “переноса” интенсивности W_S зарождающейся дифрагированной волны вдоль линии L имеет вид [6]:

$$\frac{\delta W_S}{\tilde{c} \delta t} - \Omega W_S = 0, \text{ где } \Omega = \Omega_0 = \frac{\chi_1^0 + \chi_2^0}{2}. \quad (12)$$

Здесь \tilde{c} – скорость распространения фронта Σ_d .

Дифференциальное уравнение “переноса” вдоль поверхности S является обыкновенным дифференциальным уравнением вдоль линии L так, что $\tilde{c} \delta t$ есть δs , где δs – элемент дуги L , а $\chi_1^0 = \frac{1}{\varepsilon}$ – постоянная величина, вторая кривизна есть функция параметра v , то есть $v = const$.

Элемент дуги представим в виде: $\delta s = Q \delta u$, где $Q = \sqrt{(a \cos u \cos v_0)^2 + (b \cos u \sin v_0)^2 + (c \sin u)^2}$.

Знание средней кривизны Ω_0 и элемента дуги δs , как функции угловых параметров u и v , позволяет записать решение дифференциального уравнения (12) для относительной интенсивности дифрагированной волны:

$$\frac{W_S}{W_S^0} = \exp \left(\int_0^u \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{\sqrt{C}}{A \cos u \sin u_0 \cos(v - v_0)} \right) \cdot Q \delta u \right). \quad (13)$$

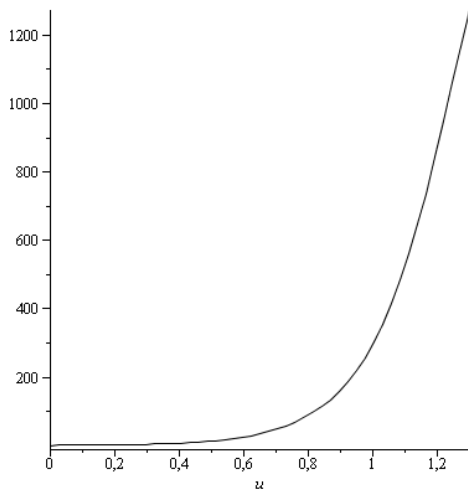
На рис. 5 представлены графики изменения относительной интенсивности дифрагированной волны на поверхности S в зависимости от параметра u для различных случаев a, b, c и угла v_0 .

Значение $u = \pi/2$ соответствует началу процесса дифракции, и как видно из графика, интенсивность w/w_0 дифрагированной волны достигает здесь наибольшего значения, а $u = 0$

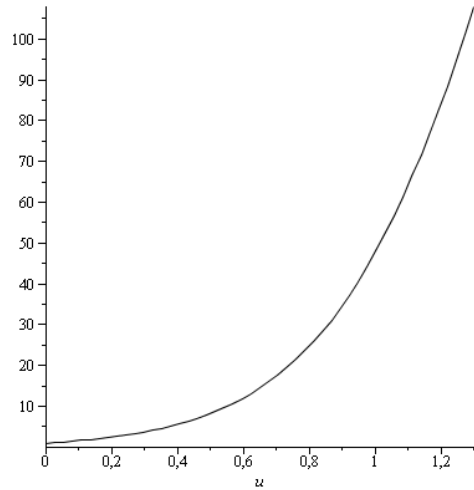
соответствует моменту времени, когда дифрагированная волна находится в крайней нижней точке эллипсоида, то есть в области тени, где интенсивность дифрагированной волны наименьшая. Это полностью соответствует физическому смыслу явления дифракции.

ПЕРЕНОС ИНТЕНСИВНОСТИ ДИФРАГИРОВАННОЙ ВОЛНЫ ОТ МОМЕНТА ЕЕ ЗАРОЖДЕНИЯ В ОБЛАСТИ ТЕНИ

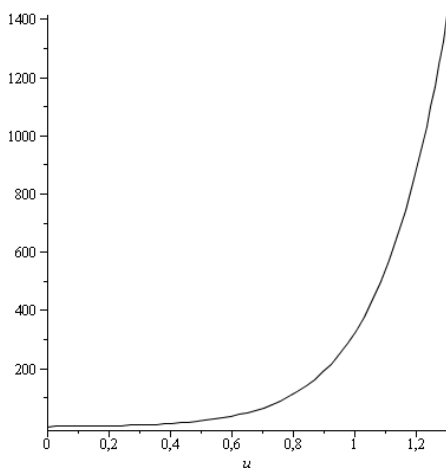
Изменение интенсивности дифрагированной волны вне поверхности эллипсоида, распространяющейся свободно в неограниченном пространстве, описывается уравнением “переноса” (12), в котором кривизна Ω определяется выражением [6]: $\Omega = \frac{\Omega_0 - k_0 \tilde{c} t}{1 - 2\Omega_0 \tilde{c} t + k_0 \tilde{c}^2 t^2}$, где $k_0 = \chi_1^0 \chi_2^0$ — гауссова кривизна, $\Omega_0 = \frac{\chi_1^0 + \chi_2^0}{2}$ — средняя начальная кривизна; \tilde{c} — скорость распространения дифрагированной волны.



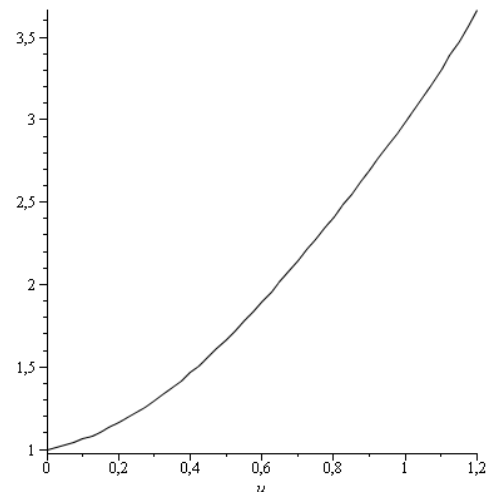
$$a = b = 1, c = 2, v = 0$$



$$a = b = 1, c = 0.5, v = 0$$



$$a = c = 1, b = 2, v = \frac{\pi}{6}$$



$$a = c = 1, b = 2, v = \frac{3\pi}{8}$$

Рис. 5. Графики изменения относительной интенсивности дифрагированной волны в зависимости от параметра u для различных значений параметров эллипсоида a, b, c и угла v_0 .

Для случая дифрагированной волны вдоль поверхности препятствия S :

$$k_0 = \frac{\sqrt{C}}{\varepsilon A \cos u \sin u_0 \cos(v - v_0)}, \quad \Omega_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{\sqrt{C}}{A \cos u \sin u_0 \cos(v - v_0)} \right),$$

тогда

$$\Omega = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{\sqrt{C}}{A \cos u \sin u_0 \cos(v - v_0)} \right) - \frac{\sqrt{C} \tilde{c} t}{\varepsilon A \cos u \sin u_0 \cos(v - v_0)}}{1 - \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{\sqrt{C}}{A \cos u \sin u_0 \cos(v - v_0)} \right) S + \frac{\sqrt{C} \tilde{c}^2 t^2}{\varepsilon A \cos u \sin u_0 \cos(v - v_0)}},$$

$$\frac{\delta W_\Sigma}{\tilde{c} \delta t} - \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{\sqrt{C}}{A \cos u \sin u_0 \cos(v - v_0)} \right) - \frac{\sqrt{C} \tilde{c} t}{\varepsilon A \cos u \sin u_0 \cos(v - v_0)}}{1 - \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{\sqrt{C}}{A \cos u \sin u_0 \cos(v - v_0)} \right) \tilde{c} t + \frac{\sqrt{C} \tilde{c}^2 t^2}{\varepsilon A \cos u \sin u_0 \cos(v - v_0)}} W_S = 0,$$

$$\frac{W_\Sigma}{W_\Sigma^0} = \exp \left(\int_0^t \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{\sqrt{C}}{A \cos u \sin u_0 \cos(v - v_0)} \right) - \frac{\sqrt{C} \tilde{c} \tau}{\varepsilon A \cos u \sin u_0 \cos(v - v_0)}}{1 - \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{\sqrt{C}}{A \cos u \sin u_0 \cos(v - v_0)} \right) \tilde{c} \tau + \frac{\sqrt{C} \tilde{c}^2 \tau^2}{\varepsilon A \cos u \sin u_0 \cos(v - v_0)}} \cdot \tilde{c} \delta \tau \right)$$

Из последнего выражения следует, что вследствие зависимости начальных кривизн χ_1^0, χ_2^0 от координат точки зарождения дифрагированной волны u , интенсивность дифрагированной волны зависит от параметров точки ее зарождения и экспоненциально затухает с расстоянием $\tilde{c}t$ вдоль нормали к поверхности Σ_d .

Из графического представления (рис. 5) следует физически оправданный факт экспоненциального затухания интенсивности дифрагированной волны в области тени за препятствием, причем, чем длиннее путь в крайнюю точку области тени, тем медленнее идет процесс затухания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Александров А.Д. Математика, ее содержание, методы и значение / А.Д. Александров, А.Н. Колмогоров, М.А. Лаврентьев. — М.: Изд. Академии наук СССР, 1956. — Т. 2 — 397 с.
- [2] Вервейко Н.Д. Лучевая теория упруговязкопластических волн и волн гидроудара / Н.Д. Вервейко. — Воронеж: Воронежский государственный университет, 1997. — 204 с.
- [3] Гузь А.Н. Дифракция упругих волн / А.Н. Гузь, В.Д. Кубенко, М.А. Черевко. — Киев: Наукова думка, 1978. — 308 с.
- [4] Исраилов М.Ш. Динамическая теория упругости и дифракция волн / М.Ш. Исраилов. — М.: Издательство МГУ, 1999. — 208 с.
- [5] Схоутен Я.А. Тензорный анализ для физиков / Я.А. Схоутен. — М.: Наука, 1965. — 456 с.
- [6] Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах / Т. Томас. — М.: Мир, 1964. — 308 с.
- [7] Тимофеева Н.В. Дифференциальная геометрия и элементы топологии в задачах, рисунках и комментариях. Учеб. пособие / Н.В. Тимофеева. — Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2006. — 55 с.

REFERENCES

- [1] Aleksandrov A.D., Kolmogorov A.N., Lavrentiev M.A. Mathematics, its methods and meaning. [Aleksandrov A.D., Kolmogorov A.N., Lavrent'ev M.A. Matematika, ee sodержanie, metody i znachenie]. Moscow: Publishing house of Academy of sciences, SSSR, 1956, Vol. 2, 397 p.
- [2] Verveyko N.D. Ray theory of elastoviscoplastic waves and hydroimpact. [Verveyko N.D. Luchevaya teoriya uprugovyazkoplasticheskix voln i voln gidroudara]. Voronezh: Voronezh State University, Voronezh, 1997, 204 p.

[3] Gus A.N., Kubenko V.D., Cherevko M.A. Diffraction of elastic waves. [Guz' A.N., Kubenko V.D., Cherevko M.A. Difrakciya uprugix voln]. Kiev: Naukova Dumka, 1978, 308 p.

[4] Israilov M.Sh. Dynamic theory of elasticity and waves diffraction. [Israilov M.Sh. Dinamicheskaya teoriya uprugosti i difrakciya voln]. Moscow: Moscow Publishing house of MSU, 1999, 208 p.

[5] Shouten Ya.A. Tensor analysis for physicists. [Sxouten Ya.A. Tenzornyj analiz dlya fizikov]. Moscow: Publishing house "Nauka", 1965, 456 p.

[6] Tomas T. Plastic flow and fracture in solids. [Tomas T. Plasticheskoe techenie i razrushenie v tverdyx telax]. Moscow: Mir, 1964, 308 p.

[7] Timofeeva N.C. Differential geometry and topology elements in the task, drawings and comments. The textbook manual. [Timofeeva N.V. Differencial'naya geometriya i e'lementy topologii v zadachax, risunkax i kommentariyax. Ucheb. posobie]. Yaroslavl: Publishing house of AGPU, 2006, 55 p.

*Быкова Ксения Игоревна, аспирант кафедры механики и компьютерного моделирования факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: ksynichka_b@mail.ru*

*Vukova Ksenya Igorevna, Postgraduate Student of the department of the mechanics and computer simulation, faculty of the mathematics, informatics and mechanics, department of the mechanics and computer simulation, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: ksynichka_b@mail.ru*

Вerveйко Николай Дмитриевич, доктор технических наук, профессор кафедры механики и компьютерного моделирования факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Российская Федерация

Verveйко Nikolay Dmitrievich, doctor of technical sciences, professor of the department of the mechanics and computer simulation, faculty of the mathematics, informatics and mechanics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation

Быкова Мария Игоревна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического и прикладного анализа факультета прикладной математики, информатики и механики, Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Российская Федерация

Vukova Mariya Igorevna, candidate of physical and mathematics sciences docent of the department of the theoretical and mathematical analyses faculty of the mathematics, informatics and mechanics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation