УДК 517.9

ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА В КВАЗИБАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

А. А. Замышляева, Х. М. Аль Хелли

Южно-Уральский государственный университет

Поступила в редакцию 26.03.2014 г.

Аннотация: теория уравнений соболевского типа переживает эпоху бурного расцвета. В данной работе теория уравнений соболевского типа высокого порядка с относительно спектрально ограниченными операторами, развитая в банаховых пространствах, переносится в квазибанаховы пространства. Мы используем уже хорошо зарекомендовавший себя при решении уравнений соболевского типа метод фазового пространства, заключающийся в редукции сингулярного уравнения к регулярному, определенному на некотором подпространстве исходного пространства. Построены пропагаторы и фазовое пространство неполного уравнения соболевского типа высокого порядка. Абстрактные результаты иллюстрированы конкретными примерами. В качестве приложения рассмотрено уравнение Буссинеска – Лява в квазибанаховом пространстве.

Ключевые слова: уравнения соболевского типа высокого порядка, квазибанаховы пространства, пропагаторы, фазовое пространство.

THE PHASE SPACE OF ONE CLASS OF HIGHER ORDER SOBOLEV TYPE EQUATIONS IN QUASI-BANACH SPACES

A. A. Zamyshlyaeva, Hamis M. A. Al Helli

Abstract: the theory of Sobolev type equations experiences an epoch of blossoming. In this article the theory of higher order Sobolev type equations with relatively spectrally bounded operators, previously developed in Banach spaces, is transferred to quasi-Banach spaces. We use already well proved for solving Sobolev type equations phase space method, consisting in reduction of singular equation to regular one defined on some subspace of initial space. The propagators and the phase space of noncomplete higher order Sobolev type equations are constructed. Abstract results are illustrated by specific examples. The Boussinesq-Love equation in quasi-Banach space is considered as application.

Keywords: Sobolev type equations, quasi-Banach spaces, propagators, phase space.

Пусть $\mathfrak{U}, \mathfrak{F}$ — банаховы пространства, операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (линейны непрерывны, определены на $\mathfrak{U}$ и действуют в $\mathfrak{F}$. Рассмотрим уравнение соболевского типа (термин ввел в обиход Р.Е. Шоуолтер [1])

$$Lu^{(n)} = Mu, \ \ker L \neq \{0\}. \tag{0.1}$$

Уравнения вида (0.1) первого порядка к настоящему моменту хорошо изучены [2]. Первая монография, посвященная таким уравнениям, вышла в свет в 2003 году [3]. Здесь построены вырожденные аналитические (полу)группы, а также вырожденные C_0-полугруппы, используемые в исследовании уравнений первого порядка. В [4] приводится видоизменение классической теоремы Соломяка–Иосиды для генератора аналитической полугруппы, расширяющее возможности приложений, в частности для исследования дифференциальных операторов с особенностями. Линейные уравнения соболевского типа (0.1) высокого порядка ($n \geqslant 2$) в банаховых пространствах исследовались в [5]. Результаты теории уравнений соболевского типа нашли применение в теории динамических измерений [6], в теории оптимального управления [7], [8] при изучении дихотомий уравнений вида (0.1) [9]. Кроме того, теория вырожденных групп и полугрупп операторов была перенесена в локально-выпуклые пространства [10].

Уравнения вида (0.1) впервые начал изучать А. Пуанкаре, однако систематическое их изучение началось в середине прошлого века после основополагающих работ С.Л. Соболева (см. прекрасный исторический обзор в [11]). Ныне уравнения соболевского типа активно изучаемая область неклассических уравнений математической физики, и число монографий, полностью посвященных им (см. например, [12]) либо частично (см. например, [13, гл. 6]), растет лавинообразно.

В данной работе уравнения соболевского типа высокого порядка вида (0.1) будут рассмотрены в квазибанаховых пространтсвах. Как известно [14, п. 3.10], квазибанаховы пространства ненормируемы, но метризуемы. Расхожим примером квазибанаховых пространств служат пространства последовательностей ℓ_q, $q\in(0,1)$. В работе [15] построены квазибанаховы пространства ℓ_q^m, $q\in(0,1)$, $m\in\mathbb{R}$, $\ell_q^0=\ell_q$, которые названы квазисоболевыми [16]. Именно этими пространствами мы воспользуемся для иллюстрации абстрактных результатов.

Авторы считают своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность профессору Г.А. Свиридюку за постановку задачи.

1. ОТНОСИТЕЛЬНО p-ОГРАНИЧЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Линеал $\mathfrak{U}$ над полем $\mathbb{R}$ назовем *квазинормированным*, если на нем задана функция ${}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\|:\mathfrak{U}\to\mathbb{R}$ со следующими свойствами:

(i) ${}_{\mathfrak{U}}\|u\|\geqslant 0$ при всех $u\in\mathfrak{U}$, причем ${}_{\mathfrak{U}}\|u\|=0$ точно тогда, когда $u=\mathbf{0}$, где $\mathbf{0}$ — нуль линеала $\mathfrak{U}$;

(ii) ${}_{\mathfrak{U}}\|\alpha u\|=|\alpha|{}_{\mathfrak{U}}\|u\|$ при всех $u\in\mathfrak{U}$, $\alpha\in\mathbb{R}$;

(iii) ${}_{\mathfrak{U}}\|u+v\|\leqslant C({}_{\mathfrak{U}}\|u\|+{}_{\mathfrak{U}}\|v\|)$ при всех $u,v\in\mathfrak{U}$, где константа $C\geqslant 1$.

Функция ${}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\|$ со свойствами (i) – (iii) называется *квазинормой.* В частном случае $C=1$ квазинорма ${}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\|$ называется нормой, а линеал $\mathfrak{U}$ с нормой ${}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\|$ — нормированным. Квазинормированный линеал $(\mathfrak{U};{}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\|)$ метризуем (см. [14, лемма 3.10.1]), поэтому мы располагаем понятием фундаментальной последовательности $\{u_k\}\subset\mathfrak{U}$: ${}_{\mathfrak{U}}\|u_k-u_l\|\to 0$ при $k,l\to\infty$. Определим *квазибанахово пространство* как полный квазинормированный линеал.

Пример 1.1. Пусть $\{\lambda_k\}\subset\mathbb{R}_+$ — монотонная последовательность такая, что $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k=+\infty$, а $q\in\mathbb{R}_+$. Положим

$$\ell_q^m=\left\{u=\{u_k\}\subset\mathbb{R}:\ \sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^{\frac{m}{2}}|u_k|\right)^q<+\infty\right\}.$$

Линеал ℓ_q^m при всех $m\in\mathbb{R}$, $q\in\mathbb{R}_+$ с квазинормой элемента $u=\{u_k\}\in\ell_q^m$

$${}_q^m\|u\|=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^{\frac{m}{2}}|u_k|\right)^q\right)^{1/q}$$

является квазибанаховым пространством (при $q\in[1,+\infty)$ — банаховым). Заметим, что если $q\in(0,1)$, то в (iii) константа $C=2^{1/q}$. Пространства ℓ_q^m названы в [15, 16] *квазисоболевыми.*

Пусть $(\mathfrak{U};{}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\|)$ и $(\mathfrak{F};{}_{\mathfrak{F}}\|\cdot\|)$ — квазибанаховы пространства, линейный оператор $L:\mathfrak{U}\to\mathfrak{F}$ с областью определения $\mathrm{dom}L=\mathfrak{U}$ назовем *непрерывным*, если $\lim\limits_{k\to\infty}Lu_k=L\left(\lim\limits_{k\to\infty}u_k\right)$ для любой сходящейся в $\mathfrak{U}$ последовательности $\{u_k\}\subset\mathfrak{U}$. Заметим, что в данном случае линейный оператор $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ непрерывен точно тогда, когда он ограничен (т.е. отображает ограниченные множества в ограниченные). Обозначим через $\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ линеал (над полем $\mathbb{R}$) линейных ограниченных операторов — квазибанахово пространство с квазинормой

$$_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})}\|L\| = \sup_{_{\mathfrak{U}}\|u\|=1} {_{\mathfrak{F}}\|Lu\|}.$$

Теперь пусть операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Следуя [2; 3, п. 2.1], введем в рассмотрение L-резольвентное множество $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})\}$ и L-спектр $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ оператора M. Рассуждая аналогично замечанию 2.1.2 [3], нетрудно показать, что множество $\rho^L(M)$ всегда открыто, поэтому L-спектр $\sigma^L(M)$ оператора M всегда замкнут. Кроме того, если $\rho^L(M) \neq \varnothing$, то L-резольвента $(\mu L - M)^{-1}$ оператора M аналитична в $\rho^L(M)$ [3, теорема 2.1.1]. Назовем оператор M *(L,σ)-ограниченным*, если

$$\exists a \in \mathbb{R}_+ \ \forall \mu \in \mathbb{C} \ (|\mu| > a) \ \Rightarrow \ (\mu \in \rho^L(M)).$$

Итак, пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Выберем контур $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$ и построим операторы

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R^L_\mu(M)d\mu \quad \text{и} \quad Q = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma L^L_\mu(M)d\mu,$$

где интегралы понимаются в смысле Римана. Заметим, что в силу голоморфности правой $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L$ и левой $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ L-резольвент оператора M, операторы P и Q не зависят от радиуса r контура γ. Рассуждая аналогично доказательству [3, лемма 4.1.1], нетрудно показать, что операторы $P \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ $(\equiv \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{U}))$ и $Q \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$ — проекторы. Положим $\mathfrak{U}^0 = \ker P$, $\mathfrak{U}^1 = \mathrm{im} P$, $\mathfrak{F}^0 = \ker Q)$, $\mathfrak{F}^1 = \mathrm{im} Q)$; и через L_k (M_k) обозначим сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^k$, $k = 0, 1$.

Теорема 1.1 (теорема о расщеплении). *Пусть операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, причем оператор M (L,σ)-ограничен. Тогда*

(i) *операторы* $L_k, M_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{F}^k)$, $k = 0, 1$;

(ii) *существуют операторы* $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1;\mathfrak{U}^1)$ *и* $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0;\mathfrak{U}^0)$.

Доказательство теоремы можно найти в [15]. Положим $H = M_0^{-1}L_0$, $S = L_1^{-1}M_1$. Очевидно, операторы $H \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$, $S \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1)$.

Следствие 1.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.1. *Тогда при всех* $\mu \in \mathbb{C} : \ |\mu| > a$ *имеет место*

$$(\mu L - M)^{-1} = -\sum_{k=1}^{\infty} \mu^k H^k M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q) + \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{-k} S^{k-1} L_1^{-1} Q.$$

Назовем точку ∞ *устранимой особой точкой* L-резольвенты оператора M, если $H = \mathbb{O}$; *полюсом порядка* p, если $H^p \neq \mathbb{O}$, а $H^{p+1} = \mathbb{O}$; *существенно особой точкой*, если $H^k \neq \mathbb{O}$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Удобно устранимую особую точку считать полюсом порядка нуль. Назовем (L,σ)-ограниченный оператор M (L,p)-ограниченным, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, если точка ∞ — полюс порядка p L-резольвенты оператора M.

Вектор $\varphi \in \mathfrak{U}$ назовем *M-присоединенным вектором* оператора L, если существует вектор $\psi \in \mathfrak{U}$ такой, что $L\psi = M\varphi$. Упорядоченное множество $\{\varphi_k : \ k \in \{0\} \cup \mathbb{N}, \ L\varphi_{k+1} = M\varphi_k, \ \varphi_0 \in \ker L\} \equiv \{\varphi_k : \ k \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$ назовем *цепочкой M-присоединенных векторов* оператора L. Цепочка операторов может быть бесконечной, однако она обязательно конечна, если существует вектор $\varphi_q \in \{\varphi_k : \ k \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$ такой, что $M\varphi_q \notin \mathrm{im} L$. Мощность конечной цепочки назовем ее длиной. Напомним еще, что оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ называется *фредгольмовым*, если $\dim\ker L = \mathrm{codim}\,\mathrm{im} L < \infty$.

Теорема 1.2. *Пусть оператор L фредгольмов. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(i) *оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$;*

(ii) *длина любой цепочки M-присоединенных векторов оператора L не превышает p и существует по крайней мере одна цепочка длины p.*

Доказательство теоремы 1.2 аналогично [3, гл. 4].

Пример 1.2. Введем в рассмотрение *квазиоператор Лапласа* с помощью формулы $\Lambda u = \{\lambda_k u_k\}$, $u \in \ell_q^m$. Как нетрудно показать [16], оператор $\Lambda : \ell_q^{m+2} \to \ell_q^m$ — топлинейный изоморфизм при всех $m \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}_+$. Обратный оператор $\Lambda^{-1} u = \{\lambda_k^{-1} u_k\}$ назовем *квазиоператором Грина.*

Далее, построим операторы $L = \lambda - \Lambda$ и $M = \alpha\Lambda$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Покажем, что при всех $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ оператор M $(L,0)$-ограничен. Если $\lambda \notin \{\lambda_k\}$, то утверждение тривиально. Если же $\lambda = \lambda_k$ при некоторых $k \in \mathbb{N}$ (их обязательно конечное множество в виду монотонной сходимости $\lambda_k \to +\infty$), то утверждение следует из теоремы 1.2.

2. ПРОПАГАТОРЫ И ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО УРАВНЕНИЯ

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — квазибанаховы пространства, операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Рассмотрим линейное уравнение соболевского типа

$$Lu^{(n)} = Mu. \tag{2.1}$$

Вектор-функцию $u \in C^\infty(\mathbb{R};\mathfrak{U})$ назовем *решением уравнения* (2.1), если она удовлетворяет ему. Решение $u = u(t)$ уравнения (2.1) назовем решением задачи Коши

$$u^{(m)}(0) = u_m,\ m = 0, \dots n-1 \tag{2.2}$$

для уравнения (2.1) (коротко, задачи (2.1), (2.2)), если оно вдобавок удовлетворяет условию Коши (2.2). Заметим, что вообще говоря, задача (2.1), (2.2) не разрешима при любых $u_m \in \mathfrak{U}$, и для уравнений вида (2.1) приходится ставить другие задачи, например, с условием Шоуолтера–Сидорова $P(u^{(m)}(0) - u_m) = 0$ [17].

Построим множество $\sigma_n^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : \mu^n \in \sigma^L(M)\}$; оно компактно в $\mathbb{C}$ в силу компактности L-спектра $\sigma^L(M)$ оператора M. Возьмем замкнутый контур $\Gamma = \{|\mu| = R : R^n > a\}$ и построим оператор функции

$$V_m^t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \mu^{n-m-1} (\mu^n L - M)^{-1} L e^{\mu t} d\mu,$$

где $m = 0, 1, \dots, n-1$, а интеграл понимается в смысле Римана.

Определение 2.1. Отображение $V^\bullet \in C^\infty(\mathbb{R};\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$ называется *пропагатором* уравнения (2.1), если для любого $v \in \mathfrak{U}$ вектор-функция $u(t) = V^t v$ является решением уравнения (2.1).

Теорема 2.1. *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Тогда оператор-функции V_m^t, $m = 0, 1, \dots, n-1$, определяют пропагаторы уравнения (2.1).*

Лемма 2.1. $V_m^\bullet \in C^\infty(\mathbb{R};\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{U}^1))$, $\left(V_m^t\right)_t^{(l)} = V_{m+l}^t$, *где* $m = 0, 1, \dots, n-1$, $l = 0, 1, \dots, m$; $\left.\left(V_m^t\right)_t^{(l)}\right|_{t=0} = \mathbb{O}$ *при* $m \neq l$ *и* $\left.\left(V_m^t\right)_t^{(m)}\right|_{t=0} = P$ *– проектор* $\mathfrak{U}$ *на* $\mathfrak{U}^1$ *вдоль* $\mathfrak{U}^0$.

Определение 2.2. Множество $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{U}$ называется *фазовым пространством* уравнения (2.1), если

(i) при любых $u_m \in \mathfrak{P}$, $m = 0, \dots, n-1$ существует единственное решение задачи (2.1), (2.2);

(ii) любое решение $u = u(t)$ уравнения (2.1) лежит в $\mathfrak{P}$ как траектория (т.е. $u(t) \in \mathfrak{P}$ при всех $t \in \mathbb{R}$).

Теорема 2.2. *Пусть оператор* M (L,p)*-ограничен,* $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. *Тогда фазовым пространством уравнения* (2.1) *служит подпространство* $\mathfrak{U}^1$.

Приведем набросок доказательства. В силу теоремы 1.1 уравнение (2.1) эквивалентно системе из двух уравнений

$$Hu^{0(n)} = u^0, \qquad u^{1(n)} = Su^1, \tag{2.3}$$

где $u^0 = u^0(t) = (\mathbb{I} - P)u(t) \in \mathfrak{U}^0$ и $u^1 = u^1(t) = Pu(t) \in \mathfrak{U}^1$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Дифференцируя первое уравнение по t n раз и применяя оператор H слева, последовательно получим

$$0 = H^{p+1}\frac{d^{(p+1)n}}{dt^{(p+1)n}}u^0(t) = H^p\frac{d^{pn}}{dt^{pn}}u^0(t) = \ldots = Hu^0(t) = u^0(t).$$

Значит, все решения уравнения (2.1) лежат в $\mathfrak{U}^1$ как траектории. Однозначная разрешимость задачи $u^{1(m)}(0) = u^1_m$, $m = 0, \ldots, n-1$, для второго уравнения (2.3) при любых $u^1_m \in \mathfrak{U}^1$ очевидна ввиду ограниченности оператора $S \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1)$. Таким образом, при любых $u_m \in \mathfrak{U}^1$ существует единственное решение задачи (2.1), (2.1), представимое в виде

$$u(t) = u^1(t) = \sum_{m=0}^{n-1} V^t_m u^1_m.$$

Пример 2.1. Пусть $\mathfrak{U} = \ell^m_q$, $\mathfrak{F} = \ell^{m+2}_q$, $m \in \mathbb{R}$, $q \in (0,1)$, где квазисоболевы пространства определены в примере 1.1, а операторы L и M построены в примере 1.2. Рассмотрим уравнение Буссинеска–Лява как одно из наиболее известных неклассических уравнений математической физики второго порядка по временной переменной [18]

$$(\lambda - \Lambda)\ddot{u} = \alpha\Lambda u. \tag{2.4}$$

Как нетрудно показать, пропагаторы уравнения (2.4) будут иметь вид

$$V^t_0 u_0 = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{0k}\dfrac{\mu^1_k e^{\mu^1_k t} - \mu^2_k e^{\mu^2_k t}}{\mu^1_k - \mu^2_k} e_k, & \text{если } \lambda \neq \lambda_k,\ k \in \mathbb{N}; \\ \sum\limits_{k \neq l} u_{0k}\dfrac{\mu^1_k e^{\mu^1_k t} - \mu^2_k e^{\mu^2_k t}}{\mu^1_k - \mu^2_k} e_k, & \text{если существует } l \in \mathbb{N} : \lambda = \lambda_l. \end{cases}$$

$$V^t_1 u_1 = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{1k}\dfrac{e^{\mu^1_k t} - e^{\mu^2_k t}}{\mu^1_k - \mu^2_k} e_k, & \text{если } \lambda \neq \lambda_k,\ k \in \mathbb{N}; \\ \sum\limits_{k \neq l} u_{1k}\dfrac{e^{\mu^1_k t} - e^{\mu^2_k t}}{\mu^1_k - \mu^2_k} e_k, & \text{если существует } l \in \mathbb{N} : \lambda = \lambda_l. \end{cases}$$

Здесь $\mu^{1,2}_k = \pm\sqrt{\frac{\alpha\lambda_k}{\lambda - \lambda_k}}$ – точки множества $\sigma^L_n(M)$, последовательности $\{u_{mk}\} = u_m \in \ell^{m+2}_q$, m=0,1, векторы $e_k = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, где единица стоит на k-том месте. Фазовым пространством уравнения (2.4) будет множество

$$\mathfrak{U}^1 = \begin{cases} \mathfrak{U}, \text{ если } \lambda \neq \lambda_k,\ k \in \mathbb{N}; \\ \{x \in \mathfrak{U} :\ x_l = 0,\ \lambda = \lambda_l\}. \end{cases}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Showalter R.E. The Sobolev type equations. I (II) / R.E. Showalter // Appl. Anal. — 1975. — V. 5, № 1 (2). — P. 15–22 (P. 81–99).

[2] Свиридюк Г.А. К общей теории полугрупп операторов / Г.А. Свиридюк // Успехи математических наук. — 1994. — Т. 49, № 4. — С. 47–74.

[3] Sviridyuk G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov // Utrecht, Boston: VSP. — 2003. — 216 p.

[4] Костин В.А. К теореме Соломяка–Иосиды для аналитических полугрупп / В.А. Костин // Алгебра и анализ. — 1999. — Т. 11, № 1. — С. 118–140.

[5] Замышляева А.А. Линейные уравнения соболевского типа высокого порядка / Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2012. — 107 с.

[6] Шестаков А.Л. Численное решение задачи оптимального измерения / А.Л. Шестаков, А.В. Келлер, Е.И. Назарова // Автоматика и телемеханика. — 2012. — № 1. — С. 107–115.

[7] Манакова Н.А. Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для линейных уравнений соболевского типа / Н.А. Манакова, А.Г. Дыльков // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. — 2011. — № 17 (234). — С. 113–114.

[8] Замышляева А.А. Оптимальное управление решениями задачи Шоуолтера-Сидорова-Дирихле для уравнения Буссинеска-Лява / А.А. Замышляева, О.Н. Цыпленкова // Дифференц. уравнения. — 2013. — Т. 49, № 11. — С. 1390–1398.

[9] Сагадеева М.А. Дихотомии решений линейных уравнений соболевского типа / М.А. Сагадеева. — Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2012. — 139 с.

[10] Федоров В.Е. Голоморфные разрешающие полугруппы уравнений соболевского типа в локально выпуклых пространствах / В.Е. Федоров // Математический сборник. — 2004. — Т. 195, № 8. — С. 131–160.

[11] Demidenko G.V. Partial differential equations and systems not solvable with respect to the highest – order derivative / G.V. Demidenko, S.V. Uspenskii. — New York – Basel – Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 2003. — 239 p.

[12] Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 736 с.

[13] Lyapunov–Shmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinithyn, M. Falaleev. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 2002. — 548 p.

[14] Берг Й. Интерполяционные пространства. Введение / Й. Берг, Й. Лёфстрём. — М.: Мир, 1980. — 264 с.

[15] Свиридюк Г.А. Теорема о расщеплении в квазисоболевых пространствах / Г.А. Свиридюк, Аль-Делфи Д.К. // Математические заметки ЯГУ. — 2013. — Т. 20, № 2. — С. 180–185.

[16] Аль-Делфи Д.К. Квазиоператор Лапласа в квазисоболевых пространствах / Аль-Делфи Д.К. // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: физико-математические науки. — 2013. — № 2 (13). — С. 13–16.

[17] Свиридюк Г.А. Задача Шоуолтера – Сидорова как феномен уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. — 2010. — Т. 3, № 1. — С. 104–125.

[18] Ляв А. Математическая теория упругости / А. Ляв. — Москва, Ленинград: ОНТИ, 1935. — 674 с.

REFERENCES

[1] Showalter R.E. The Sobolev Type Equations. I (II). Appl. Anal. 1975, Vol. 5, no. 1 (2), pp. 15–22 (pp. 81–99).

[2] Sviridyuk G.A. On General Theory of Semigroups of Operators. [Sviridyuk G.A. K obshhej teorii polugrupp operatorov]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 1994, Vol. 49, No. 4, pp. 47–74.

[3] Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht, Boston: VSP, 2003, 216 p.

[4] Kostin V.A. On the Solomyak – Iosida Theorem for analytical semigroups. [Kostin V.A. K teoreme Solomyaka–Iosidy dlya analiticheskix polugrupp]. *Algebra i analiz — Algebra and analysis*, 1999, Vol. 11, № 1. pp. 118–140.

[5] Zamyshlyaeva A.A. Linear Sobolev Type Equations of High Order. . [Zamyshlyaeva A.A. Linejnye uravneniya sobolevskogo tipa vysokogo poryadka]. Chelyabinsk, Publ. Center of the South Ural State University, 2012, 107 p.

[6] Shestakov A.L., Keller A.V., Nazarova E.I. Numerical Solution of the Optimal Measurement Problem. [Shestakov A.L., Keller A.V., Nazarova E.I. Chislennoe reshenie zadachi optimal'nogo izmereniya]. *Avtomatika i telemexanika — Automation and Remote Control*, ,. 2012, no. 1, pp. 107–115

[7] Manakova N.A., Dylkov A.G. An Optimal Control of solutions of initial-final problem for linear Sobolev Type Equations. [Manakova N.A., Dyl'kov A.G. Optimal'noe upravlenie resheniyami nachal'no-konechnoj zadachi dlya linejnyx uravnenij sobolevskogo tipa]. *Vestnik YuUrGU. Seriya: Matematicheskoe modelirovanie i programmirovanie — Bulletin of the South Ural State University. Series «Mathematical Modelling, Programming* & *Computer Software»*, 2011, № 17 (234). pp. 113–114.

[8] Zamyshlyaeva A. A., Tsyplenkova O.N. Optimal Control of Solutions for Showalter-Sidorov-Dirichlet Problem for the Boussinesq-Love equation. [Zamyshlyaeva A.A., Cyplenkova O.N. Optimal'noe upravlenie resheniyami zadachi Shouoltera-Sidorova-Dirixle dlya uravneniya Bussineska-Lyava]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2013, Vol. 49, no. 11, pp. 1390–1398.

[9] Sagadeeva M.A. Dichotomy of Solutions of Linear Sobolev Type Equations. [Sagadeeva M.A. Dixotomii reshenij linejnyx uravnenij sobolevskogo tipa]. Chelyabinsk, Publ. Center of the South Ural State University, 2012, 139 p.

[10] Fedorov V.E. Holomorphic Resolving Semigroups of Sobolev Type Equations in Locally Convex Spaces. [Fedorov V.E. Golomorfnye razreshayushhie polugruppy uravnenij sobolevskogo tipa v lokal'no vypuklyx prostranstvax]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 2004, Vol. 195, no. 8, pp. 131–160.

[11] Demidenko G.V., Uspenskii S.V. Partial differential equations and systems not solvable with respect to the highest-order derivative. New York – Basel – Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 2003, 239 p.

[12] Sveshnikov A.G., Al'shin A.B., Korpusov M.O., Pletner Yu.D. Linear and Nonlinear Sobolev Type Equations. [Sveshnikov A.G., Al'shin A.B., Korpusov M.O., Pletner Yu.D. Linejnye i nelinejnye uravneniya sobolevskogo tipa]. Moscow: PHIZMATLIT, 2007, 736 p.

[13] Sidorov N., Loginov B., Sinithyn A. and Falaleev M. Lyapunov–Shmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 2002, 548 p.

[14] Berg Y., Lyofstryom Y. Interpolation Spaces. Introduction. [Berg J., Lyofstryom J. Interpolyacionnye prostranstva. Vvedenie]. Moscow: Mir, 1980, 264 p.

[15] Sviridyuk G.A., Al Delfi D.K. Splitting Theorem in quasi-Sobolev spaces. [Sviridyuk G.A., Al'-Delfi D.K. Teorema o rasshheplenii v kvazisobolevyx prostranstvax]. *Matematicheskie zametki YaGU — Matematicheskie zametki YaGU*, 2013, Vol. 20, no. 2, pp. 180–185.

[16] Al Delfi D.K. Laplace quasi-operator in quasi-Sobolev spaces. [Al'-Delfi D.K. Kvazioperator Laplasa v kvazisobolevyx prostranstvax]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo texnicheskogo universiteta. Seriya: fiziko-matematicheskie nauki — Vestnik of Samara state technical University. Series: physics and mathematics*, 2013, Iss. 2 (13), pp. 13–16.

[17] Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A. The Showalter – Sidorov Problem as Phenomena of the

Sobolev-Type Equations. [Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A. Zadacha Shouoltera – Sidorova kak fenomen uravnenij sobolevskogo tipa]. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika — News of Irkutsk State University. Series «Mathematics»*, 2010, Vol. 3, no. 1, pp. 104–125.

[18] Love A. Mathematical theory of elasticity. [Lyav A. Matematicheskaya teoriya uprugosti]. Moscow; Leningrad: ONTI, 1935, 674 p.

Замышляева Алена Александровна, доцент кафедры уравнений математической физики Южно-Уральского государственного университета (НИУ), кандидат физико-математических наук, доцент, Челябинск, Российская Федерация
E-mail: alzama@mail.ru

Zamyshlyaeva Alyona Aleksandrovna, Associate Professor of Department of mathematical physics equations, South Ural State University, candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: alzama@mail.ru

Аль Хелли Хамис Монем Абдулькадум, магистрант кафедры уравнений математической физики, Южно - Уральского государственного университета (НИУ), Челябинск, Российская Федерация
E-mail: rassian71@mail.ru

Hamis M. A. Al Helli, Master Student of Department of mathematical physics equations, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: rassian71@mail.ru