УДК 517.925.7

ГРАНИЦЫ ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ ВОЗМУЩЕННОЙ ПОДВИЖНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

А. З. Пчелова

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Поступила в редакцию 13.06.2013 г.

Аннотация: рассматривается нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с полиномиальной правой частью пятой степени, в общем случае не разрешимое в квадратурах, решение которого обладает подвижными особыми точками. В ранее изданных авторских работах было дано доказательство теоремы существования и единственности решения рассматриваемого уравнения, получена оценка погрешности приближенного решения в случае точного значения подвижной особой точки и найдена область действия этих результатов. При решении задачи влияния возмущения подвижной особой точки на приближенное решение использовался классический подход (правило треугольника), который приводит к существенному уменьшению области применения приближенного решения. За счет нового подхода к оценке погрешности приближенного решения в окрестности приближенного значения подвижной особой точки, основанного на использовании элементов дифференциального исчисления, удается значительно увеличить область существования приближенного решения. Полученные результаты сопровождаются расчетами.

Ключевые слова: нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение, задача Коши, подвижная особая точка, возмущение, приближенное решение, точные границы, оценка погрешности, комплексная область.

THE APPLICATION AREA BORDERS OF APPROXIMATE SOLUTION IN THE NEIGHBORHOOD OF THE APPROXIMATE VALUE OF MOVING SINGULARITY FOR ONE DIFFERENTIAL EQUATION IN THE COMPLEX DOMAIN

A. Z. Pchelova

Abstract: The article considers a first-order nonlinear ordinary differential equation with moving singularity which is not solvable in quadratures in a common case. In previously published author's works was given to the proof of the theorem of existence and uniqueness of a solution of the equations, the error estimate of the approximate solution in the case of exact values of the movable singular point and found the scope of these results. In solving the problem of influence of perturbation moving singularity on the approximate solution of the classical approach is used (triangle rule), which leads to a significant reduction of application area of approximate solution. This article suggests a new approach to error estimation of an approximate solution of the equation in the neighborhood of the approximate value of moving singularity, based on the use of elements of differential calculus, which allows expanding this area. The obtained results are accompanied by examples calculations.

Keywords: nonlinear ordinary differential equation, Cauchy problem, moving singularity, perturbation, approximate solution, exact bounds, error estimation, complex domain.

ВВЕДЕНИЕ

Наличие подвижных особых точек (критических полюсов) свидетельствует о принадлежности рассматриваемого уравнения к классу дифференциальных уравнений, не разрешимых в квадратурах в общем случае, для решения которых на данный момент существуют только приближенные методы. Эти методы связаны с исследованием влияния возмущения подвижной особой точки на приближенное решение. При получении оценок приближенного решения существенно уменьшается область его применения. В связи с этим возникает необходимость в поиске нового подхода к оценке приближенного решения.

МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Применяется метод построения приближенных решений нелинейных дифференциальных уравнений с подвижными особыми точками алгебраического типа, представленный в работах [1]–[9], основанный на методах аналитической теории дифференциальных уравнений, вычислительной математики и математического анализа.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Согласно [8] для нахождения приближенного решения нелинейного дифференциального уравнения с подвижными особыми точками алгебраического типа требуется решение следующих задач:

1) нахождение подвижных особых точек решения уравнения с заданной точностью;
2) построение приближенного решения уравнения в области мероморфности.

В работе [10] решена вторая задача для уравнения в нормальной форме

$$w'(z) = w^5(z) + r(z) \tag{1}$$

с начальным условием

$$w(z_0) = w_0, \tag{2}$$

к которому приводится с помощью некоторой замены переменных вышеупомянутое дифференциальное уравнение

$$w'(z) = \sum_{j=0}^{5} f_j(z)\, w^j(z).$$

Доказана теорема существования и единственности решения

$$w(z) = (z^* - z)^{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z^* - z)^{n/4} \tag{3}$$

задачи Коши (1)–(2), где $\rho = -1/4$, $C_0 \neq 0$; получена оценка погрешности приближенного решения

$$w_N(z) = \sum_{n=0}^{N} C_n (z^* - z)^{(n-1)/4}, \ \ C_0 \neq 0, \tag{4}$$

а также проведено исследование влияния возмущения подвижной особой точки на приближенное решение (4), в результате чего оно принимает вид

$$\widetilde{w}_N(z) = \sum_{n=0}^{N} \widetilde{C}_n (\widetilde{z}^* - z)^{(n-1)/4}, \ \ \widetilde{C}_0 \neq 0. \tag{5}$$

Для приближенного решения (5) получена оценка погрешности. При этом выяснилось, что область существования приближенного решения в окрестности приближенного значения подвижной особой точки значительно уменьшилась по сравнению с областью для ряда (3) в теореме существования и единственности решения в окрестности подвижной особой точки [10]. Воспользуемся идеей для получения оценки приближенного решения (5), предложенной в работах [6], [8], основанной на замене приращения функции выражением дифференциала [11], которая позволяет существенно увеличить область применения этого приближенного решения и получить ее точные границы.

В следующей теореме понадобится величина ρ_3, определяемая по формуле

$$\rho_3 = \min\{\rho_1, \ \rho_2\},$$

где

$$\rho_2 = \frac{1}{\sqrt[5]{2^8(M+1)^4}}\,, \quad M = \sup_n \frac{|r^{(n)}(z^*)|}{n\,!}, \quad n = 0, \ 1, \ 2 \ \ldots \quad ,$$

а ρ_1 определяет область для представления функции $r(z)$ в степенной ряд [10].

Теорема. *Пусть выполняются следующие условия:*

1) $r(z) \in C^1$ в области $|\widetilde{z}^* - z| < \rho_3$, где $\rho_3 = const > 0$ и $\widetilde{z}^*$ — приближенное значение подвижной особой точки решения $w(z)$ задачи Коши (1)–(2);

2) существует такое M_1, что $\frac{|r^{(n)}(\widetilde{z}^*)|}{n\,!} \leqslant M_1$, где $M_1 = const$, $n = 0, 1, 2, \ldots$;

3) $|\widetilde{z}^*| \ \leqslant \ |z^*|$;

4) известна оценка погрешности значения $\widetilde{z}^* : | \ z^* - \widetilde{z}^* \ | \ \leqslant \Delta\,\widetilde{z}^*$;

5) $\Delta\widetilde{z}^* < \frac{1}{\sqrt[5]{2^8(M_2+\Delta M+1)^4}}$, где

$$M_2 = \sup_n \frac{|r^{(n)}(\widetilde{z}^*)|}{n\,!}, \quad \Delta M = \left(\sup_{n,\,U} \frac{|r^{(n+1)}(z)|}{n\,!} \right) \Delta\,\widetilde{z}^*,$$

$$n = 0, \ 1, \ 2, \ldots; \quad U = \{ \ z : \ \ |\widetilde{z}^* - z| \ \leqslant \Delta\,\widetilde{z}^*\}.$$

Тогда для приближенного решения (5) задачи (1)–(2) в области

$$G = G_1 \cap G_2 \cap G_3 \tag{6}$$

справедлива оценка погрешности

$$\Delta\,\widetilde{w}_N(z) \leqslant \sum_{j=1}^{4} \Delta_j,$$

где

$$\Delta_1 = \frac{\Delta\,\widetilde{z}^*}{4\sqrt{2}\,|\widetilde{z}_1^* - z|^{5/4}},$$

$$\Delta_2 \leqslant \frac{\Delta\widetilde{z}^*(M_2 + \Delta M + 1)}{1 - 4\,(M_2 + \Delta M + 1)\,|\widetilde{z}_2^* - z|^{5/4}} \sum_{j=0}^{4} \frac{|\widetilde{z}_2^* - z|^{j/4}}{9 + j},$$

$$\Delta_3 \leqslant \frac{\Delta M \, |\widetilde{z}_2^* - z|}{1 - 4\,(M_2 + \Delta M + 1)\,|\widetilde{z}_2^* - z|^{5/4}} \sum_{j=0}^{4} \frac{|\widetilde{z}_2^* - z|^{j/4}}{9+j},$$

$$\Delta_4 \leqslant \frac{2^{-2}\,|\widetilde{z}^* - z|^{N/4}}{1 - 4\,(M_2 + 1)\,|\widetilde{z}^* - z|^{5/4}} \ \sum_{j=0}^{4} \frac{(4\,(M_2+1))^{\ [(N+1+j)/5]}}{N+5+j}\ |\widetilde{z}^* - z|^{j/4},$$

при этом

$$|\widetilde{z}_1^*| = |\widetilde{z}^*| - \Delta\,\widetilde{z}^*, \quad |\widetilde{z}_2^*| = |\widetilde{z}^*| + \Delta\,\widetilde{z}^*, \quad \arg\widetilde{z}_1^* = \arg\widetilde{z}_2^* = \arg\widetilde{z}^*,$$

$$G_1 = \{\, z \ : \ |z| < |\widetilde{z}_1^*|\}\,, \quad G_2 = \left\{ z \ : \ |\widetilde{z}_2^* - z| < \frac{1}{\sqrt[5]{2^8(M_2 + \Delta M + 1)^4}} \right\},$$

$$G_3 = \{\, z \ : \ |\widetilde{z}^* - z| < \rho_3\}\,.$$

Доказательство. Оценим

$$\Delta\,\widetilde{w}_N(z) = \ |w(z) - \widetilde{w}_N(z)| \ \leqslant \ |w(z) - \widetilde{w}(z)| + |\widetilde{w}(z) - \widetilde{w}_N(z)|.$$

При оценке выражения $|\widetilde{w}(z) - w(z)|$, в соответствии с [11], заменяем приращение функции выражением дифференциала:

$$|w(z) - \widetilde{w}(z)| \leqslant \sup_U \left| \frac{\partial\,\widetilde{w}(z)}{\partial\,\widetilde{z}^*} \right| \ \Delta\widetilde{x}^* + \sum_{n=0}^{\infty} \sup_U \left| \frac{\partial\,\widetilde{w}(z)}{\partial\,\widetilde{C}_n} \right| \ \Delta\widetilde{C}_n,$$

где $U = \{\, z : \ |\widetilde{z}^* - z| \ \leqslant \Delta\,\widetilde{z}^*\}$.

В силу условия 2 этой теоремы существует такое M_2, что

$$M_2 = \sup_n \frac{|r^{(n)}(\widetilde{z}^*)|}{n\,!}. \tag{7}$$

при этом согласно [11]

$$\Delta M = \left(\sup_{n,\,U} \frac{|r^{(n+1)}(z)|}{n\,!} \right) \ \Delta\,\widetilde{z}^*, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots\ . \tag{8}$$

Тогда

$$\sup_U \left| \frac{\partial\,\widetilde{w}(z)}{\partial\,\widetilde{z}^*} \right| \ \Delta\widetilde{z}^* = \sup_U \left| \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{C}_n \, \frac{n-1}{4} \ (\widetilde{z}^* - z)^{(n-5)/4} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|n-1|}{4} \ \ \sup_U |\widetilde{C}_n| \ \ \sup_U |\widetilde{z}^* - z|^{(n-5)/4},$$

причем

$$\sup_U \ |\widetilde{z}^* - z|^{(n-5)/4} = \begin{cases} |\widetilde{z}_1^* - z|^{(n-5)/4}, & n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4; \\ |\widetilde{z}_2^* - z|^{(n-5)/4}, & n = 5,\ 6,\ \dots \end{cases}$$

и

$$\sup_U \left| \frac{\partial\,\widetilde{w}(z)}{\partial\,\widetilde{C}_n} \right| = \sup_U \ |\widetilde{z}^* - z|^{(n-1)/4} = \begin{cases} |\widetilde{z}_1^* - z|^{(n-1)/4}, & n = 0; \\ |\widetilde{z}_2^* - z|^{(n-1)/4}, & n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots\ , \end{cases}$$

где

$$|\widetilde{z}_1^*| = |\widetilde{z}^*| - \Delta\,\widetilde{z}^*, \quad |\widetilde{z}_2^*| = |\widetilde{z}^*| + \Delta\,\widetilde{z}^*, \quad \arg\widetilde{z}_1^* = \arg\widetilde{z}_2^* = \arg\widetilde{z}^*.$$

Принимая во внимание (7), (8) и оценки для коэффициентов C_n, полученные в работе [10],

$$|C_n| \leqslant \frac{2^{2\,[n/5]-2}}{n+4}(M+1)^{[n/5]} = \upsilon_n, \tag{9}$$

здесь $M = \sup\limits_n \frac{|r^{(n)}(z^*)|}{n!}$, а также с учетом того, что для коэффициентов структуры решения

$$\widetilde{w}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{C}_n(\widetilde{z}^* - z)^{(n-1)/4}, \;\; \widetilde{C}_0 \neq 0,$$

имеем выражения [10]

$$\widetilde{C}_n = \widetilde{C}_n\,(\,\widetilde{A}_0,\, \widetilde{A}_1,\, \ldots,\, \widetilde{A}_m), \quad n = 1,\, 2,\, \ldots\,, \quad m = 1,\, 2,\, \ldots\,,$$

где правые части этих соотношений представляют собой полиномы с положительными коэффициентами относительно коэффициентов разложения функции $r(z)$ в регулярный ряд, для которых получаем

$$\sup_U |\widetilde{C}_n| \;\leqslant \widetilde{C}_n\,(\,|A_0 + \Delta\widetilde{A}_0|,\, |A_1 + \Delta\widetilde{A}_1| + \ldots\,)\, \leqslant \widetilde{C}_n\,(M_2 + \Delta M + 1) = \widetilde{\upsilon}_n.$$

Следовательно,

$$|w(z) - \widetilde{w}(z)| \leqslant \Delta\widetilde{z}^* \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|n-1|}{4}\, \widetilde{\upsilon}_n\, \sup_U\, |\widetilde{z}^* - z|^{(n-5)/4} + \sum_{n=0}^{\infty} \Delta\widetilde{C}_n\, \sup_U\, |\widetilde{z}^* - z|^{(n-1)/4}.$$

Поскольку [10]

$$C_0 = \widetilde{C}_0 = \pm 1/\sqrt{2}, \quad C_j = \widetilde{C}_j = 0, \quad j = 1, \ldots, 4, \quad \Delta\widetilde{C}_k = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, 4,$$

тогда будем иметь

$$|w(z) - \widetilde{w}(z)| \leqslant \frac{\Delta\widetilde{z}^*}{4\sqrt{2}\,|\widetilde{z}_1^* - z|^{5/4}} + \Delta\widetilde{z}^* \sum_{n=5}^{\infty} \widetilde{\upsilon}_n |\widetilde{z}_2^* - z|^{(n-5)/4} + \sum_{n=5}^{\infty} \Delta\widetilde{C}_n |\widetilde{z}_2^* - z|^{(n-1)/4}.$$

Таким образом, для выражения $\Delta\, \widetilde{w}_N(z)$ получаем

$$\Delta\, \widetilde{w}_N(z) = \;|w(z) - \widetilde{w}_N(z)|\; \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\Delta\,\widetilde{z}^*}{4\sqrt{2}\,|\widetilde{z}_1^* - z|^{5/4}} + \Delta\,\widetilde{z}^* \sum_{n=5}^{\infty} \widetilde{\upsilon}_n\, |\widetilde{z}_2^* - z|^{(n-5)/4} + \sum_{n=5}^{\infty} \Delta\widetilde{C}_n\, |\widetilde{z}_2^* - z|^{(n-1)/4} +$$

$$+ \sum_{n=N+1}^{\infty} |\widetilde{C}_n|\; |\widetilde{z}^* - z|^{(n-1)/4} = \sum_{j=1}^{4} \Delta_j,$$

отсюда

$$\Delta_1 = \frac{\Delta\,\widetilde{z}^*}{4\sqrt{2}\,|\widetilde{z}_1^* - z|^{5/4}}.$$

Переходим к оценке выражения Δ_2. С учетом структуры оценок (9) для $\widetilde{\upsilon}_n$ получаем

$$\Delta_2 = \Delta\widetilde{z}^* \sum_{n=5}^{\infty} \widetilde{\upsilon}_n\, |\widetilde{z}_2^* - z|^{(n-5)/4} = \;\Delta\widetilde{z}^* \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{\upsilon}_{5k}\, |\widetilde{z}_2^* - z|^{5(k-1)/4} +$$

$$+\Delta\widetilde{z}^{*}\sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{v}_{5k+1}\,|\widetilde{z}_2^{*}-z|^{(5k-4)/4}+\Delta\widetilde{z}^{*}\sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{v}_{5k+2}\,|\widetilde{z}_2^{*}-z|^{(5k-3)/4}+$$

$$+\Delta\widetilde{z}^{*}\sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{v}_{5k+3}\,|\widetilde{z}_2^{*}-z|^{(5k-2)/4}+\Delta\widetilde{z}^{*}\sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{v}_{5k+4}\,|\widetilde{z}_2^{*}-z|^{(5k-1)/4}=$$

$$=\Delta\widetilde{z}^{*}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k-2}}{5k+4}\,(M_2+\Delta M+1)^{k}|\widetilde{z}_2^{*}-z|^{5(k-1)/4}+$$

$$+\Delta\widetilde{z}^{*}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k-2}}{5k+5}\,(M_2+\Delta M+1)^{k}|\widetilde{z}_2^{*}-z|^{(5k-4)/4}+$$

$$+\Delta\widetilde{z}^{*}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k-2}}{5k+6}\,(M_2+\Delta M+1)^{k}|\widetilde{z}_2^{*}-z|^{(5k-3)/4}+$$

$$+\Delta\widetilde{z}^{*}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k-2}}{5k+7}\,(M_2+\Delta M+1)^{k}|\widetilde{z}_2^{*}-z|^{(5k-2)/4}+$$

$$+\Delta\widetilde{z}^{*}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k-2}}{5k+8}\,(M_2+\Delta M+1)^{k}|\widetilde{z}_2^{*}-z|^{(5k-1)/4}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\Delta\widetilde{z}^{*}\,(M_2+\Delta M+1)}{1-4\,(M_2+\Delta M+1)\,|\widetilde{z}_2^{*}-z|^{5/4}}\;\sum_{j=0}^{4}\frac{|\widetilde{z}_2^{*}-z|^{j/4}}{9+j}.$$

Оценим выражение Δ_3. Воспользуемся оценками для $\Delta\widetilde{C}_n$, полученными в работе [10],

$$\Delta\widetilde{C}_n\leqslant\frac{2^{2\,[n/5]-2}}{n+4}\Delta M(M_2+\Delta M+1)^{[n/5]-1}.$$

Итак,

$$\Delta_3=\sum_{n=5}^{\infty}\Delta\widetilde{C}_n\,|\widetilde{z}_2^{*}-z|^{(n-1)/4}=\sum_{k=1}^{\infty}\Delta\widetilde{C}_{5k}|\widetilde{z}_2^{*}-z|^{(5k-1)/4}+\sum_{k=1}^{\infty}\Delta\widetilde{C}_{5k+1}|\widetilde{z}_2^{*}-z|^{5k/4}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\Delta\widetilde{C}_{5k+2}|\widetilde{z}_2^{*}-z|^{(5k+1)/4}+\sum_{k=1}^{\infty}\Delta\widetilde{C}_{5k+3}|\widetilde{z}_2^{*}-z|^{(5k+2)/4}+\sum_{k=1}^{\infty}\Delta\widetilde{C}_{5k+4}|\widetilde{z}_2^{*}-z|^{(5k+3)/4}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k-2}}{5k+4}\,\Delta M\,(M_2+\Delta M+1)^{k-1}|\widetilde{z}_2^{*}-z|^{(5k-1)/4}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k-2}}{5k+5}\,\Delta M\,(M_2+\Delta M+1)^{k-1}|\widetilde{z}_2^{*}-z|^{5k/4}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k-2}}{5k+6}\,\Delta M\,(M_2+\Delta M+1)^{k-1}|\widetilde{z}_2^{*}-z|^{(5k+1)/4}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k-2}}{5k+7}\,\Delta M\,(M_2+\Delta M+1)^{k-1}|\widetilde{z}_2^{*}-z|^{(5k+2)/4}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k-2}}{5k+8}\,\Delta M\,(M_2+\Delta M+1)^{k-1}|\widetilde{z}_2^{*}-z|^{(5k+3)/4}\leqslant$$

$$\leqslant \frac{\Delta M\,|\widetilde{z}_2^* - z|}{1 - 4\,(M_2 + \Delta M + 1)\,|\widetilde{z}_2^* - z|^{5/4}} \sum_{j=0}^{4} \frac{|\widetilde{z}_2^* - z|^{j/4}}{9 + j}.$$

Наконец, согласно результатам работы [10] для выражения Δ_4 верна оценка

$$\Delta_4 \leqslant \frac{2^{-2}\,|\widetilde{z}^* - z|^{N/4}}{1 - 4\,(M_2 + 1)\,|\widetilde{z}^* - z|^{5/4}} \sum_{j=0}^{4} \frac{(4\,(M_2 + 1))^{\,[(N+1+j)/5]}}{N + 5 + j}\,|\widetilde{z}^* - z|^{j/4}.$$

Заметим, что оценка для Δ_1 справедлива в области $G_1 = \{\,z\,:\,|\,z|\,<|\widetilde{z}_1^*|\}$, оценки для Δ_2 и Δ_3 — в области $G_2 = \left\{z\,:\,|\widetilde{z}_2^* - z| < \frac{1}{\sqrt[5]{2^8(M_2+\Delta M+1)^4}}\right\}$, а оценка для Δ_4 — в области $G_3 = \{\,z\,:\,|\widetilde{z}^* - z| < \rho_3\}$. Следовательно, оценка для $\Delta\widetilde{w}_N(z)$ верна в области (6). Теорема доказана.

Замечание. Теорема справедлива в области (6), где

$$G_1 = \{\,z\,:\,|z|\,>|\widetilde{z}_1^*|\,\},\quad |\widetilde{z}_1^*| = |\widetilde{z}^*| + \Delta\,\widetilde{z}^*,\quad |\widetilde{z}_2^*| = |\widetilde{z}^*| - \Delta\,\widetilde{z}^*,\quad \arg\widetilde{z}_1^* = \arg\widetilde{z}_2^* = \arg\widetilde{z}^*,$$

если вместо условия 3 этой теоремы выполняется условие $|\widetilde{z}^*|\,\geqslant\,|z^*|$.

Пример. Найдем приближенное решение задачи Коши (1)–(2), где $r(z)\equiv 0$ и $w(i) = (\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}})/2$, в окрестности приближенного значения подвижной особой точки $\widetilde{z}^*$.

Решение. Задача имеет точное решение $w(z) = 1/\sqrt[4]{3i - 4z}$; $z^* = 0{,}75\,i$ — точное значение подвижной особой точки. Пусть $\widetilde{z}^* = 0{,}0001 + 0{,}7478i$ — приближенное значение подвижной особой точки, тогда $\Delta\widetilde{z}^* = 0{,}0022$. Значение $z_1 = 0{,}00008 + 0{,}63000i$ попадает в область действия теоремы. Рассмотрим случай $C_0 = 1/\sqrt{2}$.

Результаты расчетов для одного листа римановой поверхности представлены в табл. 1.

Таблица 1. *Оценка приближенного решения уравнения в окрестности возмущенного значения подвижной особой точки в комплексной области*

z_1	$w(z_1)$	$\widetilde{w}_3(z_1)$	Δ	Δ'	Δ''
$0,00008 + 0,63000\,i$	$1,10987 - 0,45995i$	$1,11512 - 0,46185\,i$	0,0056	0,0506	0,0074

Где $w(z_1)$ — значение точного решения, $\widetilde{w}_3(z_1)$ — значение приближенного решения, Δ — абсолютная погрешность, Δ' — априорная погрешность, найденная по теореме, Δ'' — апостериорная погрешность.

С помощью доказанной теоремы можно решить и обратную задачу теории погрешности — определить значение N по заданной точности ε приближенного решения. Так, для $\varepsilon = 0{,}0074$ получаем $N = 15$. Поскольку все производные функции $r(z)$ равны нулю, поэтому достаточно ограничиться значением $N = 3$ в (5). При этом получаем апостериорную погрешность для $\widetilde{w}_3(z_1)$, равную значению $\varepsilon = 0{,}0074$.

В следующей табл. 2 приведено сравнение результатов, полученных по теореме настоящей работы и по теореме 3 из работы [10]. Значение $z_2 = 0{,}00010 + 0{,}73200i$ попадает в область действия указанных выше теорем.

Таблица 2. *Сравнение оценок приближенного решения уравнения в окрестности возмущенного значения подвижной особой точки в комплексной области*

z_2	$w(z_2)$	$\widetilde{w}_3(z_2)$	$\lvert w - \widetilde{w}_3\rvert$	Δ'_I	Δ'_{II}
$0,00010 + 0,73200\,i$	$1,78252 - 0,74119\,i$	$1,84265 - 0,76318\,i$	0,0640	0,0955	0,0883

Где $w(z_2)$ — значение точного решения, $\widetilde{w}_3(z_2)$ — значение приближенного решения, $|w-\widetilde{w}_3|$ — абсолютная погрешность, Δ'_I — априорная погрешность, найденная по теореме 3 из работы [10], Δ'_{II} — априорная погрешность, найденная по теореме настоящей работы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенные исследования позволяют значительно увеличить область применения приближенного решения (5) задачи Коши (1)–(2) в окрестности возмущенного значения подвижной особой точки по сравнению с результатами работы [10] и найти точные границы этой области. При этом представленные расчеты в таблице 2 подтверждают адекватность результата теоремы этой работы с результатом теоремы 3 из работы [10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Орлов В.Н. Исследование приближенного решения второго уравнения Пенлеве / В.Н. Орлов, Н.А. Лукашевич // Дифференц. уравнения. — 1989. — Т. 25, № 10. — С. 1829–1832.

[2] Орлов В.Н. Об одном конструктивном методе построения первой и второй мероморфных трансцендентных Пенлеве / В.Н. Орлов, В.П. Фильчакова // Симетрійні та аналітичні методи в математичній фізиці. ІМ НАН України. — Киев. — 1998. — Т. 19. — С. 155–165.

[3] Орлов В.Н. О приближенном решении первого уравнения Пенлеве / В.Н. Орлов // Вестник Казанского государственного технического университета им. А. Н. Туполева. — 2008. — № 2. — С. 42–46.

[4] Орлов В.Н. Метод приближенного решения дифференциального уравнения Риккати / В.Н. Орлов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. — 2008. — № 63. — С. 102–108.

[5] Орлов В.Н. Об одном методе приближенного решения матричных дифференциальных уравнений Риккати / В.Н. Орлов // Вестник Московского авиац. ин-та. — 2008. — Т. 15, № 5. — С. 128–135.

[6] Орлов В.Н. Точные границы области применения приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности приближенного значения подвижной особой точки / В.Н. Орлов // Вестник Воронежского государственного технического университета. — 2009. — Т. 5, № 10. — С. 192–195.

[7] Орлов В.Н. Математическое моделирование решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности подвижной особой точки / В.Н. Орлов, С.А. Редкозубов // Известия института инженерной физики. — 2010. — № 4 (18). — С. 2–6.

[8] Орлов В.Н. Точные границы для приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности приближенного значения подвижной особой точки в комплексной области / В.Н. Орлов // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. — 2010. — № 2 (8). — С. 399–405.

[9] Орлов В.Н. Метод приближенного решения скалярного и матричного дифференциальных уравнений Риккати / В.Н. Орлов. — Чебоксары: Перфектум, 2012. — 112 с.

[10] Орлов В.Н. Влияние возмущения подвижной особой точки на приближенное решение одного нелинейного дифференциального уравнения в комплексной области / В.Н. Орлов, А.З. Пчелова // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. — 2013. — № 1 (15). — С. 171–181.

[11] Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов. — М.: Наука, 1975. — 632 с.

REFERENCES

[1] Orlov V.N., Lukashevich N.A. Studies of the approximate solution of the second Painleve equation. [Orlov V.N., Lukashevich N.A. Issledovanie priblizhennogo resheniya vtorogo uravneniya

Penleve]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 1989, Vol. 25, no. 10, pp. 1829–1832.

[2] Orlov V.N., Filchakova V.P. About one constructive method of first and second Painleve transcendental meromorphic. [Orlov V.N., Fil'chakova V.P. Ob odnom konstruktivnom metode postroeniya pervoj i vtoroj meromorfnyx transcendentnyx Penleve]. *Simetrijni ta analitichni metodi v matematichnij fizici. IM NAN Ukraini — Symmetry and Analytic Method in matetychnly physics. IM NAN Ukraine*, 1998, Vol. 19, pp. 155–165.

[3] Orlov V.N. About the approximate solution of the first Painleve equation. [Orlov V.N. O priblizhennom reshenii pervogo uravneniya Penleve]. *Vestnik Kazanskogo gosudarstvennogo texnicheskogo universiteta im. A. N. Tupoleva — Vestnik of A. Tupolev Kazan State Technical University*, 2008, no. 2, pp. 42–46.

[4] Orlov V.N. The method for the approximate solution of Riccati differential equation. [Orlov V.N. Metod priblizhennogo resheniya differencial'nogo uravneniya Rikkati]. *Nauchno-texnicheskie vedomosti SPbGPU — Scientific and technical vedomosti of the St. Petersburg State Polytechnical University*, 2008, no. 63, pp. 102–108.

[5] Orlov V.N. About one method for the approximate solution of matrix Riccati differential equations. [Orlov V.N. Ob odnom metode priblizhennogo resheniya matrichnyx differencial'nyx uravnenij Rikkati]. *Vestnik Moskovskogo aviac. in-ta — Vestnik of the Moscow Aviation Institute*, 2008, Vol. 15, no. 5, pp. 128–135.

[6] Orlov V.N. Precise boundaries of the area of approximate solutions of Abel differential equation in the neighborhood of approximate value of movable special point. [Orlov V.N. Tochnye granicy oblasti primeneniya priblizhennogo resheniya differencial'nogo uravneniya Abelya v okrestnosti priblizhennogo znacheniya podvizhnoj osoboj tochki]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo texnicheskogo universiteta — Vestnik of the Voronezh State Technical University*, 2009, Vol. 5, no. 10, pp. 192–195.

[7] Orlov V.N., Redkozubov S.A. Mathematical modeling of the Abel differential equation in the neighborhood of movable special point. [Orlov V.N., Redkozubov S.A. Matematicheskoe modelirovanie resheniya differencial'nogo uravneniya Abelya v okrestnosti podvizhnoj osoboj tochki]. *Izvestiya instituta inzhenernoj fiziki — Izvastia of the Institute of Engineering Physics*, 2010, no. 4 (18), pp. 2–6.

[8] Orlov V.N. Precise boundaries for the approximate solution of Abel differential equation in the neighborhood of approximate value of movable special point in the complex domain. [Orlov V.N. Tochnye granicy dlya priblizhennogo resheniya differencial'nogo uravneniya Abelya v okrestnosti priblizhennogo znacheniya podvizhnoj osoboj tochki v kompleksnoj oblasti]. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.Ya. Yakovleva. Seriya: Mexanika predel'nogo sostoyaniya — Vestnik of I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of definable state*, 2010, no. 2 (8), pp. 399–405.

[9] Orlov V.N. Method of approximate solutions of scalar and matrix Riccati differential equation. [Orlov V.N. Metod priblizhennogo resheniya skalyarnogo i matrichnogo differencial'nyx uravnenij Rikkati]. Cheboksary: Perfektum, 2012, 112 p.

[10] Orlov V.N., Pchelova A.Z. Influence of perturbation of moving singularity on the approximate solution for a nonlinear differential equation in the complex domain. [Orlov V.N., Pchelova A.Z. Vliyanie vozmushheniya podvizhnoj osoboj tochki na priblizhennoe reshenie odnogo nelinejnogo differencial'nogo uravneniya v kompleksnoj oblasti]. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.Ya. Yakovleva. Seriya: Mexanika predel'nogo sostoyaniya — Vestnik of I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of definable state*, 2013, no. 1 (15), pp. 171–181.

[11] Bakhvalov N.S. Numerical methods. [Baxvalov N.S. Chislennye metody]. Moscow: Nauka, 1975, 632 p.

Пчелова Алевтина Зиноновна, аспирант кафедры алгебры и геометрии, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Российская Федерация
E-mail: apchelova@mail.ru
Тел.: 8–965–687–58–43

Pchelova, Alevtina Zinonovna, Post-graduate Student, Department of Algebra & Geometry, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russian Federation
E-mail: apchelova@mail.ru
Tel.: 8–965–687–58–43