УДК 512.5

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ КОММУТАТИВНОЙ ГРАДУИРОВАННОЙ АЛГЕБРЫ

В. В. Конев

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 13.11.2013 г.

Аннотация: вводится определение коммутативности, охватывающее более широкий, чем обычно, класс градуированных алгебр. Рассмотрена коммутативная (по введённому определению) алгебра, на которую наложены условия, достаточные для нахождения конкретных правил перестановки множителей в произведениях её однородных элементов. Также изложены предложения, описывающие простые свойства некоторых коммутативных градуированных алгебр и служащие иллюстрацией для определения коммутативности. Приведены примеры алгебр, удовлетворяющих всем предположениям. Также включен один пример, в котором якобиан рассмотрен как билинейное отображение $\mathbb{Z}$-градуированной алгебры полиномов от двух переменных, сохраняющее градуировку (пара однородных элементов отображается в однородный элемент).

Ключевые слова: градуированная алгебра, коммутативность, градуирующая группа.

SOME REMARKS ON THE DEFINITION OF A COMMUTATIVE GRADED ALGEBRA

V. V. Konev

Abstract: we introduce the definition of commutativity indicating a wider class of graded algebras than the usual one. We consider the commutative (by introduced definition) algebra which is imposed conditions sufficient for searching of specific rules of permutation of factors in the products of its homogeneous components. Also propositions that describe some simple properties of commutative graded algebras and serve to illustrate the definition of commutativity are developed. Examples of algebras satisfying all assumptions are given. An example which the Jacobian is considered in as a bilinear map of the $\mathbb{Z}$-graded algebra of polynomials in two variables, preserving the grading (a pair of homogeneous elements images into a homogeneous element) is included too.

Keywords: graded algebra, commutativity, grading group.

ВВЕДЕНИЕ

Определение коммутативной алгебры, принятое в теории градуированных алгебр, порождает вопрос о существовании алгебр с более сложной коммутативностью. Исходной точкой всех рассуждений настоящей работы является новое определение коммутативных градуированных алгебр (определение 5), охватывающее более широкий, чем обычно, класс градуированных алгебр. В § 1 доказана теорема о явном виде обобщённой коммутативности при некоторых дополнительных условиях: рассмотрена коммутативная (по введённому определению) унитарная градуированная алгебра, на которую наложены три условия, достаточные для

© Конев В. В., 2014

нахождения конкретных правил перестановки множителей в произведениях её однородных элементов. Здесь же приведены примеры алгебр, удовлетворяющих всем предположениям.

В § 2 изложены определения и пример, мотивированные результатами, полученными в § 1. Определения 6 и 7, а также пример 2 есть уже в работах Kobayashi Y., Nagamachi S. [13], [14]. Цель настоящей работы – показать, что эти определения могут быть мотивированы без привлечения математической физики.

Следующие три определения являются стандартными [3]–[7].

Определение 1. Градуирующей группой называется пара (G, μ), удовлетворяющая следующим условиям:

1. G – абелева группа,
2. $\mu : G \times G \to \mathbb{Z}_2$ – симметричное билинейное отображение.

Будем записывать группу G аддитивно. Тогда второе условие можно записать так: для любых $g_1, g_2, g_3 \in G$ и любых $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{Z}$ выполнено $\mu(g_1, g_2) = \mu(g_2, g_1)$ и $\mu(c_1g_1 + c_2g_2, c_3g_3) = c_1c_3\mu(g_1, g_3) + c_2c_3\mu(g_2, g_3)$.

Определение 2. Пусть $\mathcal{R}$ – унитарное коммутативное кольцо и пусть $\{P_g\}_{g\in G}$ есть множество $\mathcal{R}$-модулей. Прямая сумма

$$P = \bigoplus_{g\in G} P_g$$

называется G-градуированным модулем над $\mathcal{R}$.

Замечание 1. Элемент градуированного модуля имеет вид конечной суммы однородных компонентов.

P_g называется компонентом P степени g, и его элементы называются однородными степени g. Выражение $p \in P_g$ может быть записано как $deg(p) = g$.

Определение 3. Если $\mathcal{A} = \oplus_{g\in G}\mathcal{A}_g$ есть градуированный $\mathcal{R}$-модуль с умножением, делающим его унитарной ассоциативной $\mathcal{R}$-алгеброй и удовлетворяющим условию

$$\mathcal{A}_g \cdot \mathcal{A}_{g'} \subseteq \mathcal{A}_{g+g'},$$

то говорят, что $\mathcal{A}$ есть G-градуированная алгебра над $\mathcal{R}$.

Напомним, что в теории градуированных алгебр (в частности, $\mathbb{Z}_2$-градуированных [3], [4]), использующей определение 1, принято следующее определение коммутативности (то есть коммутативности в градуированном смысле).

Определение 4. G-градуированная $\mathcal{R}$-алгебра $\mathcal{A}$ называется *коммутативной*, если для любых однородных элементов $a \in \mathcal{A}_g$, $b \in \mathcal{A}_{g'}$ выполнено

$$ab = (-1)^{\mu(g,g')}ba.$$

Будем рассматривать некоторую унитарную ассоциативную G-градуиро-ванную алгебру $\mathcal{A}$ над унитарным ассоциативным коммутативным кольцом $\mathcal{R}$. Пусть $1_{\mathcal{A}}$ – единица алгебры $\mathcal{A}$.

Напомним, что умножить (слева) $a \in \mathcal{A}$ на $p \in \mathcal{R}$ – то же, что умножить слева $a \in \mathcal{A}$ на $p1_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$:

$$pa = p(1_{\mathcal{A}}a) = (p1_{\mathcal{A}})a, \tag{1}$$

поскольку умножение в $\mathcal{A}$ обладает следующим свойством по определению ассоциативной алгебры [6]:

$$(pa)b = a(pb) = p(ab) \text{ для любых } p \in \mathcal{R}, a, b \in \mathcal{A}.$$

Поэтому общность не нарушится, если считать, что все элементы $\mathcal{R}1_{\mathcal{A}}$ перестановочны (коммутируют) со всеми элементами $\mathcal{A}$:

$$(p1_{\mathcal{A}})a = pa = p(a1_{\mathcal{A}}) = (pa)1_{\mathcal{A}} = a(p1_{\mathcal{A}}). \quad (2)$$

Везде далее под умножением элемента $a \in \mathcal{A}$ на элемент $p \in \mathcal{R}$ будет пониматься умножение элемента $a \in \mathcal{A}$ на элемент $p1_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$.

Имеет место вложение $\mathcal{R}1_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$, однако, вообще говоря, кольца $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}1_{\mathcal{A}}$ могут быть неизоморфными.

Определим обобщённую коммутативность, опираясь на естественные предположения. конечных сумм однородных компонентов. Назовём алгебру $\mathcal{A}$ *коммутативной*, если зная произведение $a \cdot b$ двух однородных элементов $a, b \in \mathcal{A}$, мы можем получить произведение $b \cdot a$, используя как данные лишь элементы $\mathcal{R}$, алгебраические операции из $\mathcal{A}$ и само $a \cdot b$. В этом случае достаточно определить правила перестановки множителей только для однородных элементов. Переформулируем сказанное в виде следующего определения.

Определение 5. G-градуированную $\mathcal{R}$-алгебру будем называть *коммутативной*, если для любых $a \in \mathcal{A}_g$, $b \in \mathcal{A}_{g'}$ найдётся такой полином $p(x) \in \mathcal{R}[x]$, что справедливо

$$b \cdot a = p(a \cdot b).$$

Коммутативные алгебры и коммутативные градуированные алгебры (в обычном смысле) удовлетворяют определению 5. Ниже (в доказательстве теоремы 1) показано, что при некоторых условиях полином p в определении 5 может быть только первой степени (точнее, вида $p(x) = qx$ для некоторого обратимого q).

Автор выражает признательность О.В. Кунаковской за руководство работой, а также глубокую благодарность А.М. Виноградову, Ю.И. Сапронову, В.А. Костину, Б.М. Даринскому, М.И. Каменскому, В.В. Смагину, И.Я. Новикову за полезное обсуждение результатов работы.

§ 1. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

1.1. Отметим, что определение 5 не содержит явных правил перестановки множителей.

Ниже будут найдены эти правила для градуированной $\mathcal{R}$-алгебры $\mathcal{A}$, удовлетворяющей следующим трём условиям:

1. Кольцо $\mathcal{R}$ вложено в $\mathcal{A}$, то есть кольца $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}1_{\mathcal{A}}$ изоморфны.
2. Все элементы $\mathcal{A}$, отличные от элементов кольца $\mathcal{R}1_{\mathcal{A}}$, неалгебраичны над $\mathcal{R}1_{\mathcal{A}}$.
3. Если a, b есть ненулевые однородные элементы алгебры $\mathcal{A}$, $(a \notin \mathcal{R}1_{\mathcal{A}}) \vee (b \notin \mathcal{R}1_{\mathcal{A}})$, то $ab \notin \mathcal{R}1_{\mathcal{A}}$.

Замечание 2. Элементы кольца $\mathcal{R}$ содержатся в $\mathcal{A}_0$. Действительно, если $r \in \mathcal{R}, r \in \mathcal{A}_g, r \neq 0, a \in \mathcal{A}_{g'}, a \neq 0$, то $ra \in \mathcal{A}_{g+g'}$ и $ra \neq 0$. Но ra содержится также и в $\mathcal{R}$-модуле $\mathcal{A}_{g'}$. $\mathcal{R}$-модули $\mathcal{A}_{g'}$ и $\mathcal{A}_{g+g'}$ имеют общий ненулевой элемент и поэтому совпадают. Тогда $g + g' = g'$. Следовательно, $g = 0$.

Замечание 3. Если алгебра $\mathcal{A}$ содержит элементы, отличные от элементов кольца $\mathcal{R}$, то из условия 3 следует целостность кольца $\mathcal{R}$. В самом деле, пусть $p, q \in \mathcal{R}, p, q \neq 0, a \in \mathcal{A}, a \notin \mathcal{R}$. По условию 3 $qa \notin \mathcal{R}, qa \neq 0$ и $pqa \notin \mathcal{R}, pqa \neq 0$. Поэтому необходимо $pq \neq 0$. В этом случае, если два однородных элемента a, b отличны от нуля, то их произведения ab, ba также отличны от нуля.

Замечание 4. Пусть a, b, c – однородные элементы алгебры $\mathcal{A}$, $a \neq 0$ и $ab = ac$, то есть $a(b-c) = 0$. Тогда по условию 3 необходимо $b = c$.

1.2. Следующая теорема даёт явный вид обобщённой коммутативности в указанных условиях.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{A}$ – унитарная ассоциативная G-градуированная алгебра над некоторым унитарным ассоциативным коммутативным кольцом $\mathcal{R}$, удовлетворяющая условиям 1 – 3, указанным выше, и коммутативная в смысле определения 5. Тогда для любых двух однородных элементов $a \in \mathcal{A}_g$, $b \in \mathcal{A}_{g'}$ выполнено*

$$ab = \mathfrak{m}(g, g')ba,$$

где $\mathfrak{m}$ есть отображение из $G \times G$ в группу $\mathcal{U}(\mathcal{R})$ обратимых элементов кольца $\mathcal{R}$, удовлетворяющее условиям:

$$\mathfrak{m}(g, g') = \left(\mathfrak{m}(g', g)\right)^{-1}, \tag{3}$$

$$\mathfrak{m}(g_1 + ... + g_n, g_1' + ... + g_m') = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\mathfrak{m}(g_i, g_j'), \tag{4}$$

$$\mathfrak{m}(cg, g') = \left(\mathfrak{m}(g, g')\right)^c, \tag{5}$$

для любых $g, g', g_i, {g'}_j \in G, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$ и для любого $c \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Заметим, что если алгебра $\mathcal{A}$ не содержит элементов, отличных от элементов кольца $\mathcal{R}$, то она коммутативна (в обычном смысле) по определению 2. В этом случае отображение $\mathfrak{m}$ можно выбрать таким:

$$\mathfrak{m} : G \times G \to 1_{\mathcal{A}}.$$

Пусть a, b – некоторые отличные от нуля и от всех элементов кольца $\mathcal{R}$ однородные элементы коммутативной G-градуированной алгебры $\mathcal{A}$. Пользуясь определением 5, запишем $a \cdot b = p_1(b \cdot a)$ и $b \cdot a = p_2(a \cdot b)$, где $p_1(x), p_2(x) \in \mathcal{R}[x]$. Тогда

$$a \cdot b = p_1\left(p_2\left(a \cdot b\right)\right).$$

Рассмотрим полином $p(x) = p_1\left(p_2\left(x\right)\right) - x$. Ни один из полиномов p_1, p_2 не может иметь нулевую степень, иначе $ab \in \mathcal{R}$ или $ba \in \mathcal{R}$, что противоречит условию 3. Если степень одного из полиномов p_1, p_2 больше единицы, то полином p отличен от нуля. В силу условия 2 ab не может являться корнем p. Остаётся одно – степени полиномов p_1, p_2 равны единице.

Пусть $p_1(x) = q_1x + r_1, p_2(x) = q_2x + r_2$. Тогда $p(x) = p_1\left(p_2\left(x\right)\right) - x = q_1q_2x + q_1r_2 + r_1 - x = (q_1q_2 - 1_{\mathcal{A}})x + (q_1r_2 + r_1)$. Для того, чтобы выполнялось $p(ab) = 0$, необходимо $p(x) \equiv 0$.

Получаем $q_1q_2 - 1_{\mathcal{A}} = 0$ и $q_1r_2 + r_1 = 0$. Следовательно, $q_1, q_2 \in \mathcal{U}(\mathcal{R})$.

Заметим, что рассмотрение полинома $s(x) = p_2\left(p_1\left(x\right)\right) - x$ приводит к тем же результатам.

Пусть $a \in \mathcal{A}_g, b \in \mathcal{A}_{g'}$ есть ненулевые однородные элементы алгебры $\mathcal{A}$, $ab = qba + r$, причём $a \notin \mathcal{R}$. Покажем, что $r = 0$.

$$aba = qbaa + ra.$$

$$(ba)a = q_2a(ba) + r_2,$$

где $q_2, r_2 \in \mathcal{R}$. Отсюда $aba(1_{\mathcal{A}} - qq_2) = qr_2 + ra$.

$$(ab(1_{\mathcal{A}} - qq_2) - r)a = qr_2. \tag{6}$$

Из (6) в силу условия 3 следует

$$ab(1_{\mathcal{A}} - qq_2) - r = 0. \tag{7}$$

Из (7) необходимо следует $r = 0$.

Свободные члены в полиномах $p_1(x), p_2(x)$ равны нулю, что можно записать как $ab = \mathfrak{m}(a,b)ba$, где $\mathfrak{m}(a,b) \in \mathcal{U}(\mathcal{R})$. Очевидно, здесь $\mathfrak{m}(a,b) = \big(\mathfrak{m}(b,a)\big)^{-1}$.

Покажем, что если для одной пары ненулевых однородных элементов $a \in \mathcal{A}_g, b \in \mathcal{A}_{g'}$ выполнено $ab = qba$, то для любой пары $c \in \mathcal{A}_g, d \in \mathcal{A}_{g'}$ выполнено $cd = qdc$. Предположим противное: существуют ненулевые $a \in \mathcal{A}_g, b, d \in \mathcal{A}_{g'}$ такие, что $ab = q_1ba, ad = q_2da, q_1 \neq q_2$. Тогда можно записать разность

$$ab - ad = q_1ba - q_2da,$$

из которой следует

$$q_3(b-d)a = q_1ba - q_2da, \tag{8}$$

где $q_3 = \mathfrak{m}(a, b-d)$.

Перепишем (8) как

$$b(q_3 - q_1)a = d(q_3 - q_2)a,$$

откуда получим

$$b(q_3 - q_1) = d(q_3 - q_2).$$

Ясно, что в последнем равенстве не может быть $q_3 = q_1$, так как это противоречит предположению $q_1 \neq q_2$.

Обозначим $s_1 = q_3 - q_1, s_2 = q_3 - q_2$. Тогда можно записать $s_1ab = s_1q_1ba, s_2ad = s_2q_2da$. Но $bs_1 = ds_2$, поэтому $s_2ad = s_1q_1ba, s_2ad = s_2q_2da$, то есть $s_1q_1ba = s_2q_2da$. Вычтем из последнего равенства равенство $s_1q_1ba = s_2q_1da$. Получим $s_2q_1da - s_2q_2da = 0$, из чего следует $q_1 = q_2$. Это противоречит предположению $q_1 \neq q_2$.

Теперь мы будем вместо $ab = \mathfrak{m}(a,b)ba$ писать $ab = \mathfrak{m}(g,g')ba$, так как множитель $\mathfrak{m}(a,b)$ зависит не от конкретных однородных элементов $a \in \mathcal{A}_g, b \in \mathcal{A}_{g'}$, а лишь от модулей, которым эти элементы принадлежат.

Рассмотрим подробно свойства отображения

$$\mathfrak{m} : G \times G \to \mathcal{U}(\mathcal{R}).$$

Пусть нам известны все элементы $\mathfrak{m}(g_i, g'_j)$ для $i = \overline{1,n}$ и $j = \overline{1,m}$. Найдём значение $\mathfrak{m}(g_1 + ... + g_n, g'_1 + ... + g'_m)$.

Пусть $a_{g_i} \in \mathcal{A}_{g_i}, a_{g'_j} \in \mathcal{A}_{g'_j}, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}$.

$a_{g_1}...a_{g_n} \in \mathcal{A}_{g_1}...\mathcal{A}_{g_n}, a_{g'_1}...a_{g'_m} \in \mathcal{A}_{g'_1}...\mathcal{A}_{g'_m}$.

В произведении $a_{g_1}...a_{g_n}a_{g'_1}...a_{g'_m}$ множитель a_{g_n} последовательно поменяем местами с элементами $a_{g'_1}, ..., a_{g'_m}$. Получим произведение

$$\prod_{i=1}^{m} \mathfrak{m}(g_n, g'_i) a_{g_1}...a_{g_{n-1}}a_{g'_1}...a_{g'_m}a_{g_n}.$$

Множитель $\prod_{i=1}^{m} \mathfrak{m}(g_n, g'_i)$ является результатом последовательной перестановки элемента a_{g_n} с элементами $a_{g'_1}, ..., a_{g'_m}$. Затем то же действие сделаем последовательно с множителями $a_{g_{n-1}}, ..., a_{g_1}$. Получается в точности равенство (4):

$$\mathfrak{m}(g_1 + ... + g_n, g'_1 + ... + g'_m) = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} \mathfrak{m}(g_i, g'_j).$$

Единичный элемент из $\mathcal{A}$ содержится в $\mathcal{A}_0$ и коммутирует со всеми элементами из $\mathcal{A}$. Значит, и любой элемент из $\mathcal{A}_0$ перестановочен с любым элементом из $\mathcal{A}$. Значит, $\mathfrak{m}(0,g) = 1_{\mathcal{A}}$ для любого $g \in G$. Отсюда следует $\mu(g+(-g),g') = \mathfrak{m}(g,g')\mathfrak{m}(-g,g') = 1_{\mathcal{A}}$, то есть $\mathfrak{m}(g,g') = \big(\mathfrak{m}(-g,g')\big)^{-1}$ для любых $g, g' \in G$.

Учитывая, что в аддитивной группе G можно ввести умножение на целые числа, можно записать $\mathfrak{m}(cg,g') = \big(\mathfrak{m}(g,g')\big)^{c}$, где $c \in \mathbb{Z}$. □

Ниже, в примере 2, построена градуированная алгебра, удовлетворяющая условиям 1 – 3, коммутативная в смысле определения 5 и не являющаяся коммутативной в обычном (градуированном) смысле.

Следствие 1. *Пусть $\mathcal{A}$ – унитарная ассоциативная G-градуированная алгебра над некоторым унитарным ассоциативным коммутативным кольцом $\mathcal{R}$, удовлетворяющая условиям 1 – 3 и коммутативная в смысле определения 5, причём алгебра $\mathcal{A}$ не содержит обратимых элементов, кроме $1_{\mathcal{A}}$ и $-1_{\mathcal{A}}$. Тогда алгебра $\mathcal{A}$ является коммутативной в смысле определения 4.*

Доказательство. Если алгебра $\mathcal{A}$ такова, что $1_{\mathcal{A}} = -1_{\mathcal{A}}$, то она коммутативна в обычном смысле. Если же $1_{\mathcal{A}} \neq -1_{\mathcal{A}}$, то группа $\mathbb{Z}_2$ изоморфна мультипликативной группе, состоящей из $1_{\mathcal{A}}$ и $-1_{\mathcal{A}}$. В группе $\mathbb{Z}_2$ выполнено $1 = -1$. Используя обозначения теоремы 3, положим $\mathfrak{m}(g,g') = (-1_{\mathcal{A}})^{\mu(g,g')}$ для всех $g, g' \in G$. Из $\mathfrak{m}(g,g') = \big(\mathfrak{m}(g',g)\big)^{-1}$ следует $\mu(g,g') = \mu(g',g)$. Билинейность следует из теоремы 1. □

Следствие 2. *Пусть $\mathcal{A}$ – унитарная ассоциативная G-градуированная алгебра над некоторым унитарным ассоциативным коммутативным кольцом $\mathcal{R}$, удовлетворяющая условиям 1 – 3 и коммутативная в смысле определения 5. Если градуирующая группа G – циклическая с образующим элементом e, причём $\mathcal{A}_e \neq \{0\}$, то алгебра $\mathcal{A}$ является коммутативной в обычном смысле.*

Доказательство. Элементы модуля $\mathcal{A}_0$ коммутируют со всеми элементами алгебры $\mathcal{A}$, так как единица коммутирует со всеми элементами $\mathcal{A}$ и содержится в $\mathcal{A}_0$. По этой причине $\mathfrak{m}(0,g) = \mathfrak{m}(g,0) = 1_{\mathcal{A}}$ для всех $g \in G$.

Пусть $a \in \mathcal{A}_e$ есть ненулевой однородный элемент алгебры $\mathcal{A}$. Для каждых двух ненулевых однородных элементов $b, c \in \mathcal{A}$ существовует такой $q \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$, что выполнено $bc = qcb$. Тогда $aa = q'aa$ для некоторого $q' \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$. По условию 3 $aa \neq 0$, поэтому $q' = 1_{\mathcal{A}}$. Получаем $\mathfrak{m}(e,e) = 1_{\mathcal{A}}$. Следовательно, $\mathfrak{m}(g,g') = 1_{\mathcal{A}}$ для любых $g, g' \in G$.2 □

Приведём пример градуированной алгебры, удовлетворяющей условиям 1 – 3 и коммутативной в обычном смысле.

Пример 1. Пусть $\mathcal{A}$ есть $\mathbb{Z}$-алгебра полиномов $\mathbb{Z}[x]$ над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$, градуированная группой $\mathbb{Z}_4$. Она представляется прямой суммой четырёх $\mathbb{Z}$-модулей. В модуле, соответствующем элементу $[i], i = \overline{0,3}$ градуирующей группы $\mathbb{Z}_4$, содержатся лишь те полиномы из $\mathbb{Z}[x]$, все мономы которых имеют степени, дающие при делении на 4 остаток i. Нулём и единицей этой алгебры являются ноль и единица кольца полиномов $\mathbb{Z}[x]$. Обратимыми элементами являются 1 и –1, которые образуют мультипликативную группу, изоморфную аддитивной группе $\mathbb{Z}_2$. Отображение μ запишем так:

$$\mu : \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2.$$

Алгебра $\mathcal{A}$ является коммутативной в обычном смысле, и поэтому отображение μ несюръективно – образом всех пар из $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ является ноль.

1.3. По результатам предыдущего пункта получается, что любая $\mathbb{Z}_n$-градуированная алгебра ($n \in \mathbb{N}$), удовлетворяющая определению 5 и условиям 1 – 3, причём $\mathcal{A}_{\bar{1}} \neq \{0\}$, является коммутативной в обычном смысле.

Теорема 2. *Не существует $\mathbb{Z}_2$-градуированной $\mathcal{R}$-алгебры, не содержащей делителей нуля, коммутативной в смысле определения 4 и некоммутативной в обычном смысле.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$ есть $\mathbb{Z}_2$-градуированная $\mathcal{R}$-алгебра, не содержащая делителей нуля и коммутативная в смысле определения 4.

Если для некоторого ненулевого однородного элемента $a \in \mathcal{A}$ выполнено $a = -a$, то a коммутирует со всеми однородными элементами в обычном смысле. Если же a таков, что $aa = -aa$, то необходимо выполнено $a = -a$, так как тогда $(a + a)a = 0$. Поэтому из $a \neq -a$ следует $aa \neq -aa$.

Если $a \in \mathcal{A}_1$, $a \neq 0$ и $a \neq -a$, то $aa = (-1)^{\mu(1,1)}aa$. В силу отсутствия делителей нуля $aa \neq 0$, поэтому необходимо $\mu(1, 1) = 0$. В группе $\mathbb{Z}_2$ единственным образующим элементом является единица. Пользуясь линейностью и симметричностью отображения μ получаем $\mu(1, 0) = \mu(0, 1) = \mu(1 + 1, 1) = \mu(1, 1) + \mu(1, 1) = 0 + 0 = 0$.

Для любых двух однородных элементов $a \in \mathcal{A}_{z_1}, b \in \mathcal{A}_{z_2}$, где $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}_2$ выполнено $ab = ba$, то есть алгебра $\mathcal{A}$ коммутативна в обычном смысле. □

1.4. Заметим, что существует алгебра, удовлетворяющая условиям 1 – 3, определению 5, некоммутативная в обычном смысле и не удовлетворяющая определению 4.

Пример 2. Пусть $X = \{x_1, x_2\}$, $\mathbb{R}$ – поле вещественных чисел, G – группа многочленов из $\mathbb{Z}[y_1, y_2]$, все отличные от нуля мономы которых имеют степень, равную единице. Пусть $\mathbb{R}\{X\}$ – свободная алгебра с порождающим множеством X.

Зафиксируем произвольное число $q \in \mathbb{R}, q \neq 0, q^2 \neq 1$. Пусть I – двусторонний идеал в алгебре $\mathbb{R}\{X\}$, порождённый элементом $x_1x_2 - qx_2x_1$. Построим $A = \mathbb{R}\{X\}/I$.

Алгебра A представляется прямой суммой $\mathbb{R}$-модулей:

$$A = \bigoplus_{g \in G} A_g, g \in G,$$

где $\mathbb{R}$-модули $\{A_g\}_{g \in G}$ определяются следующим образом. Если элемент $g = c_1y_1+c_2y_2, c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$ таков, что $c_1, c_2 \geqslant 0$, то модуль A_g состоит из всех элементов вида $rx_1^{c_1}x_2^{c_2}$, $r \in \mathbb{R}$. Если для элемента $g = c_1y_1 + c_2y_2$ условие $c_1, c_2 \geqslant 0$ не выполняется, то такой модуль определим как состоящий из одного лишь нуля: $A_g = 0$. Произведение пустого множества букв обозначим символом 1; оно будет единицей конструируемой алгебры A.

Определим отображение $\mathfrak{m}$ на всех парах образующих элементов группы G: $\mathfrak{m}(y_1, y_1) = 1$, $\mathfrak{m}(y_2, y_2) = 1$, $\mathfrak{m}(y_1, y_2) = q$. Таким образом, отображение $\mathfrak{m}$ определено на всех парах из $G \times G$.

§ 2. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОБОБЩЁННОЙ КОММУТАТИВНОСТИ

2.1. Результаты теоремы 1 мотивируют следующие определения градуирующей группы и соответствующей коммутативной алгебры.

Определение 6. *Градуирующей группой* будем называть пару $\mathcal{G} = (G, \mathfrak{m})$, в которой:

1. G – абелева группа,
2. $\mathfrak{m} : G \times G \to \mathcal{U}(\mathcal{R})$ – отображение, удовлетворяющее условиям:

$$\mathfrak{m}(g, g') = \big(\mathfrak{m}(g', g)\big)^{-1}, \tag{9}$$

$$\mathfrak{m}(g_1 + g_2, g) = \mathfrak{m}(g_1, g)\mathfrak{m}(g_2, g) \tag{10}$$

для любых $g, g', g_1, g_2 \in G$.

Замечание 5. Градуирующая группа в смысле определения 1 является градуирующей группой в смысле определения 6.

Заметим, что отображение $\mathfrak{m}$ может быть несюръективным, то есть образом $G \times G$ может быть некоторое собственное подмножество $\mathcal{U}(\mathcal{R})$.

Предложение 1. *Множество $S_g = \{\mathfrak{m}(g, g')|g' \in G\}$ является подгруппой группы $\mathcal{U}(\mathcal{R})$ и $\mathfrak{m}(G \times G) = \cup_{g \in G} S_g$.*

Доказательство. Для каждого $\mathfrak{m}(g, g') \in S_g$ найдётся обратный элемент $\mathfrak{m}(g, -g') \in S_g$. Произведение двух элементов $\mathfrak{m}(g, g_1), \mathfrak{m}(g, g_2) \in S_g$ также принадлежит S_g: $\mathfrak{m}(g, g_1) \cdot \mathfrak{m}(g, g_2) = \mathfrak{m}(g, g_1 + g_2)$. $1 = \mathfrak{m}(g, 0) \in S_g$. □

Предложение 2. *Если градуирующая группа G такова, что все её элементы порождены некоторым одним её элементом e, то тогда образ множества $G \times G$ при отображении $\mathfrak{m}$ является коммутативной группой.*

Доказательство. Действительно, тогда $\mathfrak{m}(G \times G)$ состоит из всех элементов вида $\mathfrak{m}(ne, me)$, где $n, m \in \mathbb{Z}$. По свойствам отображения $\mathfrak{m}$

$$\mathfrak{m}(ne, me) = \mathfrak{m}(e, (mn)e). \tag{11}$$

Множество $\mathfrak{m}(G \times G)$ содержит единицу. Для любого $q \in \mathfrak{m}(G \times G)$ существует обратный $q^{-1} \in \mathfrak{m}(G \times G)$. Из (11) следует: в $\mathfrak{m}(G \times G)$ вместе с двумя любыми элементами q_1, q_2 содержится и их произведение $q_1 q_2$. Коммутативность и ассоциативность следуют из коммутативности и ассоциативности кольца $\mathcal{R}$. □

2.2. Далее G-градуированная $\mathcal{R}$-алгебра будет пониматься в смысле определений 2 и 3, в которых под группой G разумеется группа, введённая в определении 6.

Определение 7. G-градуированная $\mathcal{R}$-алгебра $\mathcal{A}$ называется *коммутативной*, если для любых двух однородных элементов $a \in \mathcal{A}_g$, $b \in \mathcal{A}_{g'}$ выполнено:

$$ab = \mathfrak{m}(g, g')ba. \tag{12}$$

Алгебра, построенная в примере 2, и алгебра Грассмана удовлетворяют определению 7.

Вопрос: может ли возникнуть ситуация, что при перестановке множителей в произведении $p_1 p_2 ... p_n$ (отличном от нуля) однородных элементов $p_1, p_2, ..., p_n$ градуированной алгебры $\mathcal{B}$, удовлетворяющей определению 7, в результате получим произведение $e p_1 p_2 ... p_n$, где $e \in \mathcal{R}, e \neq 1$? В следующей теореме даётся отрицательный ответ для алгебры над полем.

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{B}$ есть G-градуированная алгебра над полем $\mathcal{F}$, удовлетворяющая определению 7, $p_1, p_2, ..., p_n$ – однородные элементы алгебры $\mathcal{B}$, причём*

$$p_1 p_2 ... p_n \neq 0. \tag{13}$$

Тогда каким бы образом мы ни переставляли множители в произведении $p_1 p_2 ... p_n$, используя правила коммутирования из определения 7, невозможно получить в результате произведение $e p_1 p_2 ... p_n$, где $e \in \mathcal{F}, e \neq 1$.

Доказательство. Для $n = 1$ теорема тривиальна.

Предположим, что $p_r = p_s$, и поэтому p_r, p_s принадлежат одному модулю $\mathcal{B}_g, g \in G$. Если $\mathfrak{m}(g,g) = e \neq 1$, то по определению 7

$$p_r p_s = e p_s p_r. \tag{14}$$

Из $p_r p_s = p_s p_r$ и 14 следует

$$(1-e) p_r p_s = 0. \tag{15}$$

Из (13) следует $p_r p_s \neq 0$. Следовательно, если среди элементов $p_i, i = \overline{1,n}$ есть два равных между собой, например $p_r = p_s$, $p_r \in \mathcal{B}_g, g \in G$, то необходимо $\mathfrak{m}(g,g) = 1$.

Если все $p_i, i = \overline{1,n}$ равны между собой, то теорема доказана.

Предположим, что среди $p_i, i = \overline{1,n}$ есть два отличных друг от друга элемента p_a и p_b. Пусть во множестве $p_i, i = \overline{1,n}$ присутствуют всего k элементов, равных p_a и всего m, равных p_b. Введём для них нумерацию: $p_a^1, ..., p_a^k$ и $p_b^1, ..., p_b^m$.

Пусть в произведении $p_1 p_2 ... p_n$ слева от элемента p_a^s стоит всего k_s элементов, равных p_b. Обозначим $S_{ab} = \sum_{s=1}^{k} k_s$.

Обозначим $e_{ab} = \mathfrak{m}(g_a, g_b)$, где $p_a \in \mathcal{B}_{g_a}$,$p_b \in \mathcal{B}_{g_b}$.

Обозначим $P = p_1 p_2 ... p_n$. Каждый раз, когда в произведении P переставляются множители по правилу (12), результат равен P.

Пусть в $p_1 p_2 ... p_n$ проведена последовательность перестановок множителей по правилу (12), и результат этих перестановок есть $e p_1 p_2 ... p_n$ (на i-том месте в произведении стоит сам элемент p_i или равный ему), где $e \in \mathcal{F}$. Для $e p_1 p_2 ... p_n$ число S_{ab} равно числу S_{ab} для $p_1 p_2 ... p_n$. Каждый раз, когда в P при перестановках множитель $p_a p_b$ заменялся на $p_b p_a$, число S_{ab} увеличивалось на единицу, и произведение P умножалось на e_{ab}. Но число S_{ab} в конечном счёте осталось прежним. Это значит, что каждой замене $p_a p_b$ на $p_b p_a$, проведённой в произведении P, соответствует замена $p_b p_a$ на $p_a p_b$ и умножение на e_{ab}^{-1}.

Получается, что для любой пары множителей p_i, p_j произведение множителей e_{ij}, e_{ji}, появившихся при перестановках элементов $p_a : ((p_a = p_i) \vee (p_a = p_j))$, равно 1. Следовательно, $e = 1$. □

Замечание 6. Если $q \in \mathcal{F}, q \neq 1$, то в силу условия (13) необходимо $p_1 p_2 ... p_n \neq q p_1 p_2 ... p_n$, иначе

$$(1-q) p_1 p_2 ... p_n = 0. \tag{16}$$

Множитель $(1-q)$ обратим, так как является ненулевым элементом поля $\mathcal{F}$. Умножим (16) на $(1-q)^{-1}$, получим противоречие с (13). Таким образом, если бы теорема 3 не выполнялась, то мы не смогли бы построить пример 2 таким, какой он есть, так как тогда необходимо требовалось бы, чтобы произведения некоторых ненулевых однородных элементов были равны нулю.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Зарисский О. Коммутативная алгебра / О. Зарисский, П. Самюэль. — М.: Издательство иностранной литературы, 1963. — Т. 2. — 444 с.

[2] Kostant B. Graded manifolds, graded Lie theory and prequantisation / B. Kostant // Lecture Notes in Mathematics. — 1977. — № 570. — P. 177–306.

[3] Березин Ф.А. Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными / Ф.А. Березин. — М.: Изд-во МГУ, 1983. — 205 с.

[4] Лейтес Д.А. Теория супермногообразий / Д.А. Лейтес. — Петрозаводск: Изд-во Петрозаводск. ун-та, 1983. — 200 с.

[5] Кассель К. Квантовые группы / К. Кассель. — М.: ФАЗИС, 1999. — 666 с.

[6] ван дер Варден Б. Л. Алгебра / Б. Л. ван дер Варден. — СПб.: Лань, 2004. — 624 с.

[7] Иванова Н.И. Параболические подалгебры и градуировки редуктивных супералгебр Ли / Н.И. Иванова, А.Л. Онищик // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2006. — Т. 20. — С. 5–68.

[8] Конев В.В. О коммутативных градуированных алгебрах / В.В. Конев // Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач. Материалы Международной молодежной научной школы. 22–23 июня 2012 г., Воронеж, 2012. — С. 22–24.

[9] Конев В.В. О коммутативных градуированных алгебрах / В.В. Конев // Летняя школа-конференция по алгебраической геометрии и комплексному анализу для молодых учёных России. 20–25 мая 2013, Ярославль, 2013. — С. 44–46.

[10] Атанов А.В. Об ограничениях и запретах на коэффициенты келлеровых отображений / А.В. Атанов, А.В. Лобода // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2008. — № 2. — С. 108–114.

[11] Лобода А.В. К вопросу о комбинаторной составляющей гипотезы о якобиане / А.В. Лобода, А.В. Шиповская // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2012. — № 2. — С. 162–172.

[12] Scheunert M. Generalized Lie algebras / M. Scheunert // J. Math. Physics. — 1979. — V. 20. — P. 712–720.

[13] Kobayashi Y. Lie groups and Lie algebras with generalized supersymmetric parameters / Y. Kobayashi, S. Nagamachi // J. Math. Physics. — 1984. — V. 25. — P. 3367–3374.

[14] Kobayashi Y. Analysis on generalized superspace / Y. Kobayashi, S. Nagamachi // J. Math. Physics. — 1986. — V. 21. — P. 2247–2256.

REFERENCES

[1] Zariski O., Samuel P. Commutative Algebra. [Zarisskij O., Samyue'l' P. Kommutativnaya algebra]. Moscow: Publishing house of foreign literature, 1963, Vol. 2, 444 p.

[2] Kostant B. Graded manifolds, graded Lie theory and prequantisation. Lecture Notes in Mathematics, 1977, no. 570, pp. 177–306.

[3] Berezin F.A. Introduction to algebra and analysis wiht anticommutative variables. [Berezin F.A. Vvedenie v algebru i analiz s antikommutiruyushhimi peremennymi]. Moscow: MSU, 1983, 205 p.

[4] Leites D.A. Theory of Supermanifolds. [Lejtes D.A. Teoriya supermnogoobrazij]. Petrozavodsk: Publishing house of the Petrozavodsk University, 1983, 200 p.

[5] Kassel C. Quantum Groups. [Kassel' K. Kvantovye gruppy]. Moscow: FAZIS, 1999, 666 p.

[6] van der Waerden B. L. Albegra. [van der Varden B. L. Algebra]. Saint Petersburg: Lan', 2004, 624 p.

[7] Ivanova N.I., Onishch A.L. Parabolic subalgebras and gradings of reductive Lie superalgebras. [Ivanova N.I., Onishhik A.L. Parabolicheskie podalgebry i graduirovki reduktivnyx superalgebr Li]. *Sovremennaya matematika. Fundamental'nye napravleniya — Modern mathematics. Fundamental directions*, 2006, Vol. 20, pp. 5–68.

[8] Konev V.V. About commutative graded algebras. [Konev V.V. O kommutativnyx graduirovannyx algebrax]. Theory and numerical methods of solving of inverse and uncorrect problems. Materials International youth scientific school. June 22–23, 2012, Voronezh, 2012, pp. 22–24.

[9] Konev V.V. About commutative graded algebras. [Konev V.V. O kommutativnyx graduirovannyx algebrax]. The Summer School on algebraic geometry and complex analysis for young scientists of Russia. 20–25 May 2013. Yaroslavl, 2013, pp. 44-46.

[10] Atanov A.V., Loboda A.V. About limitations and interdictions for coefficients of Keller maps. [Atanov A.V., Loboda A.V. Ob ogranicheniyax i zapretax na koe'fficienty kellerovyx

otobrazhenij]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2008, no. 2, pp. 108–114.

[11] Loboda A.V., Shipovskaia A.V. On the combinatorial component of the Jacobian Hypothesis. [Loboda A.V., Shipovskaya A.V. K voprosu o kombinatornoj sostavlyayushhej gipotezy o yakobiane]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 2, pp. 162–172.

[12] Scheunert M. Generalized Lie algebras. J. Math. Physics, 1979, Vol. 20, pp. 712–720.

[13] Kobayashi Y., Nagamachi S. Lie groups and Lie algebras with generalized supersymmetric parameters. J. Math. Physics, 1984, Vol. 25, pp. 3367–3374.

[14] Kobayashi Y., Nagamachi S. Analysis on generalized superspace. J. Math. Physics, 1986, Vol. 21, pp. 2247–2256.

Конев Виктор Викторович, аспирант кафедры математического моделирования математического факультета Воронежского Государственного Университета, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: victor.konev@mail.ru
Тел.: +7(960)113–16–03

Konev V. V., postgraduate student, Department of Mathematical Modeling, Mathematical Faculty, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: victor.konev@mail.ru
Tel.: +7(960)113–16–03