УДК 517.955

ФИНИТНОСТЬ НОСИТЕЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ С НЕОДНОРОДНЫМ ИСТОЧНИКОМ В ОБЛАСТЯХ ТИПА ОКТАНТА

А. Ф. Тедеев

Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова

Поступила в редакцию 09.02.2014 г.

Аннотация: В данной работе рассматривается параболическое уравнение диффузии в форме $\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(a(|x|) \cdot D(u^m)) + b(|x|)u^q$, где $m > 1$, $q > 0$, $a(s)$, $b(s)$ — некоторые непрерывно-дифференцируемые функции в $(0, \infty)$.

Изучается вопрос зависимости свойства конечной скорости распространения возмущении решения задачи Дирихле от функций $a(s)$, $b(s)$ и от геометрии рассматриваемой области. Основным инструментом исследования является подходящим образом подобранное весовое неравенство Гальярдо-Ниренберга, которое характеризует геометрические свойства области. При доказательстве основной теоремы используется усовершенствованный иттерактивный метод.В работе показано,что если $m < 2 + q$, то радиус носителя решения не зависит от геометрии рассматриваемой области. Зависимость от геометрии области может проявляться лишь при $m > 2 + q$.

Ключевые слова: параболическое уравнение, конечная скорость распространения возмущения, сильное решение, слабое решение.

FINITE SPEED OF PROPAGATION FOR THE DIFFERENTIAL DIFFUSION EQUATION WITH INHOMOGENEOUS SOURCE IN CONE – LIKE DOMAINS

A. F. Tedeev

Abstract: We study the class of parabolic equations of the form $\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(a(|x|) \cdot D(u^m))+ b(|x|)u^q$ where $m > 1$, $q > 0$, and $a(s)$, $b(s)$is positive continuous differentiable functions on $(0, \infty)$.

We examine under which conditions on behaviourof$a(s)$, $b(s)$ corresponding non – negative solution of the Dirichlet problem possess the finite speed of propagations.Our main technical tool in the derivation of optimal bounds of such solutions is a suitable weighted Nirenberg-Gagliardo type embedding, which in turn is connected to a weighted isoperimetric inequality characterizing the geometry of Q. In the proof of finite speed of propagation we use improved itteractive method. It is shown that if $m < 2 + q$, the radius of the carrier solution does not depend on the geometry of the considered domain. The dependence of the radius of the carrier solution from the geometry of the domain can take when $m > 2 + q$.

Keywords: parabolic equation, finite speed of propagation, strong solution, weak solution.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_N) \in R^N$,$N \geqslant 1$, $R_l^N = R^N \cap \{x_1, \ldots, x_l > 0\}$, $l \leqslant N$, $Du = (u_{x_1}, u_{x_2}, \ldots, u_{x_N})$.

Рассматривается следующая задача Коши – Дирихле:

$$u_t = \operatorname{div}(a(|x|) \cdot D(u^m)) + b(|x|)u^q, \tag{1}$$

$$(x,t) \in Q = R_l^N \times (0,\infty)$$

$$u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial R_l^N \times (0,\infty) \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in R_l^N. \tag{3}$$

Здесь $a(s)$ и $b(s)$ — неотрицательные непрерывно-дифференцируемые функции на положительной полуоси, удовлетворяющие условиям:

$$c_1|s|^\alpha \leqslant a(s) \leqslant c_2|s|^\alpha, \tag{4}$$

$$c_3|s|^\gamma \leqslant b(s) \leqslant c_4|s|^\gamma \tag{5}$$

при $\alpha \leqslant 0$, $\gamma \leqslant 0$, причем равенство $c_3 = c_4 = 0$ равносильно отсутствию источника.

Начальная функция $u_0(x)$ удовлетворяет условиям:

$$\operatorname{support} u_0(x) \subset B^l_{\rho_0}, \quad \int\limits_{R_l^N} u_0(x)dx < \infty, \quad \int\limits_{R_l^N} X_l u_0(x)dx < \infty, \quad u_0(x) \geqslant 0, \tag{6}$$

где $B^l_{\rho_0} = B_{\rho_0} \cap R_l^N$, B_{ρ_0} — шар с центром в начале координат, и радиусом ρ_o, $X_l = x_1 \cdot x_2, \dots x_l$.

Рассматриваемый класс параболических уравнений включает многие важные уравнения математической физики, например уравнение медленной диффузии при отсутствии источника ($c_3 = c_4 = 0$), уравнение диффузии с однородным источником ($\gamma = 0$), и т.д.

Со свойством финитности носителя связаны многие другие свойства: компактификация носителя решения, полное "затухание" решения за конечное время и т.д.

В случае отсутствия источника, из работ [3], [11] известно, что если $\operatorname{support} u_0(x) \subset B_{\rho_0}$ и $\int\limits_{R_l^N} u_0(x)dx < \infty$, то решение задачи Коши в области R^N обладает свойством финитности носителя при всех α, удовлетворяющих условию $0 < \alpha < \beta$, а при $\alpha > \beta$ решение не обладает указанным свойством, где $\beta = N(m-1)+2$ — постоянная Баренблатта. Более того в работах [2] [7] был поставлен вопрос о поведении носителя решения в случае однородного источника, т.е. когда $\gamma = 0$ и $c_3 = c_4 \neq 0$, $\alpha = 0$. Здесь же даны оценки размеров носителя обобщенного решения в R^N.

Целью данной работы является выяснение зависимости свойства финитности носителя решения от параметров задачи (1)–(3), а также от наличия неоднородного источника (параметров α и γ).

Чтобы сформулировать основной результат, введем несколько определений:

Определение 1. Под слабым решением задачи (1) – (3) в интервале времени $(0,\infty)$ мы понимаем измеримую функцию $u(x,t)$, обладающую следующими свойствами:

1. Для любого $t > 0$, $\rho > 0$ функция $u(x,t)$ принадлежит пространству

$$V = L_{2,loc}((0,\infty), W^1_{2,a(|x|)X_l}(B^l_\rho)) \cap C((0,\infty), L_{2,loc}(B^l_\rho)) \cap L_{2,loc}((0,\infty), L_{2,b(|x|)X_l}(B^l_\rho)).$$

2. Для любой финитной по x достаточно гладкой функции $\eta(x,t)$ выполнено интегральное

тождество

$$\int\limits_{R_l^N} u(x,t)\eta(x,t)dx + \sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^t\int\limits_{R_l^N} a(|x|)(u^m)_{x_i}\cdot\eta_{x_i}dxd\tau - \int\limits_0^t\int\limits_{R_l^N} b(|x|)u^q\eta dxd\tau =$$

$$= \int\limits_{R_l^N} u_0(x)\eta(x,0)dx + \int\limits_0^t\int\limits_{R_l^N} u(x,\tau)\eta_\tau(x,\tau)dxd\tau. \quad (7)$$

Определение 2. Измеримую функцию $u(x,\tau)$ назовем сильным решением задачи (1)-(3) в Q, если она является слабым решением задачи (1)-(3) в Q и $u_t \in L_2((0,\infty)\times B_\rho^l)$ для любого $\rho > 0$.

Определение 3. Будем говорить, что функция $u(x,\tau)$, являющаяся решением задачи (1)-(3), обладает свойством финитности носителя или свойством конечной скорости распространения возмущений, если для любого $t > 0$ функция $u(x,t)$ является финитной по переменной x.

Основной характеристикой для решения, обладающего свойством финитности носителя, является функция:

$$\varsigma(t) = \inf\{\rho : u(x,t) = 0 \quad \text{для} \quad |x| > \rho\}, \quad (8)$$

называемая радиусом носителя решения.

Необходимо также отметить, что при получении нужных нам интегральных соотношений мы будем умножать уравнение (1) на различные пробные функции с последующим интегрированием. Эти операции оправдываются выбором в интегральном тождестве (7) в качестве пробных функций срезок от стекловских усреднений решения, произведением нужных промежуточных операций и последующим предельным переходом по параметру усреднения в окончательном соотношении. Этот процесс стандартен и описан например в [4].

ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Основным результатом данной работы является следующее утверждение:

Теорема. Пусть $u(x,t)$ — сильное решение задачи Дирихле (1)-(3), где $u_0(x)$, $a(s)$ и $b(s)$ удовлетворяют условиям (4), (5), (6). Тогда если

1) $1 < m < q+2$, $0 < q < 1$, $\alpha \leqslant 0$, $\lambda \leqslant 0$,

то решение $u(x,t)$ — обладает свойством финитности носителя, и для радиуса носителя решения имеем оценку:

$$\varsigma(t) \leqslant c\left(\rho_0 + t^{\frac{m-q}{|\lambda|(m-1)+(|\alpha|+2)(1-q)}}\right),$$

если же

2) $m > 1$,$q > 1$, $\alpha \leqslant 0$, $\lambda \leqslant 0$,

то решение задачи (1)-(3) не обладает свойством финитности носителя.

Доказательство 1. Не ограничивая общность, мы будем предполагать, что $a(|x|) = |x|^\alpha$, $b(|x|) = |x|^\lambda$.

Рассмотрим произвольное $\rho > 4\rho_0$. Положим

$$\rho_n = \rho\left(1 + \xi(1 - 2^{-(n+1)})\right), \quad \overline{\rho_n} = \rho\left(\frac{1}{2} - \xi(1 - 2^{-(n+1)})\right), \quad n = 0,1,2,\ldots, \quad 0 < \xi < \frac{1}{4}.$$

Рассмотрим также последовательность гладких срезающих функций таких, что

$$\varsigma_n(x) = 1 \text{ для } \quad x \in B_{\rho_n}\backslash B_{\bar\rho_n}, \quad \varsigma_n(x) = 0 \text{ вне } \quad B_{\rho_{n+1}}\backslash B_{\bar\rho_{n+1}},$$

$$0 \leqslant \zeta_n(x) \leqslant 1, \quad |D\zeta_n| \leqslant \frac{C2^n}{\xi\rho}, \quad \left|\frac{\partial\zeta_n}{\partial x_j}\right| \cdot (X_l)_{x_j} \leqslant \frac{C2^{n+1}}{\rho^2} X_l. \tag{9}$$

Умножим обе части уравнения (1) на $X_l u(x,\tau) \cdot \zeta_n^{m+1}(x)$ и проинтегрируем по Q_t, $Q_t = (0,t) \times R_l^N$. После интегрирования по частям получим:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{R_l^N} \zeta_n^{m+1} u^2 X_l dx = -\int\limits_0^t \int\limits_{R_l^N} a(|x|) D(u^m) Du \cdot \zeta_n^{m+1} \cdot X_l dx d\tau -$$

$$-(m+1)\int\limits_0^t \int\limits_{R_l^N} a(|x|) D(u^m) D\zeta_n \cdot \zeta_n^m \cdot u X_l dx d\tau -$$

$$-\int\limits_0^t \int\limits_{R_l^N} a(|x|) D(u^m)(DX_l) \cdot \zeta_n^{m+1} \cdot u dx d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_{R_l^N} b(|x|) \zeta_n^{m+1} X_l u^{1+q} dx d\tau.$$

Здесь мы используем тот факт, что $\operatorname{support} \zeta_n \cap \operatorname{support} u_0 = \varnothing$ при любом $n = 0, 1, 2, \ldots$. Из последнего соотношения будем иметь:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{R_l^N} \zeta_n^{m+1} u^2 X_l dx + m\int\limits_0^t \int\limits_{R_l^N} a(|x|) X_l \zeta_n^{m+1} u^{m-1} |Du|^2 dx d\tau =$$

$$-(m+1)\int\limits_0^t \int\limits_{R_l^N} a(|x|) D(u^m) D\zeta_n \zeta_n^m u X_l dx d\tau - \int\limits_0^t \int\limits_{R_l^N} a(|x|) D(u^m) DX_l \zeta_n^{m+1} u dx d\tau +$$

$$+\int\limits_0^t \int\limits_{R_l^N} b(|x|) X_l \zeta_n^{m+1} u^{1+q} dx d\tau = I_1 + I_2 + I_3. \tag{10}$$

Представим I_1 в виде

$$I_1 = -m(m+1)\int\limits_0^t \int\limits_{R_l^N} a(|x|) u^m \cdot Du \cdot D\zeta_n \cdot \zeta_n^m X_l dx d\tau.$$

Используя неравенство Юнга для I_1 при любом $\varepsilon > 0$, получим оценку

$$|I_1| \leqslant \frac{m(m+1)}{2}\varepsilon^2 \int\limits_0^t \int\limits_{R_l^N} a(|x|) u^{m-1} \cdot |Du|^2 \cdot \zeta_n^{m+1} X_l dx d\tau +$$

$$+\frac{m(m+1)}{2\varepsilon^2}\int\limits_0^t \int\limits_{R_l^N} a(|x|) u^{m+1} \zeta_n^{m-1} \cdot |D\zeta_n|^2 \cdot X_l dx d\tau. \tag{11}$$

Так как

$$I_2 = -\frac{m}{(m+1)}\int\limits_0^t \int\limits_{R_l^N} a(|x|) D(u^{m+1}) \zeta_n^{m+1} DX_l dx d\tau,$$

то, применяя повторно интегрирование по частям, будем иметь:

$$I_2 = -\frac{m}{(m+1)}\int_0^t\int_{R_l^N}\left\{u^{m+1}\sum_{j=1}^N[a(|x|)\zeta_n^{m+1}\cdot(X_l)_{x_j}]_{x_j}\right\}dxd\tau =$$

$$= \frac{m}{m+1}\int_0^t\int_{R_l^N}u^{m+1}\left[\sum_{j=1}^N a(|x|)_{x_j}(X_l)_{x_j}\right]\zeta_n^{m+1}dxd\tau +$$

$$+ m\int_0^t\int_{R_l^N}u^{m+1}\left[\sum_{j=1}^N \zeta_{nx_j}(X_l)_{x_j}\right]\zeta_n^m a(|x|)dxd\tau +$$

$$+ \frac{m}{m+1}\int_0^t\int_{R_l^N}u^{m+1}a(|x|)\zeta_n^{m+1}\left(\sum_{j=1}^N (X_l)_{x_jx_j}\right)dxd\tau.$$

Так как $(X_l)_{x_jx_j} = 0$ и $(a(|x|))_{x_j} \leqslant 0$ при $j = 1, 2, \ldots, l$, то на основании (9) для I_2 имеем оценку

$$I_2 \leqslant \frac{c2^{n+1}}{\rho^{|\alpha|+2}}\int_0^t\int_{R_l^N}X_l u^{m+1}\zeta_n^m dxd\tau. \tag{12}$$

Применяя неравенство Гелдера к I_3 для некоторого s, удовлетворяющего условию

$$\frac{(m+1)^2}{4} < s < \frac{(m+1)^2}{2(q+1)},$$

получим:

$$I_3 \leqslant \left(\int_0^t\int_{R_l^N}b(|x|)^{\frac{2}{1-q}}\zeta_n^{\frac{2[(m+1)^2-2s(q+1)]}{(m+1)(1-q)}}X_l dxd\tau\right)^{\frac{1-q}{2}} \times \left(\int_0^t\int_{R_l^N}u^2\zeta_n^{\frac{4s}{m+1}}X_l dxd\tau\right)^{\frac{q+1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant t\left(\int_{B^l_{\rho_{n+1}}\setminus B^l_{\bar\rho_{n+1}}}b(|x|)^{\frac{2}{1-q}}X_l dx\right)^{\frac{1-q}{2}}\left(\sup_{0<\tau\leqslant t}\int_{R_l^N}u^2\zeta_n^{\frac{4s}{m+1}}X_l dx\right)^{\frac{q+1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant c(N,l,q,\lambda)\cdot\rho^{\lambda+\frac{(N+l)(1-q)}{2}}\cdot t\left(\sup_{0<\tau\leqslant t}\int_{R_l^N}u^2\zeta_n^{\frac{4s}{m+1}}X_l dx\right)^{\frac{q+1}{2}}. \tag{13}$$

Из (10) на основании (11), (12), (13) получим соотношение:

$$\frac{1}{2}\int_{R_l^N}\zeta_n^{m+1}u^2X_l dx + \left(m - \frac{m(m+1)}{2}\varepsilon^2\right)\times\int_0^t\int_{R_l^N}^{a(|x|)}X_l\zeta_n^{m+1}u^{m-1}\cdot|Du|^2dxd\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{m(m+1)}{2\varepsilon^2}\int\limits_0^t\int\limits_{R_l^N} a(|x|)u^{m+1}\zeta_n^{m-1}\cdot|D\zeta_n|^2X_l dxd\tau+$$

$$+\frac{c2^{n+1}}{\rho^{|\alpha|+2}}\int\limits_0^t\int\limits_{R_l^N} X_l u^{m+1}\zeta_n^m dxd\tau + c\rho^{\lambda+\frac{(N+l)(1-q)}{2}}\cdot t\left(\sup_{0<\tau\leqslant t}\int\limits_{R_l^N} u^2\zeta_n^{\frac{4s}{m+1}}X_l dx\right)^{\frac{q+1}{2}}. \qquad (14)$$

Полагая в неравенстве (14) $\varepsilon=\sqrt{\frac{1}{m+1}}$, и замечая, что $\zeta_n^{m-1}\leqslant\zeta_{n+1}^{2s}$, при s, удовлетворяющем условию:

$$\frac{(m+1)^2}{4}<s<\frac{(m+1)^2}{2(q+1)} \qquad (15)$$

будем иметь:

$$\int\limits_{R_l^N}\zeta_n^{m+1}u^2X_l dx+\int\limits_0^t\int\limits_{R_l^N} a(|x|)X_l\zeta_n^{m+1}u^{m-1}\cdot|Du|^2dxd\tau\leqslant$$

$$\leqslant\frac{c2^{2n}}{\rho^{|\alpha|+2}}\int\limits_0^t\int\limits_{R_l^N} u^{m+1}\zeta_{n+1}^{2S}X_l dxd\tau + c\rho^{\lambda+\frac{(N+l)(1-q)}{2}}\cdot t\left(\sup_{0<\tau\leqslant t}\int\limits_{R_l^N}^{u^2\zeta_n^{\frac{4s}{m+1}}X_l dx}\right)^{\frac{q+1}{2}}. \qquad (16)$$

Введем функцию $v_n=u^{\frac{m+1}{2}}\zeta_n^s$ и постоянную $\mu=\frac{4}{m+1}$, тогда при всех s, удовлетворяющих условию (15), после несложных преобразований из (16) получим:

$$\sup_{0<\tau\leqslant t}\int\limits_{R_l^N} v_n^\mu X_l dx+\int\limits_0^t\int\limits_{R_l^N} a((|x|))|Dv_n|^2X_l dxd\tau\leqslant$$

$$\leqslant\frac{c2^{2n}}{\rho^{|\alpha|+2}}\int\limits_0^t\int\limits_{R_l^N} v_{n+1}^2X_l dxd\tau + c\rho^{\lambda+\frac{(N+l)(1-q)}{2}}t\left(\sup_{0<\tau\leqslant t}\int\limits_{R_l^N} v_n^\mu X_l dx\right)^{\frac{q+1}{2}}. \qquad (17)$$

Используя весовое неравенство Соболева-Гальярдо-Ниренберга, будем иметь:

$$\int\limits_{R_l^N} X_l v_{n+1}^2dx\leqslant c\left(\int\limits_{R_l^N} X_l|Dv_{n+1}|^2dx\right)^B\left(\int\limits_{R_l^N} X_l v_{n+1}^\mu dx\right)^{\frac{2(1-B)}{\mu}}, \qquad (18)$$

где B определяется из условия:

$$\frac{N+l}{2}=\frac{(N+l-2)B}{2}+\frac{(N+l)(1-B)}{\mu}. \qquad (19)$$

Из (19) находим B и $1-B$

$$B=\frac{\beta_l-2}{\beta_l+2},\quad 1-B=\frac{4}{\beta_l+2}, \qquad (20)$$

$\beta_l = (N+l)(m-1)+2$ — аналог постоянной Баренблатта для областей вида R_l^N. Так как

$$\int\limits_{R_l^N} X_l|Dv_{n+1}|^2dx \leqslant ca(\rho)^{-1}\int\limits_{R_l^N} a(|x|)X_l|Dv_{n+1}|^2dx,$$

то на основании (18) получим оценку

$$\int\limits_{R_l^N} X_l v_{n+1}^2 dx \leqslant ca(\rho)^{-B}\left(\int\limits_{R_l^N} X_l a(|x|)|Dv_{n+1}|^2dx\right)^B\left(\int\limits_{R_l^N} X_l v_{n+1}^{\mu}dx\right)^{\frac{2(1-B)}{\mu}}. \qquad (21)$$

Проинтегрируем (21) по времени от 0 до t, затем применяя неравенство Гелдера к правой части полученного соотношения, будем иметь:

$$\int\limits_0^t\int\limits_{R_l^N} X_l v_{n+1}^2 dxd\tau \leqslant$$

$$\leqslant ca(\rho)^{-B}t^{1-B}\left(\int\limits_0^t\int\limits_{R_l^N} X_l a(|x|)|Dv_{n+1}|^2dxd\tau\right)^B\times\left(\sup_{0<\tau\leqslant t}\int\limits_{R_l^N} X_l v_{n+1}^{\mu}dx\right)^{\frac{2(1-B)}{\mu}}. \qquad (22)$$

Из (17) на основании (22) получим:

$$\sup_{0<\tau\leqslant t}\int\limits_{R_l^N} X_l v_n^{\mu}dx + \int\limits_0^t\int\limits_{R_l^N} X_l a(|x|)|Dv_n|^2dxd\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c(a(\rho)t)^{1-B}\cdot 2^{2n}}{\rho^2}\left(\int\limits_0^t\int\limits_{R_l^N} X_l a(|x|)|Dv_{n+1}|^2dxd\tau\right)^B\left(\sup_{0<\tau\leqslant t}\int\limits_{R_l^N} X_l v_{n+1}^{\mu}dx\right)^{\frac{2(1-B)}{\mu}} +$$

$$+c\rho^{\lambda+\frac{(N+l)(1-q)}{2}}\times t\left(\sup_{0<\tau\leqslant t}\int\limits_{R_l^N} X_l v_n^{\mu}dx\right)^{\frac{q+1}{2}}. \qquad (23)$$

Применим неравенство Юнга к правой части неравенства (23). При любом $\varepsilon>0$ получим оценку:

$$\sup_{0<\tau\leqslant t}\int\limits_{R_l^N} X_l v_n^{\mu}dx + \int\limits_0^t\int\limits_{R_l^N} a(|x|)X_l|Dv_n|^2dxd\tau \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_{R_l^N} a(|x|)X_l|Dv_{n+1}|^2dxd\tau + c\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{B}{1-B}}\frac{a(\rho)\cdot t\cdot 2^{\frac{2n}{1-B}}}{\rho^{\frac{2}{1-B}}}\left(\sup_{0<\tau\leqslant t}\int\limits_{R_l^N} X_l v_{n+1}^{\mu}dx\right)^{\frac{2}{\mu}} +$$

$$+c\rho^{\lambda+\frac{(N+l)(1-q)}{2}}\cdot t\left[\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}\int\limits_{R_l^N} v_n^{\mu}X_l dx\right]^{\frac{1+q}{2}}. \qquad (24)$$

Для краткости введем обозначения:

$$Y_n = \sup_{0<\tau\leqslant t} \int\limits_{R_l^N} X_l v_n^\mu dx, \quad Z_n = \int\limits_0^t \int\limits_{R_l^N} a(|x|) X_l |Dv_n|^2 dx d\tau,$$

$$c^* = c\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{B}{1-B}} \frac{a(\rho)\cdot t}{\rho^{\frac{2}{1-B}}}; \quad c^{**} = c\rho^{\lambda+\frac{(N+l)(1-q)}{2}} \cdot t.$$

При сделанных обозначениях неравенство (24) перепишется в виде:

$$Y_n + Z_n \leqslant \varepsilon Z_{n+1} + c^* 2^{\frac{2n}{1-B}} \cdot Y_{n+1}^{\frac{2}{\mu}} + c^{**} Y_n^{\frac{1+q}{2}}. \tag{25}$$

Проводя итерацию по n в неравенстве (25), и замечая, что Y_n — неубывающая последовательность, нетрудно вывести соотношение:

$$Y_0 \leqslant \varepsilon^n Z_n + c^* \left(\sum_{j=0}^{n-1} 2^{\frac{2j}{1-B}} \cdot \varepsilon^j\right) Y_n^{\frac{2}{\mu}} + c^{**} \left(\sum_{j=0n}^{n-1} \varepsilon^j\right) Y_n^{\frac{1+q}{2}}.$$

Подбирая ε соответствующим образом и переходя к пределу в полученном неравенстве, будем иметь:

$$Y_0 \leqslant c^* Y_\infty^{\frac{2}{\mu}} + c^{**} Y_\infty^{\frac{1+q}{2}}, \tag{26}$$

где

$$Y_\infty = \sup_{0<\tau\leqslant t} \int\limits_{R_l^N} X_l v_\infty^\mu dx = \sup_{0<\tau\leqslant t} \int\limits_{B^l_{\rho(1+\xi)} \backslash B^l_{\rho\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}} X_l u^2(x,\tau) dx.$$

Далее, подберем $\xi = \delta 2^{-j}$, где $0 < \delta < \frac{1}{4}$, и рассмотрим последовательности

$$\rho_j = \rho(1+\delta 2^{-j}), \quad \bar{\rho}_j = \rho\left(\frac{1}{2} - \delta 2^{-j}\right), \quad j = 0, 1, 2, \ldots.$$

Введем обозначения

$$U_j^l = B^l_{\rho_j} \backslash B^l_{\bar{\rho}_j}, \quad J_{j+1} = \sup_{0<\tau\leqslant t} \int\limits_{U_j^l} X_l u^2(x,\tau) dx.$$

Тогда из (26) получим соотношение:

$$J_{j+1} \leqslant c^* J_j^{\frac{2}{\mu}} + c^{**} J_j^{\frac{1+q}{2}}. \tag{27}$$

Подставляя значения c^* и c^{**} в (27), получим неравенство

$$J_{j+1} \leqslant \frac{ca(\rho)\cdot t\cdot 2^j}{\rho^{\frac{2}{1-B}}} \times \left(J_j^{\frac{2}{\mu}} + 2^{-j}\rho^{\lambda+\frac{(N+l)(1-q)}{2}+|\alpha|+\frac{2}{1-B}} \cdot J_j^{\left(1-\frac{m-q}{2}\right)} \cdot J_j^{\frac{2}{\mu}-1}\right). \tag{28}$$

Применим к последовательности J_j лемму (5.7) в [4]. Первое из неравенств (5.18) леммы (5.7) в [4] имеет вид (28). Второе неравенство (5.18) той же леммы после усиления перепишется в виде:

$$2^{-\frac{j+1}{1+\theta}} \rho^{\frac{1}{1+\theta}\left(\lambda+\frac{(N+l)(1-q)}{2}+|\alpha|+\frac{2}{1-B}\right)} \cdot J_{j+1}^{\left(1-\frac{m-q}{2}\right)\cdot\frac{1}{1+\theta}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{ca(\rho)\cdot t\cdot 2^j}{\rho^{\frac{2}{1-B}}}\cdot \rho^{\lambda+\frac{(N+l)(1-q)}{2}+|\alpha|+\frac{2}{1-B}}\cdot 2^{-j}\cdot J_j^{1-\frac{m-q}{2}}.$$

Повторно усиливая последнее неравенство, будем иметь:

$$2^{-\frac{j+1}{1+\theta}}\leqslant ct\rho^{\frac{\theta}{1+\theta}\left[\lambda+\frac{(N+l)(1-q)}{2}\right]-\frac{1}{1+\theta}\cdot\left(|\alpha|+\frac{2}{1-B}\right)}\cdot J_j^{\left(1-\frac{m-q}{2}\right)\cdot\frac{1}{1+\theta}}, \tag{29}$$

θ — некоторое положительное число.

Отметим, что если неравенство (29) не выполняется для всех $j=0,1,2,\ldots$, то либо $J_j\to 0$ при $j\to\infty$, либо неравенство (29) будет выполняться с константой $c\cdot 2^{j_0+1}$ при некотором $j_0>1$. В первом случае

$$J_j\to J_\infty=\int\limits_{B_\rho^l\setminus B_{\rho/2}^l} u^2X_l dx=0. \tag{30}$$

Откуда будет следовать, что $u(x,t)=0$ для почти всех $x:|x|>\frac{1}{2}\rho>2\rho_0$, и любом $t>0$. Это означает, что решение обладает свойством финитности носителя, и для радиуса носителя имеем оценку $\zeta(t)\leqslant 2\rho_0$ при любом $t>0$, т.е. первая часть теоремы в этом случае будет доказана.

Предположим, что в неравенстве (29) константа уже подобрана. Нам необходимо найти соотношения между ρ и t, при которых будет иметь место равенство (30). На основании упомянутой леммы эти соотношения выглядят следующим образом:

$$J_0\leqslant\left(\frac{ca(\rho)\cdot t}{\rho^{\frac{2}{1-B}}}\right)^{-\frac{2}{m-1}}\cdot 2^{-\frac{4}{(m-1)^2}}, \tag{31}$$

$$\rho^{\lambda+\frac{(N+l)(1-q)}{2}+|\alpha|+\frac{2}{1-B}}\cdot J_0^{\left(1-\frac{m-q}{2}\right)}\leqslant\left(\frac{ca(\rho)\cdot t}{\rho^{\frac{2}{1-B}}}\right)^{-\frac{2}{m-1}}\cdot 2^{-\frac{4}{(m-1)^2}}. \tag{32}$$

Неравенства (31) и (32) имеют место при $\theta=\frac{m-1}{3-m}$.

Вместо системы неравенств (31), (32) рассмотрим усиленную систему неравенств вида:

$$J_0\leqslant\left(\frac{ca(\rho)\cdot t}{\rho^{\frac{2}{1-B}}}\right)^{-\frac{2}{m-1}}\cdot 2^{-\frac{4}{(m-1)^2}}, \tag{33}$$

$$\rho^{\lambda+\frac{(N+l)(1-q)}{2}+|\alpha|+\frac{2}{1-B}}\cdot J_0^{\left(1-\frac{m-q}{2}\right)}\leqslant J_0. \tag{34}$$

Из (33) и (34) следует, что

$$\rho\geqslant ct^{\frac{m-q}{|\lambda|(m-1)+(|\alpha|+2)(1-q)}}.$$

Кроме того, так как $\rho>4\rho_0$, то $u(x,t)=0$ почти всюду для всех значений x, удовлетворяющих условию

$$|x|\geqslant 4\rho_0+ct^{\frac{m-q}{|\lambda|(m-1)+(|\alpha|+2)(1-q)}}.$$

Из последнего неравенства вытекает соотношение:

$$\zeta(t)\leqslant 4\rho_0+ct^{\frac{m-q}{|\lambda|(m-1)+(|\alpha|+2)(1-q)}},$$

что доказывает первую часть теоремы.

Доказательство 2. Предположим противное. Пусть решение задачи Дирихле (1)-(3) обладает свойством финитности носителя, и пусть $\zeta(t)$ — радиус носителя решения $u(x,t)$.

Положим

$$v(x,t) = \begin{cases} 1, \ |x| \leqslant \zeta(t), \\ 0, |x| > \zeta(t). \end{cases} \tag{35}$$

Далее пусть

$$v_h(x,t) = \frac{1}{h} \int\limits_t^{t+h} v(x,t) d\tau$$

— средние Стеклова функции $v(x,t)$ по переменной τ.

Усредняя функцию $v_h(x,t)$ по переменной xс помощью некоторого достаточно гладкого неотрицательного ядра $\omega(|\xi|)$, удовлетворяющего условиям:

$$\omega(|\xi|) = 0 \quad \text{при} \quad |\xi| \geqslant 1, \qquad \int\limits_{|\xi|\leqslant 1} \omega(|\xi|) d\xi = 1,$$

положим

$$v_{h,\varepsilon}(x,t) = \int\limits_{|x-y|\leqslant\varepsilon} \omega_\varepsilon(|x-y|) v_h(y,t) dy = \int\limits_{|x-y|\leqslant\varepsilon} \varepsilon^{-n} \omega\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) v_h(y,t) dy, \tag{36}$$

ε — произвольное положительное число. Основные свойства таких усреднений изучены например в [4].

Выберем (36) в качестве пробной функции в (7). Затем перейдем в полученном равенстве к пределу при $h \to 0$ и $\varepsilon \to 0$. После предельного перехода получим равенство:

$$\int\limits_{|x|\leqslant\zeta(t)} u(x,t) dx = \int\limits_{|x|\leqslant\rho_0} u_0(x) dx + \int\limits_0^t \int\limits_{|x|\leqslant\zeta(t)} b(|x|) u^q(x,\tau) dx d\tau.$$

Дифференцируя последнее равенство, получим соотношение

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{|x|\leqslant\zeta(t)} u(x,t) dx = \int\limits_{|x|\leqslant\zeta(t)} b(|x|) u^q(x,t) dx. \tag{37}$$

С другой стороны

$$\int\limits_{|x|\leqslant\zeta(t)} u(x,t) dx = \int\limits_{|x|\leqslant\zeta(t)} b^{-\frac{1}{q}}(|x|) \cdot b^{\frac{1}{q}}(|x|) u(x,t) dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{|x|\leqslant\zeta(t)} b(|x|) u^q(x,t) dx \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\int\limits_{|x|\leqslant\zeta(t)} b^{-\frac{1}{q-1}}(|x|) dx \right)^{\frac{q-1}{q}} =$$

$$= \left(\int\limits_{|x|\leqslant\zeta(t)} b(|x|) u^q(x,t) dx \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \zeta(t)^{\frac{|\lambda|}{q} + \frac{N(q-1)}{q}} \cdot \left(\frac{|\lambda|}{q-1} + N \right)^{-\frac{q-1}{q}}.$$

Из последнего неравенства на основании (37) имеем:

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{|x|\leqslant\zeta(t)} u(x,t) dx \geqslant \left(\frac{|\lambda|}{q-1} + N \right)^{q-1} \cdot \zeta(t)^{-(|\lambda| + N(q-1))} \times \left(\int\limits_{|x|\leqslant\zeta(t)} u(x,t) dx \right)^q. \tag{38}$$

Введем обозначение

$$E(t) = \int\limits_{|x|\leqslant\zeta(t)} u(x,t)dx,$$

тогда из (38) получим дифференциальное неравенство:

$$\frac{dE(t)}{dt} \geqslant \left(\frac{|\lambda|}{q-1}+N\right)^{q-1}\cdot\zeta(t)^{-(|\lambda|+N(q-1))}\cdot E^q(t).$$

Интегрируя полученное дифференциальное неравенство, будем иметь:

$$E(t) \geqslant \left[\frac{1}{E^{1-q}(0)-(q-1)\left(\frac{|\lambda|}{q-1}+N\right)^{q-1}\int\limits_0^t \zeta(t)^{-(|\lambda|+N(q-1))}d\tau}\right]^{\frac{1}{q-1}}, \qquad (39)$$

где

$$E(0) = \int\limits_{|x|\leqslant\rho_0} u_0(x)dx.$$

Интеграл, стоящий в знаменателе правой части неравенства (39), принимает каждое промежуточное значение от 0 до ∞. Поэтому существует такое конечное значение $t = t_0$, что при $t \to t_0 E(t) \to +\infty$.

Полученное соотношение противоречит глобальной разрешимости задачи (1)-(3).

Теорема доказана полностью.

Замечание. Во второй части теоремы, конечно, предполагается, что $q < q^*$, где q^* — критический показатель, обладающий свойствами: при $q < q^*$ решение задачи (1)-(3) глобально разрешимо, а при $q \geqslant q^*$ имеет место обострение решения задачи (1)–(3) за конечное время. Существование такого критического показателя доказано, например, в работах [7], [10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Антонцев С.Н. О характере возмущении, описываемых решениями многомерных вырождающихся параболических уравнений / С.Н. Антонцев // Динамика сплошной среды. — 1979. — вып. 40. – С. 114–122.

[2] Антонцев С.Н. О локализации решений нелинейных вырождающихся эллиптических и параболических уравнений / С.Н. Антонцев // Докл. Академии наук СССР. — 1987. — Т. 260, № 6. — С. 1289–1293.

[3] Калашников А.С. О понятии конечной скорости распространения возмущений / А.С. Калашников // Успехи математических наук. — 1979. — Т. 34, № 2. — С. 199–200.

[4] Ладыженская О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева. — М., 1967. — 736 с.

[5] Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений / А.А. Самарский, В.А. Галактионов, С.П. Курдюмов, А.П. Михайлов. — М.: Наука, 1987. — 480 с.

[6] Andreucci D., Tedeev A.F. Finite speed of propagation for the thin film equation and higher other parabolic equations with general nonlinearity / D. Andreucci, A.F. Tedeev // Interfaces and free boundaries. — 2001, Vol. 3, no. 3, pp. 233–264

[7] Andreucci D. On the Cauchy problem and initial traces for a class of evolution equations with strongly nonlinear sources / D. Andreucci, E. Di Benedetto // Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa. — 1991. — Vol. 18. — P. 363–441.

[8] Eidus D. The filtration equation in class of functions decreasing at infinity / D. Eidus, S. Katin // Proccedings of the American Mathematical Society. — 1994. — Vol. 120, № 3. — P. 825–830.

[9] Katin S. Disappearance of interfaces in finite time / S. Katin, R. Kersner // Mechanica. — 1993. — Vol. 28. — P. 117–120.

[10] Fuqita H. On some nonexistence and nonunfqueness theorems for nonlinear parabolic equations / H. Fuqeta // Proc. Symp. Pure Math. — 1969. — Vol. 18. — P. 105–113.

[11] Tedeev A.F. The interface blow – up phenomenon and local estimates for doubly degenerate parabolic equations / A.F. Tedeev // Applicable Analysis. — 2007. — Vol. 86, № 6. — P. 756–782.

REFERENCES

[1] Antontsev S.N. The character of perturbations described by solutions of multi-dimensional degenerate parabolic equations. [Antoncev S.N. O xaraktere vozmushhenii, opisyvaemyx resheniyami mnogomernyx vyrozhdayushhixsya parabolicheskix uravnenij]. *Dinamika sploshnoj sredy — Dynamics of Continuous Media*, 1979, iss. 40, pp. 114–122.

[2] Antontsev S.N. The localization of solutions of non-linear degenerate elliptic and parabolic equations. [Antoncev S.N. O lokalizacii reshenij nelinejnyx vyrozhdayushhixsya e'llipticheskix i parabolicheskix uravnenij]. *Doklady Akademii nauk SSSR — Reports of the Academy of Sciences of the USSR*, 1987, Vol. 260, no. 6, pp. 1289–1293.

[3] Kalashnikov A.S. The concept of a finite rate of propagation of a perturbation. [Kalashnikov A.S. O ponyatii konechnoj skorosti rasprostraneniya vozmushhenij]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 1979, Vol. 34, no. 2, pp. 199–200.

[4] Ladyzenskaia O.A., Solonnikov V.A., Uraltseva N.N. Linear and Quasilinear Equations of Parabolik Type. [Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'ceva N.N. Linejnye i kvazilinejnye uravneniya parabolicheskogo tipa]. Moscow, 1967, 736 c.

[5] Samarski A.A., Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P., Mikhailov A.P. Blou-Up in Quasilinear Parabolic Equations. [Samarskij A.A., Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P., Mixajlov A.P. Rezhimy s obostreniem v zadachax dlya kvazilinejnyx parabolicheskix uravnenij]. Moscow: Nauka, 1987, 480 p.

[6] Andreucci D., Tedeev A.F. Finite speed of propagation for the thin film equation and higher other parabolic equations with general nonlinearity. Interfaces and free boundaries, 2001, Vol. 3, no. 3, pp. 233–264.

[7] Andreucci D., Di Benedetto E. On the Cauchy problem and initial traces for a class of evolution equations with strongly nonlinear sources. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 1991, Vol. 18, pp. 363–441.

[8] Eidus D., Katin S. The filtration equation in class of functions decreasing at infinity. Proccedings of the American Mathematical Society, 1994, Vol. 120, no. 3, pp. 825–830.

[9] Katin S., Kersner R. Disappearance of interfaces in finite time. Mechanica, 1993, Vol. 28, pp. 117–120.

[10] Fuqita H. On some nonexistence and nonunfqueness theorems for nonlinear parabolic equations. Proc. Symp. Pure Math., 1969, Vol. 18, pp. 105–113.

[11] Tedeev A.F. The interface blow – up phenomenon and local estimates for doubly degenerate parabolic equations. Applicable Analysis, 2007, Vol. 86, № 6, pp. 756–782.

Тедеев Александр Федорович, кандидат физико–математических наук, старший преподаватель кафедры физики и астрономии, Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова, г. Владикавказ, Российская Федерация
E-mail: tedeev92@bk.ru
Тел.: 8–928–485–67–34

Tedeev Alexander Fedorovich, candidate of Physical and mathematical Sciences, senior teacher of the Department of physics and astronomy, North Ossetian state University named after K. L. Hetagurov, Vladikavkaz, Russian Federation
E-mail: tedeev92@bk.ru
Tel.: 8–928–485–67–34