УДК 517.9

ОБ АТТРАКТОРЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ДВИЖЕНИЕ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ*

В. Л. Хацкевич

Воронежский Государственный Университет, Институт Заочного экономического образования

Поступила в редакцию 12.03.2014 г.

Аннотация: изучена нестационарная задача о движении нелинейно-вязкой жидкости на неограниченном промежутке времени. В основном, рассматриваются слабые решения. Изложение опирается на установленные автором априорные оценки решений в различных нормах, равномерные по времени. Для математической модели в приближении Стокса установлена устойчивость решений задачи Коши, их стабилизация к решению стационарной задачи, существование периодических и почти-периодических решений. В автономном случае рассматривается нестационарная задача при учете инерциальных сил. Следуя идеям О.А. Ладыженской и учитывая специфику модели нелинейно-вязкой жидкости, установлено существование аттрактора и указаны его свойства.

Ключевые слова: нелинейно-вязкая жидкость, математическая модель, задача Коши, автономная модель, аттрактор.

ABOUT THE ATTRACTOR OF A MATHEMATICAL MODEL DESCRIBING THE MOTION OF NONLINEAR-VISCOUS FLUID

V. L. Khatskevich

Abstract: studied nonstationary problem of the motion of nonlinear-viscous fluid on an unlimited period of time. Basically, are considered weak solutions. The presentation is based on a well-established author of a priori estimates of solutions in various norms, uniform in time. For the mathematical model in the approximation of the Stokes installed the stability of solutions of the Cauchy problem, their stabilization to the solution of the stationary problem, the existence of periodic and almost-periodic solutions. In the Autonomous case we consider the non-stationary problem when taking into account inertial forces. Following O. A. Ladyzhenskaya's ideas and considering specifics of model of nonlinear-viscous fluid, existence of an attractor is established and its properties are specified.

Keywords: nonlinear - viscous fluid, mathematical model, Cauchy's task, autonomous model, attractor.

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучению математической модели, описывающей движение нелинейно-вязкой жидкости, посвящено много работ. Наиболее существенные, для нашей статьи результаты представлены в книге В. Г. Литвинова [1] и в работах П. Е. Соболевского (см. [2]). Актуальность этого

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 14-01-00253А

направления математической физики подтверждается недавними публикациями, например [3], [4], [5]. Несмотря на это, исследованные в настоящей работе вопросы поведения решений уравнений, описывающих движение нелинейно-вязкой жидкости на бесконечном интервале времени, изучены до настоящего времени недостаточно.

В пункте 2 данной работы для математической модели в приближении Стокса установлена устойчивость решений задачи Коши, их стабилизация к решению стационарной задачи, существование периодических решений. Основным является пункт 3, в котором, следуя идеям О. А. Ладыженской, и учитывая специфику автономной модели нелинейно-вязкой жидкости, установлено существование аттрактора и указаны его свойства. Перейдем к точным формулировкам.

Пусть Ω — ограниченная область в R^2 с гладкой границей $\partial\Omega$, $T>0$ — заданное число. Движение нелинейно-вязкой несжимаемой жидкости в $Q_T=\Omega\times(0,T)$ описывается уравнениями (см. [1])

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u_k\frac{\partial u}{\partial x_k}-\mu\Delta u-div\left\{2\varphi\left(I_2\right)\varepsilon\left(u\right)\right\}+\nabla p_*=f\left(x,t\right), \quad \int\limits_\Omega p_*\left(x\right)dx=0, \quad div\ u=0, \tag{1.1}$$

$$u\left(x,t\right)=0 \quad t\in\left(0,T\right), \quad x\in\partial\Omega; \quad u\left(x,0\right)=a\left(x\right) \quad x\in\bar\Omega. \tag{1.2}$$

Здесь $u=(u_1,u_2)$ и p_* — искомые векторная и скалярная функции, f и a — заданные векторные функции;

$$\varepsilon=\left\{\varepsilon_{i,j}\right\}_{i,j=1,2}, \quad \varepsilon_{i,j}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad I_2^2=\sum_{i,j=1}^{2}\varepsilon_{ij}^2.$$

Заданная скалярная функция $\varphi\left(\cdot\right)$ и параметр $\mu>0$ характеризуют вязкость. В [1], [2] при изучении задачи (1.1), (1.2) использовалось следующее условие на функцию $\varphi\left(s\right)$. При всех $s\geqslant 0$ функция $\varphi\left(s\right)$ непрерывно-дифференциируема и выполнены соотношения:
a) $0\leqslant\varphi\left(s\right)\leqslant M<\infty \quad (\forall s\in[0,\infty))$,
b) $-s\dot\varphi\left(s\right)\leqslant\varphi\left(s\right)$ при $\dot\varphi\left(s\right)<0$. (1.3)

Условия (1.3) имеют ясный физический смысл. Первое из них связано с существованием у реальных жидкостей предельных "ньютоновских" вязкостей. Второе — есть выражение закона о том, что сдвиговые напряжения растут вместе с ростом скоростей деформаций (см. [1], гл.2,§2). Здесь и ниже точка над символом обозначает дифференцирование по s.

Решением (сильным) задачи (1.1), (1.2) называют пару функций $u\left(t,x\right)$, $p\left(t,x\right)$, имеющих все входящие в уравнение (обобщенные) производные из $L_2\left(Q_T\right)$ и удовлетворяющие уравнениям (1.1) и краевым условиям (1.2).

Введем обозначения, необходимые для определения слабого решения. Пусть $L_2\left(\Omega,R^2\right)$ — пространство квадратично суммируемых векторных функций $u:\Omega\to R^2$ со скалярным произведением и нормой

$$(u,v)=\int\limits_\Omega\sum_{k=1}^{2}u_kv_kdx, \quad \|u\|=(u,u)^{1/2}.$$

Обозначим через H замыкание пространства гладких финитных соленоидальных векторных полей по норме $\|\ \ \|$, а через V — по норме $\|\ \ \|_1$, порождаемой скалярным произведением

$$(u,v)_1=\sum_{i,j}^{2}\int\limits_\Omega\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx.$$

Значение функционала $f \in V'$ на элементе $v \in V$ будем обозначать $\langle f, v \rangle$. Как известно, справедливо непрерывное вложение $V \subset H \subset V'$, так что $\langle f, v \rangle = (f, v)$ для $f \in H$, $v \in V$.

Зададим формы b и g соотношениями

$$b\,(u, v, w) = \sum_{i,j=1}^{2} \int\limits_{\Omega} u_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i dx \quad (u, v, w \in V)\,, \tag{1.4}$$

$$g\,(u, v) = 2 \sum_{i,j=1}^{2} \int\limits_{\Omega} \varphi\,(I_2\,(u))\varepsilon_{ij}\,(u)\,\varepsilon_{ij}\,(v) dx \quad (u, v \in V)\,. \tag{1.5}$$

Задача об обобщенном (слабом) решении для системы (1.1), (1.2) может быть сформулирована в виде:

Ищется функция $u \in L_2\,([0, T]\,, V)$ такая, что $u' \in L_2\,([0, T]\,, V')$, п.в. на $[0, T]$ выполнено равенство

$$\left\langle u', v \right\rangle + \mu\,(u, v)_1 + g\,(u, v) + b\,(u, u, v) = \langle f, v \rangle \quad (\forall v \in V) \tag{1.6}$$

и

$$u|_{t=0} = a. \tag{1.7}$$

Здесь штрих над функцией обозначает дифференцирование по t, а $f \in L_2\,([0, T]\,, V')$, $a \in H$.

Доказательство однозначной разрешимости задачи (1.6), (1.7) в [1] и задачи (1.1), (1.2) в [2] опирается на тот факт, что при выполнении условия (1.3) выполнено соотношение монотонности

$$0 \leqslant g\,(u, u - v) - g\,(v, u - v) \quad (\forall u, v \in V)\,. \tag{1.8}$$

Кроме того, используется дополнительное ограничение

$$|s\dot{\varphi}\,(s)| \leqslant C \quad (\forall s \in [0, \infty))\,. \tag{1.9}$$

В настоящей работе в основном рассматриваются слабые решения. Однако, для получения некоторых оценок привлекаются сильные решения. Ниже в работе ограничимся для простоты случаем, когда неоднородность в правой части уравнения (1.1) $f \in L_2\,([0, T]\,, H)$.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПРИБЛИЖЕНИИ СТОКСА

Материал этого пункта носит вспомогательный характер для изучения полной модели. Некоторые результаты, касающиеся поведения решений на неограниченном промежутке времени имеют, как нам кажется, самостоятельный интерес.

Рассмотрим в $Q_T := \Omega \times (0, T)$ нестационарную задачу в приближении Стокса

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \mu \Delta u_i - \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(2\varphi\,[I_2\,(u)]\,\varepsilon_{ij}\right) = f_i\,(x, t) - \frac{\partial p_*}{\partial x_i} \quad (i, j = 1, 2; x, t \in Q_T)\,; \tag{2.1}$$

$$\int\limits_{\Omega} p_*\,(x)\,dx = 0, \quad div\; u = 0 \quad (x, t \in Q_T)\,; \quad u\,(x, t) = 0 \quad (t \in [0, T]\,, x \in \partial\Omega)\,; \tag{2.2}$$

$$u\,(x, 0) = a\,(x) \quad \left(x \in \bar{\Omega}\right).$$

Пусть заданы векторные функции $f \in L_2([0,T];H)$ и $a \in H$. Обобщенным решением задачи (2.1)–(2.2) назовем функцию u такую, что $u \in L_2([0,T];V)$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in L_2([0,T];H)$ при п.в. $t \in [0,T]$ выполнено равенство

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v\right) + \mu (u,v)_1 + g(u,v) = (f,v) \quad (\forall v \in V) \tag{2.3}$$

и

$$u|_{t=0} = a. \tag{2.4}$$

В [1] гл. 4, § 2 методом Фаэдо-Галеркина установлена

Теорема 2.1. *Пусть $\varphi : [0,\infty) \to R$ — непрерывно-дифференциируемая функция, удовлетворяющая условиям (1.3). Тогда для всякой функции $f \in L_2([0,T];H)$ и начального условия $a \in H$ задача (2.3), (2.4) имеет решение, причем единственное.*

Рассмотрим менее ограничительные чем (1.3) условия на функцию вязкости $\varphi(s)$. А именно, функция $\varphi(s)$ непрерывна и

a) $0 \leqslant \varphi(s) \leqslant M < \infty \quad (\forall s \in [0,\infty))$,

b) функция $s\varphi(s)$ неубывает при $s \in [0,\infty)$. (1.3)'

Заметим, что при выполнении (1.3)' справедливо соотношение (1.8). Для дифференцируемой функции $\varphi(s)$ условия (1.3)' превращаются в (1.3).

Лемма 2.1. *Пусть функция $\varphi : [0,\infty) \to R$ непрерывна и удовлетворяет условию (1.3)' a), функция $f \in L_2([0,T];H)$ и начальное условие $a \in H$. Тогда для решения задачи (2.3)–(2.4) справедливы оценки*

$$\|u(t)\| \leqslant e^{-\gamma t}\|a\| + \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)}\|f(\tau)\|\,d\tau =: \eta(t) \quad (\forall t \in [0,T]), \tag{2.5}$$

$$\mu\int_0^t \|u(\tau)\|_1^2 d\tau \leqslant \frac{1}{2}\|a\|^2 + \int_0^t \eta(\tau)\|f(\tau)\|\,d\tau \quad (\forall t \in [0,T]), \tag{2.6}$$

где $\gamma = \mu\lambda_1$, а λ_1 — первое собственное значение задачи Стокса

$$(w,v)_1 = \lambda(w,v) \quad (\forall v \in V). \tag{2.7}$$

Доказательство. Действительно, из (2.3) при $v = u$ получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u\|^2\right) + \mu\|u\|_1^2 + 2\int_\Omega \varphi[I_2(u)]\sum_{i,j=1}^2 \varepsilon_{ij}^2(u)\,dx = (f,u). \tag{2.8}$$

В силу условия $\varphi(s) \geqslant 0$ отсюда следует

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u\|^2\right) + \mu\|u\|_1^2 \leqslant (f,u). \tag{2.9}$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}(\|u\|) + \mu\lambda_1\|u\| \leqslant \|f\|. \tag{2.10}$$

Из (2.10) по теореме о дифференциальных неравенствах следует (2.5). Оценка (2.6) получается после интегрирования (2.9) от 0 до t и использования уже установленной оценки (2.5).

Оценка, типа (2.5) получена в [1] в предположениях (1.3). Нами оценка (2.5) в дальнейшем используется для доказательства продолжимости решения задачи Коши (2.3), (2.4) по времени на интервал $(0, \infty)$, а также в пункте 3.

Лемма 2.2. *Пусть выполнено условие (1.3)' а), причем начальное условие $a \in V$. Если решение задачи (2.3), (2.4) $u(t)$ таково, что $u' \in L_2([0,T];V)$, то справедлива оценка*

$$\int_0^t \left\| \frac{\partial u}{\partial \tau} \right\|^2 d\tau + \mu \left\| u(t) \right\|_1^2 \leqslant (\mu + 2M) \left\| a \right\|_1^2 + 4 \int_0^t \left\| f(\tau) \right\|^2 d\tau \quad (\forall t \in [0,T]). \tag{2.11}$$

Доказательство. Полагая в (2.3) $v = u'$, получим

$$\left\| u' \right\|^2 + \frac{\mu}{2} \frac{d}{dt} \left(\left\| u \right\|_1^2 \right) + 2 \int_\Omega \varphi \left[I_2(u) \right] \sum_{i,j=1}^{2} \varepsilon_{ij}(u) \, \varepsilon_{ij}(u') \, dx = (f, u'). \tag{2.12}$$

Поскольку $(f, u') \leqslant 2 \left\| f \right\|^2 + \frac{1}{2} \left\| u' \right\|^2$, из (2.12) следует

$$\left\| u' \right\|^2 + \mu \frac{d}{dt} \left(\left\| u \right\|_1^2 \right) + 4 \int_\Omega \varphi \left[I_2(u) \right] \sum_{i,j=1}^{2} \varepsilon_{ij}(u) \, \varepsilon_{ij}(u') \, dx \leqslant 4 \left\| f \right\|^2. \tag{2.13}$$

Заметим, что $\varepsilon_{ij}(u') = \varepsilon'_{ij}(u)$ и

$$\frac{d}{dt} \left[I_2(u(t)) \right] = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i,j=1}^{2} \varepsilon_{ij}^2(u) \right)^{1/2} = \frac{1}{I_2(u)} \sum_{i,j=1}^{2} \varepsilon_{ij}(u) \, \varepsilon'_{ij}(u).$$

Тогда, полагая $s = I_2(u)$, можно записать

$$\int_\Omega \varphi \left[I_2(u) \right] \sum_{i,j=1}^{2} \varepsilon_{ij}(u) \, \varepsilon_{ij}(u') \, dx = \int_\Omega \varphi \left[I_2(u) \right] \cdot I_2(u) \frac{d}{dt} \left(I_2(u) \right) dx =$$

$$= \int_\Omega \frac{d}{dt} \left(\int_0 I_2(u) \varphi(s) \cdot s ds \right) dx = \frac{d}{dt} \int_\Omega \left(\int_0^{I_2(u)} s \varphi(s) \, ds \right) dx.$$

Отметим, что в наших предположениях соответствующие операции интегрирования и дифференцирования законны.

Таким образом, из (2.13), используя обозначение

$$\Psi(u) := 2 \int_\Omega dx \int_0^{I_2(u)} \tau \varphi(\tau) d\tau \quad (\forall u \in V), \tag{2.14}$$

получим

$$\left\| u' \right\|^2 + \mu \frac{d}{dt} \left(\left\| u \right\|_1^2 \right) + 2 \frac{d}{dt} \left(\Psi(u) \right) \leqslant 4 \left\| f \right\|^2. \tag{2.15}$$

Интегрируя (2.14) от 0 до t, приходим к формуле

$$\int_0^t \left\| \frac{\partial u}{\partial \tau} \right\|^2 d\tau + \mu \left\| u(t) \right\|_1^2 + 2 \int_\Omega \left(\int_0^{I_2(u(t))} s \varphi(s) \, ds \right) dx \leqslant$$

$$\leqslant \mu \|a\|_1^2 + 2 \int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_0^{I_2(a)} s\varphi(s)\, ds \right) dx + 4 \int\limits_0^t \|f(\tau)\|^2 \, d\tau \quad (\forall t \in [0,T]).$$

Отсюда, учитывая положительность $\Psi(u)$ и оценку $\varphi(s) \leqslant M$, получим

$$\int\limits_0^t \left\| \frac{\partial u}{\partial \tau} \right\|^2 d\tau + \mu \|u(t)\|_1^2 \leqslant \mu \|a\|_1^2 + 2M \int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_0^{I_2(a)} sds \right) dx + 4 \int\limits_0^t \|f(\tau)\|^2 \, d\tau.$$

При этом $\int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_0^{I_2(a)} sds \right) dx \leqslant \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} I_2^2(a) dx \leqslant \|a\|_1^2$. Так что справедлива оценка (2.11).

В [2] при условиях (1.3), (1.9) установлено существование сильного решения задачи (2.1), (2.2), обладающего всеми необходимыми квадратично-суммируемыми производными. Там же установлена оценка типа (2.11), но другим способом. Рассуждения леммы 2.2 мы будем использовать в пункте 3 для получения важной оценки (3.12).

Лемма 2.3. *Пусть $\varphi : [0,\infty) \to R$ — непрерывная функция, удовлетворяющая условиям (1.3)'. Тогда для разности решений задачи (2.3) справедлива оценка*

$$\left\|u^1(t) - u^2(t)\right\| \leqslant e^{-\gamma t} \left\|a^1(t) - a^2(t)\right\| \quad (\forall t \in [0,T]). \tag{2.16}$$

Здесь $u^j(t)$ — решения задачи (2.3)), соответствующие начальным условиям $u^j(0) = a^j \quad (j = 1,2)$, а $\gamma = \mu\lambda_1 > 0$, где λ_1 — первое собственное значение задачи Стокса (2.7).

Действительно, подставим $u^1(t)$, а затем $u^2(t)$ в (2.3) и вычтем полученные равенства друг из друга. В найденном соотношении положим $v = h := u^1 - u^2$, тогда получим, что

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t}, h \right) + \mu \|h\|_1^2 + g\left(u^1, h\right) - g\left(u^2, h\right) = 0. \tag{2.17}$$

Согласно (1.8) формула (2.17) влечет неравенство $\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\|h\|^2\right) + \mu \|h\|_1^2 \leqslant 0$. Следовательно, аналогично лемме 2.1 при $\gamma = \mu\lambda_1$ имеем $\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\|h\|^2\right) + \gamma \|h\|^2 \leqslant 0$. Отсюда, по теореме о дифференциальных неравенствах получим (2.16).

Оценка (2.16) обеспечивает единственность решения задачи (2.3), (2.4), кроме того она позволяет доказать существование периодического решения, а также обосновать стабилизируемость решения задачи (2.3), (2.4) при $t \to +\infty$ к решению соответствующей стационарной задачи в автономном случае.

Замечание 2.1. Анализ доказательства из [1] с учетом лемм 2.1-2.3 и некоторых соображений из [6] показывает, что результат о существовании и единственности решения обобщенной задачи (2.3), (2.4) справедлив при выполнении менее ограничительных, чем (1.3) условиях (1.3)'.

Изучим для уравнения (2.3) $T-$периодическую задачу, когда вместо условия (2.4) требуется выполнение равенства

$$u(0) = u(T). \tag{2.18}$$

Теорема 2.2. *Пусть выполнены предположения теоремы 2.1. Тогда задача (2.3), (2.18) имеет решение u^0, причем единственное. Для него справедлива оценка*

$$\left\|u^0(t)\right\| = \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \left(\frac{1 + e^{-\gamma T}}{1 - e^{-\gamma T}} \right)^{1/2} \left(\int\limits_0^T \|f(t)\|^2 \, dt \right)^{1/2}. \tag{2.19}$$

Доказательство. В силу теоремы 2.1 каждому элементу $a \in H$ соответствует единственное решение $u\,(t,0,a)$ задачи (2.3), (2.4). Рассмотрим оператор $\Phi : H \to H$, определяемый формулой $\Phi a = u\,(T,0,a)$ (оператор монодромии). Согласно оценке (2.16)

$$\left\|\Phi a^1 - \Phi a^2\right\| \leqslant e^{-\gamma T}\left\|a^1 - a^2\right\| \quad \left(\forall a^1, a^2 \in H\right),$$

т.е. Φ — сжимающий оператор. Тогда он имеет единственную неподвижную точку a^0. Следовательно, уравнение (2.3) имеет единственное T-периодическое решение $u^0\,(t) = u\left(t,0,a^0\right)$.

Оценка (2.19) следует из неравенства (2.10) с учетом периодичности функции $u^0\,(t)$ (ср. [6]).

Замечание 2.2. Если функция $f : (-\infty,\infty) \to H$ и является T-периодической, то решение задачи (2.3), (2.18) в условиях теоремы 2.2 будет T-периодической функцией, определенной на всей оси R. Кроме того, в силу монотонности (1.8) можно показать, что в случае почти периодичности по Бору правой части $f\,(t)$ решения уравнения (2.3) будет почти периодической функцией (ср. [7]).

Рассмотрим вопрос об устойчивости решений уравнения (2.3).

Теорема 2.3. *Пусть в условиях теоремы 2.2 функция $f : [0,\infty) \to H$ сильно измерима и ограничена. Тогда решение задачи (2.3), (2.4) определено при всех $t \geqslant 0$ и является равномерно асимптотически устойчивым по Ляпунову. Для разности любых двух решений $u^1\,(t)$ и $u^2\,(t)$ справедлива оценка*

$$\left\|u^1\,(t) - u^2\,(t)\right\| \leqslant e^{-\gamma t}\left\|u^1\,(0) - u^2\,(0)\right\| \quad \left(\forall t \in [0,\infty)\right). \tag{2.20}$$

Действительно, существование решения на конечном промежутке следует из теоремы 2.1. Продолжимость решения на промежуток $[0,\infty)$ обеспечивается оценкой $\|u\,(t)\| \leqslant \|a\| + \frac{1}{\gamma}\sup\limits_{t>0}\|f\,(t)\| \quad (\forall t \geqslant 0)$, вытекающей из (2.5), а устойчивость решения следует из оценки (2.20), следующей из (2.16).

Рассмотрим теперь автономный случай, когда функция f_i в правой части не зависит от t.

Теорема 2.4. *Пусть функция $\varphi : [0,\infty) \to R$ непрерывна и удовлетворяет условию (1.3)', а элементы $a, f \in H$. Тогда решение $u : [0,\infty) \to V$ задачи (2.3), (2.4) при $t \to \infty$ стремится в норме H к решению $z \in V$ стационарной задачи*

$$\mu\,(z,v)_1 + g\,(z,v) = (f,v) \quad (\forall v \in V). \tag{2.21}$$

При этом справедлива оценка

$$\|u\,(t) - z\| \leqslant e^{-\gamma t}\|a - z\| \quad (\forall t \geqslant 0). \tag{2.22}$$

Действительно, положим в (2.3) и (2.21) $v = u - z$. Вычитая полученные равенства одно из другого, имеем

$$\left((u-z)', u-z\right) + \mu\,(u-z,u-z)_1 + g\,(u,u-z) - g\,(z,u-z) = 0.$$

Отсюда, используя свойства монотонности (1.8) получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u-z\|^2\right) \leqslant \mu\,\|u-z\|_1^2 \leqslant -\gamma\,\|u-z\|^2.$$

Поэтому справедлива оценка (2.22), а значит и утверждение теоремы.

Отметим, что близкий результат справедлив для асимптотически автономных уравнений, когда $f(t) \to f_\infty$ при $t \to +\infty$.

3. НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ПРИ УЧЕТЕ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИЛ

Рассмотрим задачу (1.6), (1.7). При ее изучении полезно утверждение (см., напр., [8]).

Лемма 3.1. *Для трилинейной формы b, определяемой в (1.4), справедливы соотношения:*

$$b(u,v,u) = -b(u,u,v), \quad b(u,v,v) = 0\,(\forall u, v \in V), \tag{3.1}$$

$$|b(u,u,v)| = \sqrt{2}\,\|u\|\,\|u\|_1\,\|v\|_1 \quad (\forall u, v \in V). \tag{3.2}$$

Лемма 3.2. *Пусть $\varphi : [0,\infty) \to R$ — непрерывная функция, удовлетворяющая условию (1.3)'. Пусть $a \in H, f \in L_2([0,T], H)$. Тогда решение задачи (1.6), (1.7) (если оно существует) удовлетворяет оценкам (2.5), (2.6).*

Действительно, пусть u — решение задачи (1.6), (1.7). Полагая в (1.6) $v = u$ и используя свойство (3.1), получим (2.9). Отсюда, аналогично лемме 2.1, и следуют оценки (2.5), (2.6).

Теорема 3.1. *Пусть $\varphi : [0,\infty) \to R$ — непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям (1.3), (1.9). Пусть $a \in H, f \in L_2([0,T], H)$. Тогда (обобщенная) задача (1.6), (1.7) имеет решение, причем единственное.*

Доказательство приведено в [1] гл. IV, § 6.

Рассмотрим теперь задачу (1.1), (1.2) в автономном случае, когда функция f не зависит от t. В этом случае задачу (1.1), (1.2) будем изучать при $t \in [0,\infty)$. Соответствующая обобщенная задача имеет вид: *ищется функция $u(t) : [0,\infty) \to V$ такая, что $u'(t) : [0,\infty) \to H$, причем функции $u(t)$, $u'(t)$* по отношению к t локально квадратично суммируемы и при п.в. $t \in [0,\infty)$ выполнены соотношения

$$\left(u', v\right) + \mu(u,v)_1 + g(u,v) + b(u,u,v) = (f,v) \quad (\forall v \in V), \tag{3.3}$$

$$u|_{t=0} = a. \tag{3.4}$$

Из теоремы 3.1 и леммы 3.2 вытекает

Теорема 3.2. *Пусть $a, f \in H$ и функция $\varphi(s)$ удовлетворяет условиям (1.3), (1.9). Тогда задача (3.3), (3.4) имеет решение, причем единственное. Это решение определено при $t \in [0,\infty)$. Для него справедливы оценки*

$$\|u(t)\| \leqslant e^{-\gamma t}\|a\| + \frac{1}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma t}\right)\|f\| := \eta_0(t) \quad (\forall t \geqslant 0), \tag{3.5}$$

$$\mu\int_0^t \|u(\tau)\|_1^2 d\tau \leqslant \|a\|\left(\frac{\|a\|}{2} + \frac{\|f\|}{\gamma}\right) + \frac{\|f\|^2}{\gamma}t := \eta_1(t)\,(\forall t \geqslant 0). \tag{3.6}$$

Для разности решений имеет место оценка

$$\left\|u^1(t) - u^2(t)\right\| \leqslant \left\|a^1 - a^2\right\| \exp\left\{\frac{1}{\mu}\int_0^t \left\|u^2(\tau)\right\|_1^2 d\tau\right\} \tag{3.7}$$

где $u^j(0) = a^j\,(j = 1,2)$.

Следствие 3.1. *В условиях теоремы 3.2 имеет место равномерная оценка*

$$\|u(t)\| \leqslant \|a\| + \|f\|/\gamma := \widetilde{r} \quad (\forall t \geqslant 0). \tag{3.8}$$

Изучим поведение решений автономной задачи при $t \to \infty$. По поводу используемых ниже терминов и результатов теории нелинейных полугрупп (динамических систем) см., напр., [9]. Согласно теореме 3.2 уравнение (3.3) порождает непрерывную (нелинейную) полугруппу $U_t : H \to H \quad (t \in [0, \infty))$ по формуле $U_t a := u(t, a)$. Это означает, что при каждом $t \in [0, \infty)$ нелинейный оператор U_t непрерывен, ограничен и $U_{t+s} = U_t U_s$ $(t, s \in [0, \infty))$, $U_0 = I$.

Пусть B — совокупность всех ограниченных подмножеств из H. Множество B_0 называется *поглощающим*, если для $\forall \mathrm{B} \subset B$ найдется такое $t_1(\mathrm{B})$, что $U_t(\mathrm{B}) \subset \mathrm{B}_0$ при $\forall t \geqslant t_1(\mathrm{B})$.

Полугруппа $U_t : H \to H \quad (t \in [0, \infty))$ называется ограниченной, если для $\forall \mathrm{B} \subset B$ множество $U_t(\mathrm{B}) \subset B$ при $\forall t \geqslant 0$ и называется точечно диссипативной, если существует $\mathrm{B}_0 \in B$ притягивающее любую точку H.

Согласно оценке (3.5) полугруппа U_t ограничена и точечно диссипативна. Более того, из (3.5) следует, что шар $\mathrm{B}_0 = \{z \in H : \|z\| \leqslant r_0\}$ любого радиуса $r_0 \geqslant \gamma^{-1}\|f\|$ является поглощающим множеством для всякого ограниченного множества из H и $U_t(\mathrm{B}_0) \subset \mathrm{B}_0$ при $\forall t \geqslant 0$.

Минимальным глобальным B-аттрактором полугруппы U_t называют наименьшее непустое замкнутое множество, которое притягивает любое ограниченное множество $\mathrm{B} \subset H$.

При этом утверждение, что множество B_0 притягивает множество B означает следующее: по $\forall \rho > 0$ найдется число $t_1(\rho, \mathrm{B})$ такое, что $U_t(\mathrm{B}) \subset O_\rho(\mathrm{B}_0)$ при $t > t_1(\rho, \mathrm{B})$. (Здесь $O_\rho(\mathrm{B}_0)$есть совокупность всех открытых шаров радиуса ρ с центрами в точках B_0).

Для доказательства существования минимального глобального B-аттрактора полугруппы U_t, порождаемой уравнением (3.3), и выяснения его свойств (инвариантности, компактности, связности,...), может быть использована теория полугрупп класса I, развитая О. А. Ладыженской в (см. [9]).

По определению U_t есть полугруппа класса I, если оператор U_t при $\forall t \in (0, \infty)$ вполне непрерывен в пространстве H. Для установления этого факта в случае уравнения (3.3) используется следующая основная

Лемма 3.3. *Пусть выполнены условия теоремы 3.2. Тогда для (обобщенного) решения автономной задачи (3.6) справедлива оценка*

$$\sup_{\rho < t < \infty} \|u(t)\|_1^2 \leqslant C(\|u(0)\|) \quad (\forall \rho \in (0, 1]), \tag{3.9}$$

где $C(\cdot)$ есть непрерывная на $[0, \infty)$ функция.

Эта оценка аналогична оценке из [10], полученной для уравнения Навье-Стокса. При ее доказательстве в нашем случае используется один результат П. Е. Соболевского [2].

Лемма 3.4. *Пусть для функции $\varphi(s)$ выполнены условия (1.3), (1.9), а функция $f \in L_2(\Omega, R^2)$. Тогда решение задачи*

$$-\mu \Delta u - div\{\varphi(I_2)\varepsilon(u)\} + \nabla p_* = q(x), \int_\Omega p_*(x)\,dx = 0, div\ v = 0\,(x \in \Omega), u = 0\,(x \in \partial\Omega) \tag{3.10}$$

удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_{w_2^2} + \|p_*\|_{w_2^1} \leqslant K\|q\| \tag{3.11}$$

с постоянной K, не зависящей от q.

Доказательство леммы 3.3 проведем в два этапа. Пусть сначала u – сильное решение задачи (3.3). Положим $h := f - u_k \frac{\partial u}{\partial x_k}$.Тогда согласно (3.3) имеем $(u', v) + \mu(u, v)_1 + g(u, v) = (h, v) \quad (\forall v \in V)$.

Тогда, заменяя в рассуждениях леммы 2.2 f на h, придем к (модифицированной) оценке (2.16):

$$\|u'\|^2 + \mu\frac{d}{dt}\left(\|u\|_1^2\right) + 2\frac{d}{dt}(\Psi(u)) \leqslant 4\|h\|^2, \tag{3.12}$$

где $\Psi(u)$ определяется в (2.15). Далее, умножим (3.12) на гладкую неотрицательную "срезающую" (ср. [10]) функцию $\xi(t)$, равную нулю при $t = 0$ и не превосходящую единицу, после чего запишем полученный результат в виде

$$\xi \left\|u'\right\|^2 + \mu \frac{d}{dt}\left(\left\|\sqrt{\xi}u\right\|_1^2\right) + 2\frac{d}{dt}\left(\xi\Psi(u)\right) \leqslant \mu\xi' \|u\|_1^2 + 2\xi'\Psi(u) + 4\xi\|h\|^2.$$

Интегрируя это неравенство от 0 до t, найдем, что

$$\begin{array}{c}\int\limits_0^t \xi(\tau)\left\|\frac{\partial u}{\partial \tau}\right\|^2 d\tau + \mu\left\|\sqrt{\xi(t)}u\right\|_1^2 + 2\xi(t)\Psi(u(t)) \leqslant \\ \leqslant \mu\int\limits_0^t \xi'(\tau)\|u\|_1^2 d\tau + 2\int\limits_0^t \xi'(\tau)\Psi(u(\tau))\,d\tau + 4\int\limits_0^t \xi(\tau)\|h(\tau)\|^2 d\tau\end{array}.$$

Отсюда, используя неравенство $0 < \Psi(u) \leqslant M\|u\|_1^2$, получим

$$\int\limits_0^t \xi(\tau)\left\|\frac{\partial u}{\partial \tau}\right\|^2 d\tau + \mu\xi(t)\|u(t)\|_1^2 \leqslant (\mu + 2M)\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}\left|\xi'(\tau)\right|\int\limits_0^t \|u\|_1^2 d\tau + 4\int\limits_0^t \xi(\tau)\|h(\tau)\|^2 d\tau. \tag{3.13}$$

Поэтому согласно (3.6), вводя в (3.13) обозначение

$$\eta_2(t) := \left(1 + 2\frac{M}{\mu}\right)\eta_1(t)\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}\left|\xi'(\tau)\right|,$$

имеем

$$\int\limits_0^t \xi(\tau)\left\|\frac{\partial u}{\partial \tau}\right\|^2 d\tau + \mu\xi(t)\|u(t)\|_1^2 \leqslant \eta_2(t) + 4\int\limits_0^t \xi(\tau)\|h(\tau)\|^2 d\tau. \tag{3.14}$$

С другой стороны, по лемме 3.4 при $q = h - u'$ найдем $\|u\|_{w_2^2} \leqslant K(\|u'\| + \|h\|)$. Тогда

$$\int\limits_0^t \xi(\tau)\|u(\tau)\|_{w_2^2}^2 d\tau \leqslant 2K^2\left(\int\limits_0^t \xi(\tau)\left\|u'(\tau)\right\|^2 d\tau + \int\limits_0^t \xi(\tau)\|h(\tau)\|^2 d\tau\right).$$

Отсюда, с учетом (3.14), можем записать

$$\int\limits_0^t \xi(\tau)\|u(\tau)\|_{w_2^2}^2 d\tau \leqslant 2K^2\left(\eta_2(t) + 5\int\limits_0^t \xi(\tau)\|h(\tau)\|^2 d\tau\right). \tag{3.15}$$

Сложим неравенства (3.14) и (3.15). Тогда, обозначая $K_1 := 2K^2 + 1, K_2 := 10K^2 + 4$, получим

$$\int\limits_0^t \xi(\tau)\|u(\tau)\|_{w_2^2}^2 d\tau + \int\limits_0^t \xi(\tau)\left\|u'(\tau)\right\|^2 d\tau + \mu\xi(\tau)\|u(\tau)\|_1^2 \leqslant K_1\eta_2(t) + K_2\int\limits_0^t \xi(\tau)\|h(\tau)\|^2 d\tau. \tag{3.16}$$

Теперь заметим, что по определению h и в силу известной оценки на нелинейность, присутствующую в уравнениях Навье-Стокса (см., напр., [8]) справедливо неравенство

$$\|h\| \leqslant \|f\| + \left\|u_k\frac{\partial u}{\partial x_k}\right\| \leqslant \|f\| + C\|u\|^{1/2}\|u\|_1\|u\|_{w_2^2}^{1/2}$$

с некоторой постоянной C, зависящей лишь от области Ω. При этом в силу (3.8) $\|u(t)\| \leqslant \widetilde{r}$ $(\forall t \geqslant 0)$. Так что для некоторой (новой) постоянной $C > 0$ можем записать $\|h\|^2 \leqslant 2\left(\|f\|^2 + C\|u\|_1^2\|u\|_{w_2^2}\right)$.Воспользуемся теперь неравенством Коши $\|u\|_{w_2^2}\|u\|_1^2 \leqslant \frac{\alpha}{2}\|u\|_{w_2^2}^2 + \frac{2}{\alpha}\|u\|_1^4$ с $\alpha > 0$.Тогда,

$$\int\limits_0^t \xi(\tau)\|h\|^2 d\tau \leqslant 2\int\limits_0^t \xi(\tau)\|f\|^2 d\tau + C\alpha\int\limits_0^t \xi(\tau)\|u\|_{w_2^2}^2 d\tau + \frac{4C}{\alpha}\int\limits_0^t \xi(\tau)\|u\|_1^4 d\tau.$$

Используя эту оценку в (3.16) при $\alpha = (2CK_2)^{-1}$, получим

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2}\int\limits_0^t \xi(\tau)\|u(\tau)\|_{w_2^2}^2 d\tau + \int\limits_0^t \xi(\tau)\|u'(\tau)\|^2 d\tau + \mu\xi(\tau)\|u(t)\|_1^2 \leqslant \\ \leqslant K_1\eta_2(t) + 2K_2\int\limits_0^t \xi(\tau)\|f(\tau)\|^2 d\tau + 8C^2K_2^2\int\limits_0^t \xi(\tau)\|u(\tau)\|_1^4 d\tau. \end{array}.$$

Отсюда при

$$\eta_3(t) := K_1\eta_2(t) + 2K_2\int\limits_0^t \xi(\tau)\|f(\tau)\|^2 d\tau, \quad K_3 := 8C^2K_2^2,$$

в частности, следует, что

$$\mu\xi(t)\|u(t)\|_1^2 \leqslant \eta_3(t) + K_3\int\limits_0^t \xi(\tau)\|u(\tau)\|_1^4 d\tau. \tag{3.17}$$

Рассмотрим функцию $\chi(t) := \xi(t)\|u(t)\|_1^2$. Для нее (3.17) влечет интегральное неравенство

$$\mu\chi(t) \leqslant \eta_3(t) + K_3\int\limits_0^t \chi(\tau)\|u(\tau)\|_1^2 d\tau \quad (\forall t \geqslant 0). \tag{3.18}$$

Предположим временно, что $t \in [0,1]$. Тогда можно считать $\xi(t) = t$ и в этом случае $\eta_3(t) \leqslant K_4$ $(\forall t \in [0,1])$. Поэтому из (3.18) следует

$$\chi(t) \leqslant \frac{1}{\mu}K_4 + \frac{1}{\mu}K_3\int\limits_0^t \chi(\tau)\|u(\tau)\|_1^2 d\tau \quad (t \in [0,1]).$$

Тогда по лемме Гронуолла

$$t\|u(t)\|_1^2 \leqslant \frac{1}{\mu}K_4 \exp\left\{\frac{1}{\mu}K_3\int\limits_0^t \|u(\tau)\|_1^2 d\tau\right\} \quad (t \in [0,1]).$$

Согласно оценке (3.6) отсюда для некоторой постоянной K_5 следует

$$\sup_{0<\rho\leqslant t\leqslant 1}\|u(t)\|_1^2 \leqslant \frac{1}{\rho}K_5. \tag{3.19}$$

Задача (3.3) автономна, а следовательно, инвариантна относительно сдвига по t. При этом в силу (3.8) $\|u(t)\| \leqslant \widetilde{r}$ $(\forall t \geqslant 0)$.Тогда из (3.19) вытекает равномерная по $t \geqslant \rho > 0$ оценка на $\|u(t)\|_1$, то есть (3.9).

Второй этап доказательства. В предыдущих рассуждениях использовалось условие $u' \in V$, кроме того, применяя лемму 3.4 мы предположили, что при каждом $t \in [0, \infty)$ решение $u(\cdot) \in W_2^2(\Omega, R^2)$. Так что оценка (3.9) доказана для "гладких" решений.

Воспользуемся методом Фаэдо-Галеркина. Рассмотрим спектральную задачу

$$(w, h)_1 = \lambda (w, h) \quad (\forall h \in V).$$

Эта задача имеет счетное множество действительных собственных чисел $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots$ конечной кратности. Соответствующие собственные функции $w^j \in V$ могут быть выбраны ортогональными в V (и H) и нормированными в H. Система $\{w^j\}_{j=1}^{\infty}$ полна в V(и H). Положим $V_n = \operatorname{lin}\{w^1, w^2, \ldots, w^n\}$.

Галеркинское приближение u^n задачи (3.3), (3.4) задают в виде

$$u^n(t) = \sum_{i=1}^{n} e_{jn}(t)\, w^j,$$

где неизвестные функции $e_{jn}(t)$ определяются уравнениями

$$\left(\frac{du^n}{dt}, w\right) + \mu g(u^n, w) + b(u^n, u^n, w) = (f, w) \quad (\forall w \in V_n), \tag{3.20}$$

$$u^n|_{t=0} = a^n = V_n; \quad \|a^n - a\| \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{3.21}$$

Здесь (3.20) по существу система n обыкновенных дифференциальных уравнений с n неизвестными $e_{jn}(t)$ $(j = 1, \ldots, n)$. В наших условиях задача (3.20), (3.21) однозначно разрешима. При этом по построению $u^n(\cdot) \in W_2^2(\Omega, R^2)$ и $\frac{\partial u^n}{\partial t} \in V$.

Полагая в (3.20) $w = u^n$ и используя свойство (3.1) формы b, а также предположения на функцию $\varphi(s)$, аналогично лемме 3.2 получим равномерные по n и $t \in [0, T]$ оценки

$$\|u^n(t)\| \leqslant C, \int_0^T \|u^n(t)\|_1^2 dt \leqslant C \quad (\forall t \in [0, T], \, n = 1, 2, \ldots).$$

Кроме того, рассуждения 1-го этапа леммы 3.3 сохраняют силу для галеркинских приближений $u^n(t)$, являющихся решениями задачи (3.20), (3.21). Затем предельным переходом устанавливается справедливость оценки (3.9) для обобщенных решений задачи (3.3), (3.4). Лемма доказана.

Резюмируя вышеизложенное приходим к выводу, что задача (3.3) порождает в H непрерывную полугруппу класса I (см. [9]). Поэтому из результатов О. А. Ладыженской [9] следует ряд утверждений по поводу аттракторов.

Теорема 3.3. *Пусть выполнены условия (1.3), (1.9). Тогда для автономной системы (3.3) в фазовом пространстве H имеется минимальный глобальный* B-*аттрактор M. Он является непустым инвариантным связным компактом в H и ограниченным в V множеством.*

Теорема 3.4. *Полугруппа $U_t : H \to H \quad t \in [0, \infty)$ для автономной задачи (3.3) в $\Omega \subset R^2$ продолжается на M до непрерывной группы $U_t : M \to M$ $t \in R$. При этом $u(t) = U_t(a), a \in M, t \in R$ есть решение автономной задачи (3.3).*

Теорема 3.5. *Любое решение автономного уравнения (3.3), существующее при любом $t \in R$ и лежащее в каком-нибудь шаре из H, находится в M. Для любой точки $a \in M$ существует единственное решение $u(t), t \in R$ автономной задачи (3.3), (3.4), лежащее в M.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Литвинов В.Г. Движение нелинейно-вязкой жидкости / В.Г. Литвинов. — М.: Наука, 1982. — 373 с.

[2] Соболевский П.Е. Существование решений математической модели нелинейно-вязкой жидкости / П.Е. Соболевский // Докл. Академии наук СССР. — 1985. — Т. 285, № 1. — С. 44–48.

[3] Litvinov W.G. Model for laminar and turbulent flows of viscous and nonlinear viscous non-Newtonian fluids / W.G. Litvinov // Journal of Mathematical physics. — 2011. — Vol. 52, Iss. 5. — P. 053102.

[4] Agranovich Yu.Ya. Mathematical Modeling of Nonlinearly Viscous Fluid Motion: Strong Solutions / Yu.Ya.Agranovich, V.L.Khatskevich // Automation and Remote Control. — 2012. — Vol. 73, №. 1. — P. 171–180.

[5] Dmitrienko V.T. Topological Degree Method in the Equations of the Navier-Stokes Type / V.T. Dmitrienko, V.G. Zvyagin // Abstract and Applied Analysis. — 1997. — Vol. 1, 2. — P. 1–45.

[6] Хацкевич В.Л. Периодические решения дифференциальных включений с монотонными операторами / В.Л. Хацкевич // Дифференц. уравнения. — 1993. — Т. 29, № 4. — С. 725–727.

[7] Хацкевич В.Л. Принцип усреднения для монотонных дифференциальных включений / В.Л. Хацкевич // Доклады Академии наук. — 1997. — Т. 357, № 1. — С. 26–28.

[8] Темам Р. Уравнение Навье-Стокса / Р. Темам. — М.: Мир, 1981. — 408 с.

[9] Ладыженская О.А. О нахождении минимальных глобальных аттракторов для уравнения Навье-Стокса и других уравнений с частными производными / О.А. Ладыженская // Успехи математических наук. — 1987. — Т. 42, № 6. — С. 25–68.

[10] Ладыженская О.А. О динамической системе, порождаемой уравнениями Навье-Стокса // Записки научных семинаров Ленинградского отделения математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. — 1972. — Т. 27. — С. 91–114.

REFERENCES

[1] Litvinov W.G. Movement of nonlinear-viscous fluids. [Litvinov V.G. Dvizhenie nelinejno-vyazkoj zhidkosti]. Moscow: Nauka, 1982, 373 p.

[2] Sobolevsky P.E. Existence of solutions of mathematical model of nonlinear-viscous fluids. [Sobolevskij P.E. Sushhestvovanie reshenij matematicheskoj modeli nelinejno-vyazkoj zhidkosti]. *Doklady Akademii nauk SSSR — Reports of the Academy of Sciences of the USSR*, 1985, Vol. 285, no 1, S. 44–48.

[3] Litvinov W.G. Model for laminar and turbulent flows of viscous and nonlinear viscous non-Newtonian fluids. Journal of Mathematical physics, 2011, Vol. 52, iss. 5, p. 053102.

[4] Agranovich Yu.Ya., Khatskevich V.L. Mathematical Modeling of Nonlinearly Viscous Fluid Motion: Strong Solutions. Automation and Remote Control, 2012, Vol. 73, no. 1, pp. 171–180.

[5] Dmitrienko V.T., Zvyagin V.G. Topological Degree Method in the Equations of the Navier-Stokes Type. Abstract and Applied Analysis, 1997, Vol. 1, 2, pp. 1–45.

[6] Khatskevich V.L. Periodic solutions of differential inclusions with monotonous operators. [Xackevich V.L. Periodicheskie resheniya differencial'nyx vklyuchenij s monotonnymi operatorami]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 1993, Vol. 29, no. 4, pp. 725–727.

[7] Khatskevich V. L. Principle of averaging for monotonous differential inclusions. [Xackevich V.L. Princip usredneniya dlya monotonnyx differencial'nyx vklyuchenij]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 1997, Vol. 357, no. 1, pp. 26–28.

[8] Temam R. Navier-Stokes equation. [Temam R. Uravnenie Nav'e-Stoksa]. Moscow: Mir, 1981, 408 p.

[9] Ladyzhenskaya O.A. About finding of the minimum global attractors for Navier-Stokes

equation and other equations with partial derivatives. [Ladyzhenskaya O.A. O naxozhdenii minimal'nyx global'nyx attraktorov dlya uravneniya Nav'e-Stoksa i drugix uravnenij s chastnymi proizvodnymi]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 1987, Vol. 42, no. 6, pp. 25–68.

[10] Ladyzhenskaya O. A. About the dynamic system generated by the equations Navier-Stokes. [Ladyzhenskaya O.A. O dinamicheskoj sisteme, porozhdaemoj uravneniyami Nav'e-Stoksa]. *Zapiski nauchnyx seminarov Leningradskogo otdeleniya matematicheskogo instituta im. V.A. Steklova AN SSSR — Notes scientific seminars of the Leningrad branch of the mathematical Institute named after V.A. Steklov USSR*, 1972, Vol. 27, pp. 91–114.

Хацкевич Владимир Львович, заведующий кафедрой математики и информатики Института заочного экономического образования Воронежского государственного университета, доктор технических наук, профессор, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: vlkhats@mail.ru

Khatskevich Vladimir Lvovich, head of the Department of mathematics and Informatics of the Institute of correspondence education in Economics, Voronezh state University, doctor of technical Sciences, Professor, Voronezh, Russian Federation
E-mail: vlkhats@mail.ru