УДК 517.954

РАЗРЕШИМОСТЬ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ВЕСОВЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ*

А. А. Петрова, В. В. Смагин

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 20.02.2014 г.

Аннотация: в гильбертовом пространстве для абстрактного линейного параболического уравнения с весовым интегральным условием на решение доказана теорема существования и единственности слабого решения. Доказательство проводится с помощью аппроксимации точной задачи методом Галеркина. Для последовательности приближенных решений устанавливаются необходимые априорные оценки, что позволяет выделить подпоследовательность приближенных решений, слабо сходящуюся в соответствующем функциональном пространстве к некоторой функции. Эта функция и является слабым решением параболического уравнения, что устанавливается обоснованием слабого предельного перехода в исходном уравнении.

Ключевые слова: гильбертово пространство, параболическое уравнение, весовое интегральное условие, метод Галеркина.

SOLVABILITY OF THE VARIATIONAL PROBLEM OF PARABOLIC TYPE WITH A WEIGHTED INTEGRAL CONDITION

A. A. Petrova, V. V. Smagin

Abstract: in the Hilbert space for an abstract linear parabolic equation with weighted integral condition for the solution the theorem of existence and uniqueness of weak solutions is proved. The proof proceeds by approximating the exact problem by Galerkin's method. For a sequence of approximate solutions the necessary a priori estimates are established. This allows us to select subsequence of approximate solutions that converges weakly in the corresponding functional space to some function. This function is a weak solution of a parabolic equation. This fact can be established by justification of passage to weak limit in the original equation.

Keywords: Hilbert space, parabolic equation, weighted integral condition, the method Galerkin.

Пусть задана тройка вложенных сепарабельных гильбертовых пространств $V \subset H \subset V'$, где пространство V' - двойственное к V, а пространство H отождествляется со своим двойственным H'. Оба вложения плотные и непрерывные. На $u, v \in V$ определена полуторалинейная форма $a(u,v)$. Пусть для всех $u, v \in V$ выполнены оценки:

$$|a(u,v)| \leqslant M\|u\|_V\|v\|_V, \qquad \operatorname{Re} a(u,u) \geqslant \alpha\|u\|_V^2, \tag{1}$$

где $\alpha > 0$. Форма $a(u,v)$ порождает линейный ограниченный оператор $A : V \to V'$ такой, что выполняется соотношение $a(u,v) = (Au, v)$. Здесь под выражением типа (z, v) понимается значение функционала $z \in V'$ на элементе $v \in V$. Для $z \in H$ выражение (z, v), в силу

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 13-01-00378

отождествления $H \equiv H'$, совпадает со скалярным произведением в H [1]. Из определения оператора A следует оценка $\|A\|_{V\to V'} \leqslant M$.

В пространстве V' на $[0,T]$ рассмотрим параболическую задачу:

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \qquad \int\limits_0^T p(t)u(t)\,dt = \overline{u}\,. \tag{2}$$

В (2) на $[0,T]$ заданы функция $t \to f(t) \in V'$ и функция $t \to p(t) \in \mathbb{R}^1$, а также элемент $\overline{u}$. Производные функций здесь и далее понимаются в обобщенном смысле.

Отметим, что задачи (2) с $p(t) \equiv 1$ была изучена в [2]. Для функции $p(t)$ общего вида на промежутке $[0,+\infty)$ с $f(t) \equiv 0$ и в других пространствах задача (2) рассматривалась в [3]. Обратим внимание также на работу [4], где разрешимость задача типа (2) получена в других классах и при существенно более сильных предположениях на задачу.

В случае когда в (2) вместо интегрального условия задано начальное условие $u(0) = u^0$, то есть для параболического уравнения рассматривается задача Коши, вопросы существования и единственности, так называемого, слабого решения обсуждаются, например, в [5], [6]. Там же в [5], [6] указаны примеры классических задач для параболических уравнений, которые сводятся к вариационной постановке. При доказательстве слабой разрешимости задачи (2) в настоящей работе используется, как и в [2], аппроксимация точной задачи приближенной по Галеркину задачей с последующим обоснованием соответствующего слабого предельного перехода.

Определим необходимое далее множество $D(A) = \{v \in V \,|\, Av \in H\}$.

Теорема. *Пусть в задаче (2) выполнены условия (1). Пусть также функция* $f \in L_1(0,T;H) \cap L_2(0,T;V')$*, а функция* $p(t)$ *является абсолютно непрерывной на* $[0,T]$*, невозрастающей и принимает положительные значения на* $[0,T]$*. Предположим, что* $\overline{u} \in D(A)$*. Тогда задача (2) имеет единственное решение* $u(t)$*, такое что* $u \in L_2(0,T;V) \cap C([0,T],H)$*,* $u' \in L_2(0,T;V')$*. Кроме того, справедлива оценка*

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} \|u(t)\|_H^2 + \int\limits_0^T \Big(\|u(t)\|_V^2 + \|u'(t)\|_{V'}^2\Big)\,dt \leqslant$$

$$C\Big\{\|A\overline{u}\|_H^2 + \Big(\int\limits_0^T \|f(t)\|_H\,dt\Big)^2 + \int\limits_0^T \|f(t)\|_{V'}^2\,dt\Big\}. \tag{3}$$

Доказательство единственности решения. В силу линейности задачи (2) достаточно установить, что однородная задача

$$u'(t) + Au(t) = 0, \qquad \int\limits_0^T p(t)u(t)\,dt = 0 \tag{4}$$

имеет только нулевое решение.

Прежде заметим, что оператор $-A : D(A) \subset H \to H$ порождает в пространстве H полугруппу линейных операторов $G(t)$ [6, с. 116]. Тогда всякое слабое решение однородного параболического уравнения $u'(t) + Au(t) = 0$ задается формулой $u(t) = G(t)u(0)$, где элемент $u(0) \in H$.

Получим оценку $\|G(t)\|_{H\to H}$. Из уравнения (4) для $u(t) = G(t)u(0)$ следует равенство

$$\mathrm{Re}\,(u'(t), u(t)) + \mathrm{Re}\,a(u(t), u(t)) = 0\,,$$

из которого и (1) получим неравенство

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_H^2 + 2\alpha\|u(t)\|_V^2 \leqslant 0\,. \tag{5}$$

Так как включение $V \subset H$ ограничено, то для всех $v \in V$ выполняется оценка $\|v\|_H \leqslant \delta\|v\|_V$, где $\delta > 0$. Тогда из (5) получим

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_H^2 + 2\lambda\|u(t)\|_H^2 \leqslant 0\,, \tag{6}$$

где $\lambda = \alpha/\delta^2$. В результате из (6) для $t \geqslant 0$ следует оценка решения однородного уравнения

$$\|u(t)\|_H = \|G(t)u(0)\|_H \leqslant e^{-\lambda t}\|u(0)\|_H\,. \tag{7}$$

Таким образом, $\|G(t)\|_{H\to H} \leqslant e^{-\lambda t}$.

Пусть теперь $u(t) = G(t)u(0)$ – решение задачи (4). Тогда выполняется равенство

$$\int\limits_0^T p(t)u'(t)\,dt + A\int\limits_0^T p(t)u(t)\,dt = 0\,. \tag{8}$$

Так как $\int_0^T p(t)u(t)\,dt = 0$, то из (8) следует $\int_0^T p(t)u'(t)\,dt = 0$. Учитывая, что функции $p(t)$ и $u(t)$ абсолютно непрерывны на $[0,T]$, получим

$$0 = \int\limits_0^T p(t)u'(t)\,dt = p(T)u(T) - p(0)u(0) - \int\limits_0^T p'(t)u(t)\,dt\,. \tag{9}$$

Запишем равенство (9) в терминах оператора $G(t)$:

$$\Big(I - \frac{p(T)}{p(0)}G(T)\Big)u(0) + \frac{1}{p(0)}\int\limits_0^T p'(t)G(t)dt\,u(0) = 0\,. \tag{10}$$

Оператор $I - \frac{p(T)}{p(0)}G(T)$ непрерывно обратим в H, так как

$$\Big\|\frac{p(T)}{p(0)}G(T)\Big\|_{H\to H} = \frac{p(T)}{p(0)}\|G(T)\|_{H\to H} \leqslant \frac{p(T)}{p(0)}e^{-\lambda T} < 1\,.$$

Справедливость оценки следует из того, что непрерывная на $[0,T]$ функция $p(t) > 0$ и не возрастает.

Из (10) теперь получим

$$u(0) + \frac{1}{p(0)}\Big(I - \frac{p(T)}{p(0)}G(T)\Big)^{-1}\int\limits_0^T p'(t)G(t)dt\,u(0) = 0\,. \tag{11}$$

Рассмотрим оценку

$$\Big\|\frac{1}{p(0)}\Big(I - \frac{p(T)}{p(0)}G(T)\Big)^{-1}\Big\|_{H\to H} \leqslant \frac{1}{p(0)}\cdot\frac{1}{1 - \frac{p(T)}{p(0)}e^{-\lambda T}} = \frac{1}{p(0) - p(T)e^{-\lambda T}}\,. \tag{12}$$

Далее для произвольного $v \in H$ оценим

$$\Big\| \int_0^T p'(t) G(t) dt\, v \Big\|_H \leqslant \int_0^T |p'(t)| \|G(t)\|_{H\to H} dt\, \|v\|_H =$$

$$- \int_0^T p'(t) e^{-\lambda t} dt\, \|v\|_H = \Big(p(0) - p(T) e^{-\lambda T} - \lambda \int_0^T p(t) e^{-\lambda t} dt \Big) \|v\|_H\,. \qquad (13)$$

Из (12) и (13) следует оценка

$$\Big\| \frac{1}{p(0)} \Big(I - \frac{p(T)}{p(0)} G(T) \Big)^{-1} \int_0^T p'(t) G(t) dt \Big\|_{H\to H} \leqslant 1 - \frac{\lambda}{p(0) - p(T) e^{-\lambda T}} \int_0^T p(t) e^{-\lambda t} dt < 1\,. \qquad (14)$$

Таким образом из (11) следует, что $u(0) = 0$, то есть решение задачи (4) $u(t) = G(t)u(0) = G(t)0 = 0$. В результате задача (2) имеет не более одного решения.

Построение приближенных решений. Пусть $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ - полная линейно независимая система элементов в пространстве V. Определим конечномерное подпространство $V_m \subset V$ как линейную оболочку элементов $\{\varphi_i\}_{i=1}^{m}$.

На V_m можно рассматривать нормы пространств V, H и V'. Определим также на элементах $u_m \in V_m$ двойственную норму

$$\|u_m\|_{V'_m} = \sup |(u_m, v_m)|,$$

где точная верхняя граница берется по всем $v_m \in V_m$ таким, что $\|v_m\|_V = 1$.

Далее через P_m обозначаем ортогональный проектор в пространстве H на $V_m \subset H$. Как известно [7], оператор P_m допускает продолжение по непрерывности $\overline{P}_m$ на пространство V', и для элементов $u \in V'$ справедлива оценка $\|\overline{P}_m u\|_{V'_m} \leqslant \|u\|_{V'}$. Отметим также, что $(\overline{P}_m u,\, v) = (u,\, P_m v)$, где $u \in V'$ и $v \in H$.

Определенную на $[0, T]$ абсолютно непрерывную функцию $t \to u_m(t) \in V_m$ назовем приближенным решением задачи (2), найденным по методу Галеркина, если

$$u'_m(t) + \overline{P}_m A u_m(t) = P_m f(t), \qquad \int_0^T p(t) u_m(t)\, dt = \overline{u}_m. \qquad (15)$$

Элемент $\overline{u}_m \in V_m$ определим позже.

Задача (15) сводится к конечной линейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений с интегральным условием на решение. Заметим также, что задача (15), подобная задаче (2), имеет не более одного решения. Покажем, что решение существует.

Поскольку линейный оператор $\overline{P}_m A : V_m \to V_m$ ограничен, то всякое абсолютно непрерывное решение уравнения (15) имеет вид

$$u_m(t) = e^{-\overline{P}_m A t} u_m(0) + \int_0^t e^{-\overline{P}_m A (t-s)} P_m f(s)\, ds\,. \qquad (16)$$

Укажем значение $u_m(0) \in V_m$, при котором решение $u_m(t)$ удовлетворяет интегральному условию в (15). Равенство (16) умножим на $p(t)$, проинтегрируем от 0 до T, а затем применим оператор $\overline{P}_m A$. Учитывая интегральное условие в (15), получим

$$\overline{P}_m A \overline{u}_m = \overline{P}_m A \int_0^T p(t) e^{-\overline{P}_m A t} u_m(0)\, dt +$$

$$\overline{P}_m A \int\limits_0^T p(t)\Big[\int\limits_0^t e^{-\overline{P}_m A(t-s)} P_m f(s)\,ds\Big]\,dt\,. \tag{17}$$

Из (17) видно, что для определения $u_m(0)$ следует установить обратимость оператора $B_m = \overline{P}_m A \int_0^T p(t) e^{-\overline{P}_m At}\,dt : V_m \to V_m$.

Заметим, что оператор

$$B_m = -\int\limits_0^T p(t)\frac{d}{dt}e^{-\overline{P}_m At}\,dt = p(0)I - p(T)e^{-\overline{P}_m AT} + \int\limits_0^T p'(t)e^{-\overline{P}_m At}\,dt =$$

$$p(0)\Big(\Big(I - \frac{p(T)}{p(0)}e^{-\overline{P}_m AT}\Big) + \frac{1}{p(0)}\int\limits_0^T p'(t)e^{-\overline{P}_m At}dt\Big)\,. \tag{18}$$

Как и оценка $\|G(t)\|_{H\to H} \leqslant e^{-\lambda t}$, установленная выше, в пространстве V_m с нормой H справедлива оценка $\|e^{-\overline{P}_m At}\|_{V_m\to V_m} \leqslant e^{-\lambda t}$. Так как функция $p(t)$ невозрастающая, то существует оператор $(I - \frac{p(T)}{p(0)}e^{-\overline{P}_m AT})^{-1} : V_m \to V_m$ и в пространстве V_m с нормой H

$$\Big\|(I - \frac{p(T)}{p(0)}e^{-\overline{P}_m AT})^{-1}\Big\|_{V_m\to V_m} \leqslant \frac{1}{1 - \frac{p(T)}{p(0)}e^{-\lambda T}} = \frac{p(0)}{p(0) - p(T)e^{-\lambda T}}\,. \tag{19}$$

Теперь из (18) и (19) получим

$$B_m = p(0)\Big(I - \frac{p(T)}{p(0)}e^{-\overline{P}_m AT}\Big)\Big(I + \frac{1}{p(0)}\Big(I - \frac{p(T)}{p(0)}e^{-\overline{P}_m AT}\Big)^{-1}\int\limits_0^T p'(t)e^{-\overline{P}_m At}dt\Big)\,. \tag{20}$$

Заметим, что в пространстве V_m с нормой H выполняется также оценка, аналогичная (13),

$$\Big\|\int\limits_0^T p'(t)e^{-\overline{P}_m At}dt\Big\|_{V_m\to V_m} \leqslant p(0) - p(T)e^{-\lambda T} - \lambda\int\limits_0^T p(t)e^{-\lambda t}dt\,.$$

Следовательно, в пространстве V_m с нормой H выполняется оценка, аналогичная (14),

$$\Big\|\frac{1}{p(0)}\Big(I - \frac{p(T)}{p(0)}e^{-\overline{P}_m AT}\Big)^{-1}\int\limits_0^T p'(t)e^{-\overline{P}_m At}dt\Big\|_{V_m\to V_m} \leqslant$$

$$1 - \frac{\lambda}{p(0) - p(T)e^{-\lambda T}}\int\limits_0^T p(t)e^{-\lambda t}dt < 1\,. \tag{21}$$

Таким образом, из (20) следует обратимость в V_m оператора B_m и

$$B_m^{-1} = \frac{1}{p(0)}\Big(I - \frac{p(T)}{p(0)}e^{-\overline{P}_m AT}\Big)^{-1} \times \Big(I + \frac{1}{p(0)}\Big(I - \frac{p(T)}{p(0)}e^{-\overline{P}_m AT}\Big)^{-1}\int\limits_0^T p'(t)e^{-\overline{P}_m At}dt\Big)^{-1}. \tag{22}$$

Из (17) теперь получим

$$u_m(0) = B_m^{-1}\Big[\overline{P}_m A\overline{u}_m - \overline{P}_m A\int\limits_0^T p(t)\Big(\int\limits_0^t e^{-\overline{P}_m A(t-s)}P_m f(s)\,ds\Big)\,dt\Big]\,, \tag{23}$$

что означает однозначную разрешимость в V_m задачи (15).

Априорные оценки приближенных решений. Для решения $u_m(t)$ задачи (15) получим соотношение

$$(u'_m(t),\, u_m(t)) + a(u_m(t),\, u_m(t)) = (f(t),\, u_m(t))\,.$$

Отсюда, с учетом (1), следует неравенство

$$\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_H^2 + 2\alpha\|u_m(t)\|_V^2 \leqslant 2\mathrm{Re}\,(f(t),\, u_m(t))\,,$$

которое приводит к оценке

$$\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_H^2 + \alpha\|u_m(t)\|_V^2 \leqslant \frac{1}{\alpha}\|f(t)\|_{V'}^2\,.$$

Последнее неравенство интегрируем от 0 до $t \leqslant T$.

$$\|u_m(t)\|_H^2 - \|u_m(0)\|_H^2 + \alpha\int\limits_0^t \|u_m(s)\|_V^2\, ds \leqslant \frac{1}{\alpha}\int\limits_0^t \|f(s)\|_{V'}^2\, ds\,.$$

В результате получаем оценку

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_m(t)\|_H^2 + \int\limits_0^T \|u_m(t)\|_V^2\, dt \leqslant C\Big\{\|u_m(0)\|_H^2 + \int\limits_0^T \|f(t)\|_{V'}^2\, dt\Big\}\,. \tag{24}$$

Покажем, что $\|u_m(0)\|_H$ оценивается равномерно по $m \in \mathbb{N}$.

Оценим $\|B_m^{-1}\|_{V_m\to V_m}$, где пространство V_m берется с нормой пространства H. Из (22), (19) и (21) получим

$$\|B_m^{-1}\|_{V_m\to V_m} \leqslant \frac{1}{p(0)}\cdot\frac{p(0)}{p(0)-p(T)e^{-\lambda T}}\cdot\frac{1}{1-\Big(1-\frac{\lambda}{p(0)-p(T)e^{-\lambda T}}\int_0^T p(t)e^{-\lambda t}dt\Big)} =$$

$$\Big(\lambda\int\limits_0^T p(t)e^{-\lambda t}dt\Big)^{-1} = M_1\,. \tag{25}$$

Теперь из (23) и (25) следует оценка

$$\|u_m(0)\|_H \leqslant M_1\|\overline{P}_m A\overline{u}_m\|_H + M_1\Big\|\overline{P}_m A\int\limits_0^T p(t)\Big(\int\limits_0^t e^{-\overline{P}_m A(t-s)}P_m f(s)\, ds\Big)\, dt\Big\|_H. \tag{26}$$

Выберем элемент $\overline{u}_m \in V_m$ так, что для всех $v_m \in V_m$ выполняется

$$a(\overline{u}_m,\, v_m) = a(\overline{u},\, v_m)\,. \tag{27}$$

Существование и единственность такого элемента следует из теоремы Лакса-Мильграмма [8, с.19, с.47]. Кроме того, в силу полноты системы $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ и теоремы Сеа [8, с. 109] в пространстве V выполняется $\|\overline{u}_m - \overline{u}\|_V \to 0$ при $m\to\infty$. Из (27) следует равенство $\overline{P}_m A\overline{u}_m = \overline{P}_m A\overline{u}$. А так как $\overline{u}\in D(A)$, то получим

$$\|\overline{P}_m A\overline{u}_m\|_H = \|\overline{P}_m A\overline{u}\|_H \leqslant \|A\overline{u}\|_H\,. \tag{28}$$

Для оценки второго слагаемого в правой части (26) проведем преобразование

$$\overline{P}_m A \int\limits_0^T p(t)\Big(\int\limits_0^t e^{-\overline{P}_m A(t-s)} P_m f(s)\,ds\Big)dt = -\int\limits_0^T p(t)\Big(\int\limits_0^t \frac{d}{dt} e^{-\overline{P}_m A(t-s)}\, P_m f(s)\,ds\Big)dt =$$

$$-\int\limits_0^T\Big(\int\limits_s^T p(t)\frac{d}{dt}e^{-\overline{P}_m A(t-s)}dt\Big)P_m f(s)\,ds\,. \qquad (29)$$

Рассмотрим

$$\int\limits_s^T p(t)\frac{d}{dt}e^{-\overline{P}_m A(t-s)}dt = p(T)e^{-\overline{P}_m A(T-s)} - p(s)I - \int\limits_0^T p'(t)e^{-\overline{P}_m A(t-s)}dt\,.$$

Из полученного представления в пространстве V_m с нормой H следует оценка

$$\Big\|\int\limits_s^T p(t)\frac{d}{dt}e^{-\overline{P}_m A(t-s)}dt\Big\|_{V_m\to V_m} \leqslant p(T)e^{-\lambda(T-s)} + p(s) - \int\limits_0^T p'(t)e^{-\lambda(t-s)}dt \leqslant$$

$$p(T) + p(s) - \int\limits_0^T p'(t)\,dt = 2p(s) \leqslant 2p(0)\,. \qquad (30)$$

Из (29) и (30) получим в пространстве V_m с нормой H оценку

$$\Big\|\overline{P}_m A\int\limits_0^T p(t)\Big(\int\limits_0^t e^{-\overline{P}_m A(t-s)}P_m f(s)\,ds\Big)dt\Big\|_{V_m\to V_m} \leqslant$$

$$\int\limits_0^T\Big\|\int\limits_s^T p(t)\frac{d}{dt}e^{-\overline{P}_m A(t-s)}dt\Big\|_{V_m\to V_m}\|f(s)\|_H ds \leqslant 2p(0)\int\limits_0^T \|f(s)\|_H ds\,. \qquad (31)$$

Таким образом, из оценок (26), (28) и (31) получается оценка

$$\|u_m(0)\|_H \leqslant M_1\Big(\|A\overline{u}\|_H + 2p(0)\int\limits_0^T \|f(t)\|_H dt\Big)\,.$$

В результате оценка (24) примет окончательный вид

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_m(t)\|_H^2 + \int\limits_0^T \|u_m(t)\|_V^2\,dt \leqslant C\Big\{\|A\overline{u}\|_H^2 + \Big(\int\limits_0^T \|f(t)\|_H dt\Big)^2 + \int\limits_0^T \|f(t)\|_{V'}^2\,dt\Big\}\,. \qquad (32)$$

Обоснование слабого предельного перехода. Оценка (32) показывает, что последовательность $\{u_m(t)\}$ ограничена в пространстве $L_2(0,T;V)$. Следовательно, существует подпоследовательность $\{u_\mu(t)\}\subset\{u_m(t)\}$, слабо сходящаяся в пространстве $L_2(0,T;V)$ к некоторому элементу $u\in L_2(0,T;V)$. Покажем, что функция $u(t)$ является решением задачи (2).

Для всех μ из (15) для $j = \overline{1, \mu}$ получим

$$(u'_\mu(t),\, \varphi_j) + a(u_\mu(t),\, \varphi_j) = (f(t),\, \varphi_j). \tag{33}$$

Умножим (33) на скалярную функцию $\psi \in C_0^\infty(0,T)$, полученное равенство интегрируем от 0 до T. После интегрирования по частям первого слагаемого придем к равенству

$$-\int_0^T (u_\mu(t),\, \psi'(t)\varphi_j)\, dt + \int_0^T a(u_\mu(t),\, \psi(t)\varphi_j)\, dt = \int_0^T (f(t),\, \psi(t)\varphi_j)\, dt\,. \tag{34}$$

Заметим, что функции $\psi'(t)\varphi_j,\ \psi(t)\varphi_j \in L_2(0,T;V)$. Тогда из (17) при $\mu \to \infty$ для всех $j \in \mathbb{N}$ следует равенство

$$-\int_0^T (u(t),\, \psi'(t)\varphi_j)\, dt + \int_0^T a(u(t),\, \psi(t)\varphi_j)\, dt = \int_0^T (f(t),\, \psi(t)\varphi_j)\, dt\,. \tag{35}$$

Так как система элементов $\{\varphi_j\}$ является полной в пространстве V, то из (35) предельным переходом установим, что для всех $v \in V$ выполняется

$$-\int_0^T (u(t),\, v)\psi'(t)\, dt + \int_0^T a(u(t),\, v)\psi(t)\, dt = \int_0^T (f(t),\, v)\psi(t)\, dt\,. \tag{36}$$

Из (36) следует равенство в смысле обобщенных функций

$$\frac{d}{dt}(u(t),\, v) + a(u(t),\, v) = (f(t),\, v)\,,$$

из которого следует, [6, с.113], что функция $u(t)$ является решением уравнения в (2).

Установим, что выполняется и интегральное условие в (2). Напомним, что для всех μ справедливо равенство $\int_0^T p(t)u_\mu(t)\, dt = \overline{u}_\mu$ и $\|\overline{u}_\mu - \overline{u}\|_V \to 0$ при $\mu \to \infty$. Следовательно, для любого $v \in V'$

$$\Big(\int_0^T p(t)u_\mu(t)\, dt,\, v\Big) = (\overline{u}_\mu,\, v)\,. \tag{37}$$

Очевидно, что в (37) $(\overline{u}_\mu,\, v) \to (\overline{u},\, v)$ при $\mu \to \infty$. Заметим теперь, что на функциях $z \in L_2(0,T;V)$ отображение $\Phi_v(z) = (\int_0^T p(t)z(t)\, dt,\, v)$ при всяком фиксированном $v \in V$ есть линейный функционал. Покажем, что этот функционал на $L_2(0,T;V)$ ограничен.

$$|\Phi_v(z)| \leqslant \Big\|\int_0^T p(t)z(t)\, dt\Big\|_V \|v\|_{V'} \leqslant \Big(\int_0^T p^2(t)\, dt\Big)^{1/2} \|v\|_{V'} \Big(\int_0^T \|z(t)\|_V^2\, dt\Big)^{1/2}.$$

В таком случае $\Phi_v(u_\mu) \to \Phi_v(u)$ при $\mu \to \infty$. В результате из (37) получим

$$\Big(\int_0^T p(t)u(t)\, dt,\, v\Big) = (\overline{u},\, v)$$

для любого $v \in V'$, то есть $\int_0^T p(t)u(t)\, dt = \overline{u}$.

Покажем, что решение задачи (2) $u \in L_2(0,T;V)$ обладает дополнительной гладкостью $u \in C([0,T],H)$ и $u' \in L_2(0,T;V')$, а также обоснуем оценку (3).

Поскольку $u(t)$ есть слабый предел в $L_2(0,T;V)$ последовательности функций $\{u_\mu(t)\}$, для которых выполняется оценка (32), то и для $u(t)$

$$\int_0^T \|u(t)\|_V^2\,dt \leqslant C\Big\{\|A\overline{u}\|_H^2 + \Big(\int_0^T \|f(t)\|_H\,dt\Big)^2 + \int_0^T \|f(t)\|_{V'}^2\,dt\Big\}. \tag{38}$$

Заметим теперь, что $f \in L_2(0,T;V')$, поэтому из уравнения (2) следует $u'(t) = f(t) - Au(t) \in L_2(0,T;V')$, а также выполняется оценка

$$\int_0^T \|u'(t)\|_{V'}^2\,dt \leqslant 2\int_0^T \|f(t)\|_{V'}^2\,dt + 2M^2\int_0^T \|u(t)\|_V^2\,dt. \tag{39}$$

Но если функция $u \in L_2(0,T;V)$ и производная $u' \in L_2(0,T;V')$, то [5], [6] функция $u \in C([0,T],H)$ и справедлива оценка

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)\|_H^2 \leqslant K\int_0^T \Big(\|u(t)\|_V^2 + \|u'(t)\|_{V'}^2\Big)\,dt. \tag{40}$$

Из (38), (39) и (40) следует окончательная оценка (3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Обэн Ж.-П. Приближенное решение эллиптических краевых задач / Ж.-П. Обэн. — М.: Мир, 1977. — 384 с.

[2] Критская Е.А. О слабой разрешимости вариационной задачи параболического типа с интегральным условием / Е.А. Критская, В.В. Смагин // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2008. — № 1. — С. 222–225.

[3] Тихонов И.В. О разрешимости задачи с нелокальным интегральным условием для дифференциального уравнения в банаховом пространстве / И.В. Тихонов // Дифференц. ур-ния. — 1998. — Т. 34, № 6. — С. 841–843.

[4] Шелухин В.В. Вариационный принцип в нелокальных по времени задачах для линейных эволюционных уравнений / В.В. Шелухин // Сибирский математ. журнал. — 1993. — Т. 34, № 2. — С. 191–207.

[5] Лионс Ж.-Л. Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес. — М.: Мир, 1971. — 372 с.

[6] Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Ж.-Л. Лионс. — М.: Мир, 1972. — 415 с.

[7] Вайникко Г.М. О сходимости и быстроте сходимости метода Галеркина для абстрактных эволюционных уравнений / Г.М. Вайникко, П.Э. Оя // Дифференц. уравнения. — 1975. — Т. 11, № 7. — С. 1269–1277.

[8] Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач / Ф. Сьярле. — М.: Мир, 1980. — 512 с.

REFERENCES

[1] Aubin J.-P. An approximate solution of elliptic boundary problems. [Obe'n Zh.-P. Priblizhennoe reshenie e'llipticheskix kraevyx zadach]. Moscow: Mir, 1997, 384 p.

[2] Kritskaya E.A., Smagin V.V. About weak solubility of variational problem of parabolic type with integral condition. [Kritskaya E.A., Smagin V.V. O slaboj razreshimosti variacionnoj

zadachi parabolicheskogo tipa s integral'nym usloviem]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2008, no. 1, pp. 222–225.

[3] Tikhonov I.V. About solubility of problem with nonlocal integral condition for differential equation in Banach space. [Tixonov I.V. O razreshimosti zadachi s nelokal'nym integral'nym usloviem dlya differencial'nogo uravneniya v banaxovom prostranstve]. *Differencial'nye uravneniya — Differential equations*, 1998, Vol. 34, no. 6, pp. 841–843.

[4] Shelukhin V.V. Variational principle in nonlocal by time problems for linear evolution equations. [Sheluxin V.V. Variacionnyj princip v nelokal'nyx po vremeni zadachax dlya linejnyx e'volyucionnyx uravnenij]. *Sibirskij matematicheskij zhurnal — Siberian Mathematical Journal*, 1993, Vol. 34, no. 2, pp. 191–207.

[5] Lions J.-L., Magencs E. Inhomogeneous boundary value problems and their applications. [Lions Zh.-L. Neodnorodnye granichnye zadachi i ix prilozheniya]. Moscow: Mir, 1971, 372 p.

[6] Lions J.-L. Optimal control of systems described by partial differential equations. [Lions Zh.-L. Optimal'noe upravlenie sistemami, opisyvaemymi uravneniyami s chastnymi proizvodnymi]. Moscow: Mir, 1972, 415 p.

[7] Vainikko G.M., Oya P. E. About convergence and speed of convergence of Galerkin's method for abstract evolution equations. [Vajnikko G.M., Oya P.E'. O sxodimosti i bystrote sxodimosti metoda Galerkina dlya abstraktnyx e'volyucionnyx uravnenij]. *Differencial'nye uravneniya — Differential equations*, 1975, Vol. 11, no. 7, pp. 1269–1277.

[8] Ciarlet P. The finite element method for elliptic problems. [S'yarle F. Metod konechnyx e'lementov dlya e'llipticheskix zadach]. Moscow: Mir, 1980, 512 p.

Петрова Анастасия Александровна, магистрант кафедры функционального анализа и операторных уравнений математического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: rezolwenta@mail.ru

Petrova Anastasiya Alexandrovna, undergraduate of Department of functional analysis and operational equations, Mathematical faculty at Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: rezolwenta@mail.ru

Смагин Виктор Васильевич, профессор кафедры функционального анализа и операторных уравнений математического факультета Воронежского государственного университета, доктор физико-математических наук, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: smagin@math.vsu.ru

Smagin Victor Vasilievich, Professor of the Department of functional analysis and operational equations, Mathematical faculty at Voronezh State University, Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Voronezh, Russian Federation
E-mail: smagin@math.vsu.ru