УДК 517.9

# УСЛОВИЯ НЕЛОКАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С НЕПРЕРЫВНЫМИ И ОГРАНИЧЕННЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ

**М. В. Донцова**

*Нижегородский государственный педагогический университет имени Козьмы Минина*

Поступила в редакцию 06.12.2013 г.

**Аннотация**: рассмотрена задача Коши для системы двух квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с непрерывными и ограниченными правыми частями. Локальная теорема существования и единственности решения задачи Коши доказана с помощью метода дополнительного аргумента. Определены условия нелокальной разрешимости рассмотренной задачи Коши. Исследование нелокальной разрешимости задачи Коши основано на методе дополнительного аргумента. Доказательство нелокальной разрешимости задачи Коши для системы двух квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с непрерывными и ограниченными правыми частями опирается на глобальные оценки.

**Ключевые слова**: уравнения с частными производными первого порядка, задача Коши, метод дополнительного аргумента, глобальные оценки.

# NONLOCAL RESOLVABILITY CONDITIONS OF THE CAUCHY PROBLEM FOR A SYSTEM OF FIRST ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CONTINUOUS AND BOUNDED RIGHT-HAND SIDES

**M. V. Dontsova**

**Abstract**: the Cauchy problem for a system of two quasilinear first order partial differential equations with continuous and bounded right-hand sides is considered. Local existence and uniqueness theorem of the solution of the Cauchy problem is proved with the method of an additional argument. The conditions of a nonlocal resolvability of the considered Cauchy problem are determined. The investigation of a nonlocal resolvability of the Cauchy problem is based on the method of an additional argument. The proof of the nonlocal resolvability of the Cauchy problem for a system of two quasilinear first order partial differential equations with continuous and bounded right-hand sides relies on global estimates.

**Keywords**: first order partial differential equations, Cauchy problem, method of an additional argument, global estimates.

## ВВЕДЕНИЕ

Системы нелинейных и квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка широко используются для описания различных задач из физики и механики. Поэтому изучение общих свойств систем нелинейных и квазилинейных уравнений и методов их решения актуальны в современной математике [1], [2].

Разработано несколько разных методов для исследования разрешимости дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Например, классический метод характеристик, метод Галеркина, метод потоков, метод дополнительного аргумента.

Метод дополнительного аргумента не заменяет собой другие известные методы, а дополняет их, позволяет во многих случаях более эффективно и точно определять условия локальной разрешимости систем нелинейных и квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка [2]–[10].

В работе [2] с помощью метода дополнительного аргумента определены условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы двух квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с правыми частями равными нулю. В данной работе определяем условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы двух квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с непрерывными и ограниченными правыми частями.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + (au(t,x) + bv(t,x))\partial_x u(t,x) = f_1(t,x,u,v), \\ \partial_t v(t,x) + (cu(t,x) + gv(t,x))\partial_x v(t,x) = f_2(t,x,v), \end{cases} \tag{1}$$

где $u(t,x)$, $v(t,x)$ — неизвестные функции, $a$, $b$, $c$, $g$ — известные положительные константы, $f_1(t,x,u,v)$, $f_2(t,x,v)$ — известные функции.

Поставим для системы уравнений (1) задачу Коши, т.е. зададим начальные условия:

$$u(0,x) = \varphi_1(x), \quad v(0,x) = \varphi_2(x), \tag{2}$$

где $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ — известные функции.

Задача (1), (2) определена в области

$$\Omega_t = \{(t,x) | 0 \leqslant t \leqslant T, x \in (-\infty, +\infty), T > 0\}.$$

Примем, что $\varphi_i \in \overline{C}^2(R^1)$, $i = 1,2$, $f_i \in \overline{C}^{2,2,2,2}(Z_{TK})$, $f_2 \in \overline{C}^{2,2,2}(V_{TK})$, где $\overline{C}^{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n}(\Omega_*)$ — пространство функций, определенных и непрерывных вместе со своими производными до порядка $\alpha_m$ по $m$-му аргументу, $m = \overline{1,n}$ на некотором неограниченном подмножестве $\Omega_*$ пространства $R^n$, $n = 1,2,\dots$;

$$V_{TK} = \{(t,x,v) |\, 0 \leqslant t \leqslant T, x \in (-\infty,+\infty), v \in [-K,K]\},$$

$$Z_{TK} = \{(t,x,u,v) |\, 0 \leqslant t \leqslant T, x \in (-\infty,+\infty), u,v \in [-K,K]\},$$

где $K$ — произвольно зафиксированное положительное число.

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА

В соответствии с методом дополнительного аргумента, запишем для задачи (1), (2) расширенную характеристическую систему [2]–[10]:

$$\frac{dz_1(s,t,x)}{ds} = aw_1(s,t,x) + bw_3(s,t,x), \tag{3}$$

$$\frac{dz_2(s,t,x)}{ds} = cw_4(s,t,x) + gw_2(s,t,x), \tag{4}$$

$$\frac{dw_1(s,t,x)}{ds} = f_1(s, z_1(s,t,x), w_1(s,t,x), w_3(s,t,x)), \tag{5}$$

$$\frac{dw_2(s,t,x)}{ds} = f_2(s, z_2(s,t,x), w_2(s,t,x)), \tag{6}$$

$$w_3(s,t,x) = w_2(s,s,z_1), \quad w_4(s,t,x) = w_1(s,s,z_2), \tag{7 – 8}$$

$$w_i|_{s=0} = \varphi_i(z_i(0,t,x)), \quad w_2|_{t=0} = \varphi_2(z_2(0,t,x)). \tag{9 – 10}$$

Неизвестные функции $z_i$, $w_j$, $i = 1,2$, $j = \overline{1,4}$ зависят не только от $t$ и $x$, но еще и от дополнительного аргумента $s$. Интегрируя уравнения (3)–(6) по аргументу $s$ и учитывая условия (7)–(10), получим эквивалентную систему интегральных уравнений:

$$z_1(s,t,x) = x - \int\limits_s^t (aw_1(v,t,x) + bw_3(v,t,x))\, dv, \tag{11}$$

$$z_2(s,t,x) = x - \int\limits_s^t (cw_4(v,t,x) + gw_2(v,t,x))\, dv, \tag{12}$$

$$w_1(s,t,x) = \varphi_1(z_1(0,t,x)) + \int\limits_0^s f_1(v, z_1(v,t,x), w_1, w_3(v,t,x))\, dv, \tag{13}$$

$$w_2(s,t,x) = \varphi_2(z_2(0,t,x)) + \int\limits_0^s f_2(v, z_2(v,t,x), w_2(v,t,x))\, dv \tag{14}$$

$$w_3(s,t,x) = w_2(s,s,z_1), \quad w_4(s,t,x) = w_1(s,s,z_2). \tag{15 – 16}$$

Система (11)–(16) эквивалентна следующей системе:

$$w_1(s,t,x) = \varphi_1(x - \int\limits_0^t (aw_1(v,t,x) + bw_3(v,t,x))\, dv) +$$
$$+ \int\limits_0^s f_1(v, x - \int\limits_v^t (aw_1(\tau,t,x)) + bw_3(\tau,t,x))\, d\tau, w_1, w_3(v,t,x))\, dv, \tag{17}$$

$$w_2(s,t,x) = \varphi_2(x - \int\limits_0^t (cw_4(v,t,x) + gw_2(v,t,x))\, dv) +$$
$$+ \int\limits_0^s f_2(v, x - \int\limits_v^t (gw_2(\tau,t,x) + cw_4(\tau,t,x))\, d\tau, w_2(v,t,x))\, dv, \tag{18}$$

$$w_3(s,t,x) = w_2(s,s,x - \int\limits_s^t (aw_1(v,t,x) + bw_3(v,t,x))\, dv), \tag{19}$$

$$w_4(s,t,x) = w_1(s,s,x - \int\limits_s^t (cw_4(v,t,x) + gw_2(v,t,x))\,dv) \tag{20}$$

Мы будем писать, что константы $a_1, a_2, a_3, \ldots$ определяются через исходные данные, если эти константы определяются через известные характеристики задачи, нормы и экстремумы известных функций при помощи конечных алгебраических, дифференциальных или интегральных выражений, то есть в рамках исходной задачи могут быть выражены конкретным числом.

Справедливо следующее утверждение [2]–[10]:

**Утверждение.** *Если функции $w_1(s,t,v)$, $w_2(s,t,v)$ удовлетворяют системе интегральных уравнений* (17)–(20) *и являются непрерывно дифференцируемыми и ограниченными вместе со своими первыми производными, тогда функции $u(t,v) = w_1(t,t,v)$, $v(t,v) = w_2(t,t,v)$ будут решением задачи* (1), (2) *на $\Omega_{T_0}$, где $T_0 \leqslant T$ — константа, определяемая через исходные данные.*

## СУЩЕСТВОВАНИЕ ЛОКАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Для доказательства существования решения задачи (1)–(2) в классе ограниченных функций будем использовать систему интегральных уравнений (17)–(20).

Обозначим $\Gamma_T = \{(s,t,x)|\, 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T, x \in (-\infty, +\infty), T > 0\}$,

$$C_\varphi = \max_R \{\sup_R |\varphi_i^{(l)}|,\, l = \overline{0,2}\}, \quad C_f = \max\{\sup_{Z_{TK}} |f_1|, \sup_{V_{TK}} |f_2|\},$$

$$N_f = \max\{\sup_{Z_{TK}} |\partial_x f_1|, \sup_{Z_{TK}} |\partial_u f_1|, \sup_{Z_{TK}} |\partial_v f_1|, \sup_{V_{TK}} |\partial_u f_2|, \sup_{V_{TK}} |\partial_v f_2|,$$

$\overline{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$ — пространство функций один раз дифференцируемых по переменной $t$, дважды дифференцируемых функций по переменной $x$, имеющих смешанные производные второго порядка и ограниченные вместе со своими производными на $\Omega_T$.

Для функции $U \in \Gamma_T$ определим норму $\|U\| = \sup\limits_{\Gamma_T} |U(s,t,v)|$.

**Лемма 1.** *Система интегральных уравнений* (17)–(20) *имеет единственное решение $w_j \in \overline{C}^{1,1,1}(\Gamma_{T_{3k}})$, где $j = \overline{1,4}$, $0 < T_{3k} \leqslant T$, $T_{3k}$ — константа, определяемая через исходные данные.*

*Доказательство.* Нулевое приближение к решению системы интегральных уравнений (17)–(20) зададим равенствами:

$$w_{10}(s,t,x) = \varphi_1(x), \quad w_{20}(s,t,x) = \varphi_2(x).$$

Первое и последующие приближения системы уравнений (17)–(20) определим при помощи рекуррентной последовательности систем уравнений $(n = 1, 2, \ldots)$:

$$w_{1n}(s,t,x) = \varphi_1(x - \int\limits_0^t (aw_{1n}(v,t,x) + bw_{3n}(v,t,x))\,dv) +$$

$$+ \int\limits_0^s f_1(v, x - \int\limits_v^t (aw_{1n}(\tau,t,x) + bw_{3n}(\tau,t,x))d\tau, w_{1n}, w_{3n}(v,t,x))\,dv, \tag{21}$$

$$w_{2n}(s,t,x) = \varphi_2(x - \int\limits_0^t (cw_{4n}(v,t,x) + gw_{2n}(v,t,x))\,dv) +$$

$$+\int\limits_0^s f_2(v,x-\int\limits_v^t (gw_{2n}(\tau,t,x)+cw_{4n}(\tau,t,x))d\tau, w_{2n}(v,t,x))\,dv, \quad (22)$$

$$w_{3n}(s,t,x)=w_{2(n-1)}(s,s,x-\int\limits_s^t (aw_{1n}(v,t,x)+bw_{3n}(v,t,x))\,dv), \quad (23)$$

$$w_{4n}(s,t,x)=w_1(n-1)(s,s,x-\int\limits_s^t (cw_{4n}(v,t,x)+gw_{2n}(v,t,x))\,dv). \quad (24)$$

Для системы уравнений (21)–(24) нулевое приближение определим равенствами:

$$w^0_{1n}=w_{1(n-1)}, w^0_{2n}=w_{2(n-1)}, w^0_{3n}=w_{3(n-1)}, w^0_{4n}=w_{4(n-1)}.$$

Для системы уравнений (21)–(24) первое и все последующие приближения определим на основе соотношений:

$$w^{k+1}_{1n}(s,t,x)=\varphi_1(x-\int\limits_0^t (aw^k_{1n}(v,t,x)+bw^k_{3n}(v,t,x))\,dv)+$$

$$+\int\limits_0^s f_1(v,x-\int\limits_v^t (aw^k_{1n}(\tau,t,x)+bw^k_{3n}(\tau,t,x))d\tau, w^k_{1n}, w^k_{3n})\,dv, \quad (25)$$

$$w^{k+1}_{2n}(s,t,x)=\varphi_2(x-\int\limits_0^t (cw^k_{4n}(v,t,x)+gw^k_{2n}(v,t,x))\,dv)+$$

$$+\int\limits_0^s f_2(v,x-\int\limits_v^t (cw^k_{4n}(\tau,t,x)+gw^k_{2n}(\tau,t,x))d\tau, w^k_{2n})\,dv, \quad (26)$$

$$w^{k+1}_{3n}(s,t,x)=w_{2(n-1)}(s,s,x-\int\limits_s^t (aw^k_{1n}(v,t,x)+bw^k_{3n}(v,t,x))\,dv), \quad (27)$$

$$w^{k+1}_{4n}(s,t,x)=w_{1(n-1)}(s,s,x-\int\limits_s^t (cw^k_{4n}(v,t,x)+gw^k_{2n}(v,t,x))\,dv). \quad (28)$$

Также как и в работах [3]–[8] установлено, что для всех $0\leqslant t\leqslant T_{1k}$, где $T_{1k}$ — постоянная, которая определяется через исходные данные, последовательные приближения (25)–(28) ограничены, непрерывны, сходятся к непрерывному решению системы (21)–(24), для которого справедливы оценки: $\|w_{jn}\|\leqslant 2C_\varphi$, $j=\overline{1,4}$.

Обозначим $w_{inx}=\mu_{in}$, $w_{3nx}=\rho_{1n}$, $w_{4nx}=\rho_{2n}$, $i=1,2$.

Предположим, что $\|\mu_{i(n-1)}\|\leqslant 5C_\varphi$, $\|w^k_{inx}\|\leqslant 5C_\varphi$, $\|w^k_{3nx}\|\leqslant 9C_\varphi$, $\|w^k_{4nx}\|\leqslant 9C_\varphi$, $i=1,2$.

По свойствам модулей, интегралов, супремума функции установлено, что для всех $0\leqslant t\leqslant T_{2k}$, где $T_{2k}$ — постоянная, которая определяется через исходные данные, $T_{2k}\leqslant T_{1k}$, справедливы оценки:

$$\|\rho_{in}\|\leqslant 9C_\varphi, \|\mu_{in}\|\leqslant 5C_\varphi, \|w^{k+1}_{inx}\|\leqslant 5C_\varphi, \|x^{k+1}_{3nx}\|\leqslant 9C_\varphi, \|w^{k+1}_{4nx}\|\leqslant 9C_\varphi, i=1,2.$$

Также как и в работах [3]–[8] установлено, что последовательные приближения $w^k_{inx}$, $w^k_{3nx}$, $w^k_{4nx}$ непрерывные, сходятся к $\mu_{in}$, $\rho_{1n}$, $\rho_{2n}$ при $0 \leqslant t \leqslant T_{2k}$, $T_{2k} \leqslant T_{1k}$, следовательно, существуют непрерывные производные $\partial_x w_{jn}$ и справедливы оценки:

$$\left\|\frac{\partial w_{3n}}{\partial x}\right\| \leqslant 9C_\varphi, \left\|\frac{\partial w_{1n}}{\partial x}\right\| \leqslant 5C_\varphi, \left\|\frac{\partial w_{4n}}{\partial x}\right\| \leqslant 9C_\varphi, \left\|\frac{\partial w_{2n}}{\partial x}\right\| \leqslant 5C_\varphi, \|w_{jn}\| \leqslant 2C_\varphi, j=\overline{1,4}, i=1,2.$$

Также как и в работах [3]–[8] доказано, что последовательные приближения, определяемые из системы (21)–(24) при $0 \leqslant t \leqslant T_{2k}$ сходятся к непрерывному решению системы (17)–(20), для которого справедливы оценки: $\|w_j\| \leqslant 2C_\varphi$, $j=\overline{1,4}$.

Докажем существование непрерывных производных $\partial_x w_j$, $j=\overline{1,4}$. Для сокращения записей обозначим $\omega^n_j := w_{jnxx}$, $j=\overline{1,4}$.

Примем, что $\|\omega^{n-1}_i\| 14C_\varphi$. По свойствам интегралов, модулей, супремума функции установлено, что при $0 \leqslant t \leqslant T_{3k}$, где $T_{3k}$ — константа, определяемая через исходные данные, $T_{3k} \leqslant T_{2k}$, справедливы оценки: $\|\omega^n_i\| \leqslant 14C_\varphi$, $\|\omega^n_3\| \leqslant 70C_\varphi$, $\|\omega^n_4\| \leqslant 70C_\varphi$, $i=1,2$.

По свойствам модулей, интегралов, супремума функции, установлено, что для всех $0 \leqslant t \leqslant T_{3k}$:

$$\|\mu_{1(n+1)} - \mu_{1n}\| + \|\mu_{2(n+1)} - \mu_{2n}\| \leqslant \frac{8}{21}(\|\mu_{2n} - \mu_{2(n-1)}\| + \|\mu_{1n} - \mu_{1(n-1)}\|) + \frac{2}{3}p_n, \tag{29}$$

где $p_n = p_{1n} + p_{2n} = \sum\limits_{j=1}^{4} \|w_{j(n+1)} - w_{in}\|$.

Обозначим $q_n = \begin{pmatrix} \mu_{1n} \\ \mu_{2n} \end{pmatrix}$. Введем норму $\|q_n\| = \|\mu_{1n}\| + \|\mu_{2n}\}$.

Неравенство (29) в новых обозначениях примет вид

$$\|q_{n+1} - q_n\| \leqslant \frac{8}{21}\|q_n - q_{n-1}\| + \frac{2}{3}p_n. \tag{30}$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|q_{n+1} - q_n\|. \tag{31}$$

Установлено, что

$$\sum_{n=0}^{N} \|q_{n+1} - q_n\| \frac{21}{13}\|q_1 - q_0\| + \frac{14}{13}\sum_{n=1}^{N} p_n. \tag{32}$$

Так как ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|w_{j(n+1)} - w_{jn}\|$ сходятся, то частичные суммы $\sum\limits_{n=1}^{N} \|w_{j(n+1)} - w_{jn}\|$, $j = \overline{1,4}$ ограничены. Отсюда следует, что частичные суммы $\sum\limits_{n=1}^{N} p_n$ ограничены при любом $N$, следовательно, из неравенства (32) следует, что частичные суммы $\sum\limits_{n=0}^{N} \|q_{n+1} - q_n\|$ ограничены при всех $N$, значит, ряд (31) сходится, следовательно, $w_{inx} \to w_{ix}$, $i=1,2$, значит, $w_{3nx} \to w_{3x}$, $w_{4nx} \to w_{4x}$, $\partial_x w_j = w_{jx}$, $\|w_{ix}\| \leqslant 5C_\varphi$, $\|w_{3x}\| \leqslant 9C_\varphi$, $\|w_{4x}\| \leqslant 9C_\varphi$, $j=\overline{1,4}$, $i=1,2$, функции $w_{jx}$ непрерывны по всем своим аргументам на $\Gamma_{T_{3k}}$. Аналогично устанавливаем, что $w_j$, $j=\overline{1,4}$ имеют непрерывную ограниченную производную по переменной $t$ на $\Gamma_{T_{3k}}$. Единственность решения доказывается также как в работе [3]. Лемма 1 доказана.

Введем условия $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $g > 0$, $\widehat{\varphi}_1(x) \geqslant 0$, $\widehat{\varphi}_2(x) \geqslant 0$,

$$\partial_x f_1 \geqslant 0, \partial_v f_1 \geqslant 0, \partial_x f_2 \geqslant 0, \tag{33}$$

$$0 \leqslant t \leqslant T_{3k}, T_{3k} \text{ — постоянная, которая определяется через исходные данные.} \tag{34}$$

**Лемма 2.** *Функции,* $\{w_j\}$, $j = \overline{1,4}$, *представляющие собой решение системы уравнений* (17)–(20), *имеют непрерывные и ограниченные производные* $\dfrac{\partial^2 w_j}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 w_j}{\partial x \partial t}$ *на* $\Gamma_{3k}$.

*Доказательство.* Так как $w_{1n}$, $w_{3n}$ имеют ограниченную частную производную по $x$, то по свойствам интегралов, модулей, экспоненты, теореме о конечном приращении при выполнении условий (33) и (34) получаем

$$|x_1 - \int_s^t (aw_{1n}(v,t,x_1) + bw_{3n}(v,t,x_1))\,dv - x_2 + \int_s^t (aw_{1n}(v,t,x_2) + bw_{3n}(v,t,x_2))\,dv| \leqslant |x_1 - x_2|,$$

$$|x_1 - \int_s^t (cw_{4n}(v,t,x_1) + gw_{2n}(v,t,x_1))\,dv - x_2 + \int_s^t (cw_{4n}(v,t,x_2) + gw_{2n}(v,t,x_2))\,dv| \leqslant |x_1 - x_2|.$$

Докажем равностепенную непрерывность функций $\omega_1^n$, $\omega_2^n$. Зафиксируем точку $x_0$.

При выполнении условия (34) по свойствам интегралов, модулей, супремума функции установлено, что

$$\left|\int_s^t (aw_{1n} + bw_{3n})\,dv\right| < 0{,}5, \quad \left|\int_s^t (cw_{4n} + gw_{2n})\,dv\right| < 0{,}5.$$

Обозначим $\Omega_{x_0} = \{x |\, x_0 - 0{,}5 \leqslant x \leqslant x_0 + 0{,}5\}$.

Возьмем $x_1, x_2 \in \Omega_{x_0}$. Тогда при выполнении условий (33), (34), по свойствам интегралов, модулей, супремума функции установлено, что

$$|\omega_1^n(s,t,x_1) - \omega_1^n(s,t,x_2)| \leqslant \Phi_{1n} + \frac{4}{35}[\omega_1^n(s,t,x_1) - \omega_1^n(s,t,x_2)| + |\omega_3^n(s,t,x_1) - \omega_3^n(s,t,x_2)|],$$

$$\begin{gathered}|\omega_3^n(s,t,x_1) - \omega_3^n(s,t,x_2)| < \Phi_{3n} + |\omega_2^{n-1}(s,t,x_1) - \omega_2^{n-1}(s,t,x_2)| + \\ + \frac{2}{35}[|\omega_1^n(s,t,x_1) - \omega_1^n(s,t,x_2)| + |\omega_3^n(s,t,x_1) - \omega_3^n(s,t,x_2)|],\end{gathered}$$

где $\Phi_{1n}$, $\Phi_{3n}$ — известные последовательности.

Пользуясь равномерной и равностепенной непрерывностью, а также ограниченностью всех входящих в $\Phi_{1n}$, $\Phi_{3n}$ функций для любого сколько угодно малого числа $\varepsilon$, можно подобрать такое $\delta > 0$, что для всех $n$ будет

$$\Phi_{1n} < \frac{1}{2}\widehat{\varphi}, \Phi_{3n} < \frac{1}{2}\varepsilon \text{ при } |x_1 - x_2| < \delta.$$

Предположим, что при $|x_1 - x_2| < \delta$ $|\omega_2^{n-1}(s,t,x_1) - \omega_2^{n-1}(s,t,x_2)| < \varepsilon$. Тогда

$$|\omega_1^n(s,t,x_1) - \omega_1^n(s,t,x_2)| + |\omega_3^n(s,t,x_1) - \omega_3^n(s,t,x_2)| < \frac{10}{3}\varepsilon.$$

Так как

$$|\omega_1^n(s,t,x_1)-\omega_1^n(s,t,x_2)|\leqslant\varepsilon+\frac{3}{14}[|\omega_1^n(s,t,x_1)-\omega_1^n(s,t,x_2)|+|\omega_3^n(s,t,x_1)-\omega_3^n(s,t,x_2)|],$$

то $|\omega_1^n(s,t,x_1)-\omega_1^n(s,t,x_2)|<\dfrac{37}{42}\varepsilon$, следовательно, $|\omega_1^n(s,t,x_1)-\omega_1^n(s,t,x_2)|<\varepsilon$ при $|x_1-x_2|<\delta$. Аналогично, $|\omega_2^n(s,t,x_1)-\omega_2^n(s,t,x_2)|<\varepsilon$ при $|x_1-x_2|<\delta$. Итак, последовательности $\{\omega_i^n(s,t,x)\}$, $i=1,2$ равностепенно непрерывны по $x$ при $x\in\Omega_{x_0}$.

Рассмотрим систему уравнений

$$\widetilde{\omega}_1^n(s,t,x)=-\widehat{\varphi}_1(z_1(0,t,x))\int\limits_0^t(a\widetilde{\omega}_1^n+b\widetilde{\omega}_3^n)\,dv+$$
$$+\int\limits_0^s\left(-\partial_xf_1\int\limits_v^t(a\widetilde{\omega}_1^n+b\widetilde{\omega}_3^n)\,d\tau+\partial_vf_1\cdot\widetilde{\omega}_1^n+\partial_vf_1\cdot\widetilde{\omega}_3^n\right)dv+G_1,$$

$$\widetilde{\omega}_2^n(s,t,x)=-\widehat{\varphi}_2(z_2(0,t,x))\int\limits_0^t(c\widetilde{\omega}_4^n+g\widetilde{\omega}_2^n)\,dv+$$
$$+\int\limits_0^s\left(-\partial_xf_2\int\limits_v^t(c\widetilde{\omega}_4^n+g\widetilde{\omega}_2^n)\,d\tau+\partial_vf_2\cdot\widetilde{\omega}_2^n\right)dv+G_2,$$

где $G_i$ — известные функции, $i=1,2$;

$$\widetilde{\omega}_3^n(s,t,x)=\widetilde{\omega}_2^{n-1}\cdot\left(1-\int\limits_s^t(aw_{1x}+bw_{3x})\,dv\right)^2-w_{2x}(s,s,z_1(s,t,x))\int\limits_s^t(a\widetilde{\omega}_1^n+b\widetilde{\omega}_3^n)\,dv,$$

$$\widetilde{\omega}_4^n(s,t,x)=\widetilde{\omega}_1^{n-1}\cdot\left(1-\int\limits_s^t(cw_{4x}+gw_{2x})\,dv\right)^2-w_{1x}(s,s,z_2(s,t,x))\int\limits_s^t(c\widetilde{\omega}_4^n+g\widetilde{\omega}_2^n)\,dv,$$

При выполнении условий (33), (34), по свойствам интегралов, модулей, супремума функции установлено, что справедливы оценки:

$$|\widetilde{\omega}_1^n|<3C_\varphi,|\widetilde{\omega}_3^n|<5{,}5C_\varphi,|\widetilde{\omega}_2^n|<3C_\varphi,|\widetilde{\omega}_4^n|<5{,}5C_\varphi.$$

При выполнении условий (33), (34) по свойствам интегралов, модулей, супремума функции установлено неравенство:

$$\|\widetilde{\omega}_1^{n+1}-\widetilde{\omega}_1^n\|+\|\widetilde{\omega}_2^{n+1}-\widetilde{\omega}_2n\|\leqslant\frac{4}{21}(\|\widetilde{\omega}_2^{n+1}-\widetilde{\omega}_2^n\|+\|\widetilde{\omega}_2^n-\widetilde{\omega}_1^{n-1}\|).$$

Следовательно, $\widetilde{\omega}_1^n\to\widetilde{\omega}_1,\widetilde{\omega}_2^n\to\widetilde{\omega}_2$, где функции $\widetilde{\omega}_1,\widetilde{\omega}_2$ будут равномерно непрерывными по $x$ на замкнутом ограниченном множестве $\Omega_{x_0}$. Справедливы оценки: $\|\widetilde{\omega}_1\|\leqslant3C_\varphi$, $\|\widetilde{\omega}_2\|\leqslant3C_\varphi$.

Так как $\widetilde{\omega}_1^n\to\widetilde{\omega}_1$, $\widetilde{\omega}_2^n\to\widetilde{\omega}_2$, то из неравенств

$$\|\widetilde{\omega}_3^{n+1}-\widetilde{\omega}_3^n\|\leqslant\frac{7}{5}\|\omega_2^n-\omega_2^{n-1}\|+\frac{2}{5}\|\omega_1^{n+1}-\omega_1^n\|,$$

$$\|\omega_4^{n+1}-\omega_4^n\| \leqslant \frac{7}{5}\|\omega_1^n-\omega_1^{n-1}\| + \frac{2}{5}\|\omega_2^{n+1}-\omega_2^n\|$$

следует, что $\widetilde{\omega}_3^n \to \widetilde{\omega}_3$, $\widetilde{\omega}_4^n \to \widetilde{\omega}_4$, значит, $\|\widetilde{\omega}_3\| \leqslant 5{,}5C_\varphi$, $\|\widetilde{\omega}_4\| \leqslant 5{,}5C_\varphi$.

Покажем, что последовательные приближения $\omega_j^n$ сходятся к функциям $\widetilde{\omega}_j$, $j=\overline{1,4}$ при $n\to\infty$.

При выполнении условий (33), (34), по свойствам интегралов, модулей, супремума функции, получаем, что при $n\geqslant N$

$$\|\omega_1^n-\widetilde{\omega}_1\| + \|\omega_2^n-\widetilde{\omega}_2\| \leqslant \frac{4}{21}[\|\omega_1^{n-1}-\omega_1\| + \|\omega_2^{n-1}-\omega_2\|] + \frac{29}{21}\varepsilon.$$

Установлено с помощью метода математической индукции, что

$$\|\omega_1^{N+k}-\omega_1\| + \|\omega_2^{N+k}-\omega_2\| \leqslant \left(\frac{4}{21}\right)^k S_n + \frac{29}{17}\varepsilon,$$

где $S_n := \|\omega_1^N-\widetilde{\omega}_1\| + \|\omega_2^N-\widetilde{\omega}_2\|$, следовательно, $\omega_i^{N+k}\to\widetilde{\omega}_i$, $i=1,2$ при $N\to\infty$, $k\to\infty$. Отсюда следует, что $\omega_3^n\to\widetilde{\omega}_3$, $\omega_4^n\to\widetilde{\omega}_4$ при $n\to\infty$. Получаем, что $w_{inxx}\to w_{jxx}=\widetilde{\omega}_j$, где функции $\dfrac{\partial^2 w_j}{\partial x^2}$ непрерывные и ограниченные на $\Gamma_{3k}$ при выполнении условий (33), (34). Аналогично устанавливаем, что существуют непрерывные и ограниченные производные $\dfrac{\partial^2 w_j}{\partial t\partial x}$, $j=\overline{1,4}$ на $\Gamma_{3k}$. Лемма 2 доказана.

Из лемм 1 и 2 следует теорема.

**Теорема 1.** *Если* $\varphi_i\in\overline{C}^2(R^1)$, $i=1,2$, $f_1\in\overline{C}^{2,2,2,2}(Z_{TK})$, $f_2\in\overline{C}^{2,2,2}(V_{TK})$, *где* $K=2C_\varphi$, *и выполнятся условие* (33). *Тогда для всех* $0\leqslant t\leqslant T_{3k}$ *задача Коши* (1)–(2) *имеет единственное решение* $u(t,x),v(t,x)\in\overline{C}^{1,2,2}(\Omega_{T_{3k}})$, *которое определяется из системы интегральных уравнений* (17)–(20).

## СУЩЕСТВОВАНИЕ НЕЛОКАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ. ВЫВОД НЕЛОКАЛЬНЫХ ОЦЕНОК

Дифференцируя (1) по $x$ и обозначая $p(t,x)=u_x(t,x)$, $q(t,x)=v_x(t,x)$, получим

$$\begin{cases} \partial_t p + (au+bv)\partial_x p = -ap^2 - bqp + \partial_x f_1 + p\cdot\partial_u f_1 + q\cdot\partial_v f_1, \\ \partial_t q + (cu+gv)\partial_x q = -gp^2 - cqp + \partial_x f_2 + p\cdot\partial_u f_2 + q\cdot\partial_v f_2, \\ p|_{t=0}=\widehat{\varphi}_(x), q|_{t=0}=\widehat{\varphi}_2(x). \end{cases} \tag{35}$$

Добавим к системе уравнений (11)–(16) два уравнения:

$$\begin{array}{l} \dfrac{d\gamma_1(s,t,x)}{ds} = -a\gamma_1^2(s,t,x) - b\gamma_1(s,t,x)\gamma_2(s,s,z_1) + \partial_x f_1(s,z_1,w_1,w_3) + \\ \quad +\gamma_1(s,t,x)\cdot\partial_u f_1(s,z_1,w_1,w_3) + \gamma_2(s,s,z_1)\cdot\partial_v f_1(s,z_1,w_1,w_3), \\ \dfrac{d\gamma_2(s,t,x)}{ds} = -g\gamma_2^2 - c\gamma_1(s,s,z_2)\gamma_2 + \partial_x f_2(s,z_2,w_2) + \gamma_2\cdot\partial_v f_2(s,z_2,w_2). \\ \text{с условиями: } \gamma_1|_{s=0}=\widehat{\varphi}_1(z_1), \gamma_2|_{s=0}=\widehat{\varphi}_2(z_2). \end{array} \qquad (36)-(38)$$

Перепишем систему уравнений (36)–(37) в следующем виде:

$$\gamma_1(s,t,x) = \widehat{\varphi}_1)(z_1) - \int\limits_0^s [a\gamma_1^2 + b\gamma_1\gamma_2(v,v,z_1) - \partial_x f_1(v,z_1,w_1,w_3) -$$

$$- \gamma_1 \cdot \partial_u f_1(v, z_1, w_1, w_3) - \gamma_2(v, v, z_1) \cdot \partial_v f_1(v, z_1, w_1, w_3)]dv, \quad (39)$$

$$\gamma_2(s,t,x) = \widehat{\varphi}_2(z_2) - \int\limits_0^s [g\gamma_2^2 + c\gamma_1(s,s,z_2)\gamma_2 - \partial_x f_2(v, z_2, w_4, w_2) -$$
$$- \gamma_1(s,s,z_2) \cdot \partial_u f_2(v, z_2, w_4, w_2) - \gamma_2 \cdot \partial_v f_2(v, z_2, w_4, w_2)]dv. \quad (40)$$

Докажем сначала существование непрерывного решения системы (39), (40) с помощью метода последовательных приближений при выполнении условий (33) и (34).

Определим последовательные приближения:

$$\gamma_1^{n+1}(s,t,x) = \widehat{\varphi}_1(z_1) + \int\limits_0^s [-a(\gamma_1^n)^2 - b\gamma_1^n\gamma_2^n(v,v,z_1) + \partial_x f_1 + \gamma_1^n \cdot \partial_u f_1 + \gamma_2^n(v,v,z_1) \cdot \partial_v f_1]dv, \quad (41)$$

$$\gamma_2^(n+1)(s,t,x) = \widehat{\varphi}_2(z_2) + \int\limits_0^s [-g(\gamma_2^n)^2 - c\gamma_1^n(v,v,)\gamma_2^n + \partial_x f_2 + \gamma_2^n \cdot \partial_v f_2]dv. \quad (42)$$

при этом $\gamma_1^0 = \widehat{\varphi}_1(z_1)$, $\gamma_2^0 = \widehat{\varphi}_2(z_2)$.

При выполнении условий (33) и (34) справедливы оценки:

$$|\gamma_i^{n+1}| < 2{,}5C_\varphi, \; i = 1, 2.$$

По свойствам интегралов, модулей, супремума функций установлено, что $\|\gamma_1^{n+1} - \gamma_1^n\| + \|\gamma_2^{n+1} - \gamma_2^n\| \leqslant 0{,}7(\|\gamma_1^n - \gamma_1^{n-1}\| + \|\gamma_2 - \gamma_2^{n-1}\|)$. Следовательно, последовательные приближения $\{\gamma_i^n\}$, $i = 1, 2$ сходятся к непрерывному решению системы (39)–(40).

Для решения будут справедливы оценки: $|\gamma_i| < 2{,}5C_\varphi$, $i = 1, 2$.

При выполнении условий (33) и (34) справедливы оценки:

$$|z_{ix}| \leqslant 1, |\gamma_{ix}^{n+1} < 5C_\varphi, i = 1, 2.$$

Рассмотрим систему уравнений:

$$\omega_{21} = \varphi_1''(z_1)z_1x + \int\limits_0^s [-2a\gamma_1\omega_{21} - b\gamma_2(v,v,z_1)\omega_{21} + \omega_{21} \cdot \partial_u f_1 -$$
$$- b\gamma_1\omega_2 2(v,v,z_1)z_1x + \omega_2 2(v,v,z_1)z_1x \cdot \partial_v f_1]dv + R_1, \quad (43)$$

$$\omega_{22} = \varphi_2''(z_2)z_2x + R_2 + \int\limits_0^s [-2g\gamma_2\omega_{22} - c\omega_{21}(v,v,z_2)\gamma_2 z_2 x - c\gamma_1(v,v,z_2)\omega_{22} + \omega_{22} \cdot \partial_v f_2], \quad (44)$$

где $R_i$ — известные функции.

Докажем существование непрерывного решения системы (43)–(44) с помощью метода последовательных приближений:

$$\omega_{21}^{n+1} = \varphi''(z_1)z_{1x} + \int\limits_0^s [-2a\gamma_1\omega_{21}^n - b\gamma_2(v,v,z_1)\omega_{21}^n + \omega_{21}^n \cdot \partial_u f_1 -$$

$$- b\gamma_1\omega_{22}^n(v,v,z_1)z_1x + \omega_{22}^n(v,v,z_1)z_1x \cdot \partial_v f_1]dv + R_1,$$

$$\omega_{22}^{n+1} = \varphi_2''(z_2)z_{2x} + R_2 + \int\limits_0^s [-2g\gamma_2\omega_{22}^n - c\omega_{21}^n(v,v,z_2)\gamma_2 z_{2x} - c\gamma_1(v,v,z_2)\omega_{22}^n + \omega_{22}^n \cdot \partial_v f_2]dv,$$

При выполнении условий (33) и (34) справедливы оценки:

$$\|\omega_{2i}^{n+1}\| < 5C_\varphi, i = 1,2.$$

При выполнении условий (33) и (34), по свойствам интегралов, модулей, супремума функции установлено неравенство

$$\|\omega_{22}^{n+1} - \omega_{22}^n\| + \|\omega_{21}^{n+1} - \omega_{21}^n\| \leqslant 0{,}7(\|\omega_{22}^n - \omega_{22}^{n-1}\| + \|\omega_{21}^n - \omega_{21}^{n-1}\|).$$

Это значит, что последовательные приближения сходятся, т.е. система (43)–(44) имеет непрерывное решение.

Докажем сходимость последовательных приближений $\{\gamma_{ix}^n\}$, $i = 1,2$.

При выполнении условий (33) и (34), по свойствам интегралов, модулей, супремума функции, получаем:

$$\|\gamma_{1x}^{n+1} - \omega_{21}\| + \|\gamma_{2x}^{n+1} - \omega_{22}\| \leqslant 0{,}7[\|\gamma_{1x}^n - \omega_{21}\| + \|\gamma_{2x}^n - \omega_{22}\|] + +|\sigma_{31n}| + |\sigma_{41n}|,$$

где $\sigma_3 1n, \sigma_4 1n$ — известные последовательности.

Пользуясь равномерной и равностепенной непрерывностью, а также ограниченностью всех входящих в $\sigma_{31n}, \sigma_{41n}$ функций для любого сколько угодно малого числа $\varepsilon$, выберем $n = N$ так, чтобы $|\sigma_{31n}| + |\sigma_{41n}| < \varepsilon$.

Обозначим $S_{1N} := \|\gamma_{1x}^N - \omega_{21}\| + \|\gamma_{2x}^N - \omega_{22}\|$. С помощью метода математической индукции установлено, что

$$\|\gamma_{1x}^{N+p} - \omega_{21}\| + \|\gamma_{2x}^{N+p} - \omega_{22}\| < (0{,}7)^p S_{1N} + \frac{1}{0{,}3}\varepsilon.$$

Следовательно, $\|\gamma_{1x}^{N+p} - \omega_{21}\| + \|\gamma_{2x}^{N+p} - \omega_{22}\| \to 0$ при $N \to \infty$, $p \to \infty$, значит, последовательности $\{\gamma_{ix}^n\}$ сходятся, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_{ix}^n = \omega_{2i}$.

Отсюда вытекает, что существуют непрерывные производные у решения системы (39), (40), $\gamma_{ix} = \dfrac{\partial \gamma_i}{\partial x} = \omega_{2i}$, $\|\gamma_{ix}\| \leqslant 5C_\varphi$, $i = 1,2$.

Также как в статье [2] доказано существование непрерывной производной по $t$ у решения системы (39)–(40).

Так как существует непрерывно дифференцируемое решение задачи (39)–(40), то $\gamma_1(t,t,x) = p(t,x) = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\gamma_2(t,t,x) = q(t,x) = \dfrac{\partial v}{\partial x}$.

Для вывода глобальных оценок отметим, что из (17)–(20) следуют оценки: $\|w_i\| \leqslant C_\varphi + TN_f$, следовательно,

$$\|u\| \leqslant C_\varphi + TC_f, \|v\| \leqslant C_\varphi + TC_f. \qquad (45)-(46)$$

Из (36)–(38) следует:

$$\gamma_1(s,t,x) = \widehat{\varphi}_1(z_1)\exp(-\int\limits_0^s (a\gamma_1 + b\gamma_2 - \partial_u f_1)dv) +$$

$$+\int\limits_0^s (\partial_x f_1 + \gamma_2(v,v,)\cdot\partial_v f_1)\exp(-\int\limits_\tau^s (a\gamma_1 + b\gamma_2 - \partial_u f_1)dv)d\tau,$$

$$\gamma_2(s,t,x) = \widehat{\varphi}(z_2)\exp(-\int\limits_0^s (g\gamma_2 + c\gamma_1 - \partial_v f_2)dv) + \int\limits_0^s \partial_x f_2 \exp(-\int\limits_\tau^s (g\gamma_2 + c\gamma_1 - \partial_v f_2)dv)d\tau,$$

При выполнении условия (33) получаем: $\|\gamma_2\| \leqslant \exp(TN_f)\cdot(C_\varphi + TN_f)$, $\|\gamma_1\| \leqslant \exp(TN_f)\cdot(C_\varphi + TN_f + \exp(TN_f)\cdot TN_f(C_\varphi + TN_f))$, значит,

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\| \leqslant \exp(TN_f)\cdot(C_\varphi + TN_f + \exp(TN_f)\cdot TN_f(C_\varphi + TN_f)), \tag{47}$$

$$\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\| \leqslant \exp(TN_f)\cdot(C_\varphi + TN_f). \tag{48}$$

Дифференцируем систему уравнений (36)–(38) по переменной $x$, получаем систему:

$$\frac{d\gamma_{1x}}{ds} = A_{11}\gamma_{1x}(s,t,x) + A_{12}\gamma_{2x}(s,s,z_1) + A_{13},$$
$$\frac{d\gamma_{2x}}{ds} = A_{21}\gamma_{1x}(s,s,z_2) + A_{22}\gamma_{2x}(s,t,x) + A_{23},$$

с условиями $\gamma_{ix}(s,t,x) = \varphi_i''(z_i)z_{ix}$, где $A_{ik}$ — известные ограниченные функции, $i = 1,2$, $k = \overline{1,3}$.

Интегрируя полученную систему по аргументу $s$, и учитывая условия $\gamma_{ix}(s,t,x) = \varphi_i''(z_i)z_{ix}$, $i = 1,2$, получим эквивалентную систему интегральных уравнений:

$$\gamma_{1x}(s,t,x) = \varphi_1''(z_1)z_{1x}\exp(\int\limits_0^s A_{11}dv) + \int\limits_0^s A_{13}\exp(\int\limits_\tau^s A_{11}dv)d\tau +$$
$$+\int\limits_0^s A_{12}\gamma_2 x(\tau,\tau,z_1)\exp(\int\limits_\tau^s A_{11}dv)d\tau,$$

$$\gamma_{2x}(s,t,x) = \varphi_2''(z_2)z_{2x}\exp(\int\limits_0^s A_{22}) + \int\limits_0^s A_{23}\exp(\int\limits_\tau^s A_{22}dv)d\tau +$$
$$+\int\limits_0^s A_{21}\gamma_{1x}(\tau,\tau,z_2)\exp(\int\limits_\tau^s A_{22}dv)d\tau,$$

где $\left|\varphi_i''(z_i)z_{ix}e^{\int\limits_0^s A_{11}dv}\right| \leqslant E_{i1}$, $\left|A_{12}e^{\int\limits_\tau^s A_{11}dv}\right| \leqslant C_{12}$, $\left|A_{13}e^{\int\limits_\tau^s A_{11}dv}\right| \leqslant C_{13}$, $\left|A_{21}e^{\int\limits_\tau^s A_{22}dv}\right| \leqslant C_{21}$, $\left|A_{23}e^{\int\limits_\tau^s A_{22}dv}\right| \leqslant C_{23}$, $E_{i1}$, $C_{12}$, $C_{13}$, $C_{21}$, $C_{23}$ — постоянные, которые определяются через исходные данные,

По свойствам модулей, интегралов и супремума функций имеем:

$$\sup_R|\gamma_{1x}(t,t,x)| \leqslant E_{11} + C_{13}t + C_{12}C_{23}t^2 + C_{12}E_{21}t + C_{12}C_{21}\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau \sup_R|\gamma_{1x}(v,v,x)|dvd\tau.$$

Докажем для этого неравенства аналог леммы Гроноулла:

$$z(t) \leqslant E_{11} + C_{12}C_{23}t^2 + (C_{12}E_{21} + C_{13})t + C_{12}C_{21}\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau z(v)dvd\tau,$$

Обозначим $V(t) = E_{11}+C_{12}C_{23}t^2+(C_{12}E_{21}+C_{13})t+C_{12}C_{21}\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau z(v)dvd\tau$, тогда $z(t) \leqslant V(t)$.

Введем замену: $V(t) = h(t)e^{-\sqrt{C_{12}C_{21}}\,t} + C_{12}C_{23}t^2$. Так как $V''(t) \leqslant 2C_{12}C_{23} + C_{12}C_{21}V(t)$, то $h''(t) \leqslant 2\sqrt{C_{12}C_{21}}\,h'(t)$. Дважды интегрируем обе части последнего неравенства, получаем $h(t) \leqslant h(0) + \dfrac{h'(0)}{2\sqrt{C_{12}C_{21}}}(e^{2t\cdot\sqrt{C_{12}C_{21}}} - 1)$. Так как $V(t) = h(t)e^{-\sqrt{C_{12}C_{21}\,t}} + C_{12}C_{23}t^2$, $h(0) = E_{11}$, $h'(0) = C_{12}E_{21} + C_{13} + E_{11}\sqrt{C_{12}C_{21}}$, то

$$V(t) \leqslant E_{11}\cdot \mathrm{ch}(t\sqrt{C_{12}C_21}) + \frac{E_{21}C_{12} + C_{13}}{\sqrt{C_{12}C_{21}}}\,\mathrm{sh}(t\sqrt{C_{12}C_{21}}) + C_{12}C_{23}t^2.$$

Так как $\sup\limits_R|\gamma_{1x}(t,t,x)| = \sup\limits_R|p_x(t,x)| = \sup\limits_R\left|\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right| \leqslant V(t)$, то получим требуемую оценку

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right| < E_{11}\cdot \mathrm{ch}(t\sqrt{C_{12}C_{21}}) + \frac{E_{21}C_{12} + C_{13}}{\sqrt{C_12C_21}}\,\mathrm{sh}(t\sqrt{C_{12}C_{21}}) + C_{12}C_{23}t^2, \tag{49}$$

справедливую при всех $t$ и $x$. Аналогично, получаем оценку

$$\left|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right| < E_{21}\cdot \mathrm{ch}(t\sqrt{C_{12}C_{21}}) + \frac{E_{11}C_{21} + C_{23}}{\sqrt{C_{12}C_{21}}}\,\mathrm{sh}(t\sqrt{C_{12}C_{21}}) + C_{21}C_{13}t^2, \tag{50}$$

справедливую при всех $t$ и $x$.

Полученные глобальные оценки (45)–(50) дают возможность продолжить решение на любой заданный промежуток $[0,T]$. Беря в качестве начальных значений $u(T_0,x)$, $v(T_0,x)$ продлим решение на некоторый промежуток $[T_0,T_1]$, а затем беря в качестве начальных значений $u(T_1,x)$, $v(T_1,x)$ продлим решение на промежуток $[T_1,T_2]$. Длина промежутка разрешимости не будет уменьшаться, так как она определяется величинами $\left\|\dfrac{\partial u}{\partial x}\right\|$ и $\left\|\dfrac{\partial v}{\partial x}\right\|$, которые ограничены на любом промежутке разрешимости глобальными оценками (47), (48), справедливыми на любом промежутке разрешимости. В частности $u(T_k,x), v(T_k,x) \in \overline{C}^2(R^1)$. Для $u(T_k,x)$, $v(T_k,x)$, $\partial_x u(T_k,x)$, $\partial_x v(T_k,x)$ справедливы оценки (45)–(48). Для вторых производных справедливы оценки (49), (50), где в качестве $t$ можно взять $T$. В результате за конечное число шагов решение может быть продлено на любой заданный промежуток $[0,T]$.

Единственность решения задачи Коши (1), (2) доказывается применением аналогичных оценок, которые позволили установить сходимость последовательных приближений.

Общий итог исследования представим в виде следующей теоремы.

**Теорема 2.** *Если* $\varphi_i \in \overline{C}^2(R^1)$, $i = 1,2$, $f_1 \in \overline{C}^{2,2,2,2}(Z_{TK})$, $f_2 \in \overline{C}^{2,2,2}(V_{TK})$, *где* $K = C_\varphi + TC_f$, *и выполнятся условие* (33).

*Тогда для любого* $T > 0$ *задача Коши* (1)–(2) *имеет единственное решение* $u(t,x), v(t,x) \in \overline{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$, *которое определяется из системы интегральных уравнений* (17)–(20).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Рождественский Б.Л. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике / Б.Л. Рождественский, Н.Н. Яненко. — М.: Наука, 1968. — 592 с.

[2] Алексеенко С.Н. Условия нелокальной разрешимости систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка / С.Н. Алексеенко, Т.А. Шемякина, М.В. Донцова // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. — 2013. — № 2 (177). — С. 190–201.

[3] Иманалиев М.И. К вопросу существования гладкого ограниченного решения для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка / М.И. Иманалиев, С.Н. Алексеенко // Доклады Академии наук. — 2001. — Т. 379, № 1. — С. 16–21.

[4] Алексеенко С.Н. Локальное существование ограниченного решения системы Франкля в гиперболическом случае / С.Н. Алексеенко, Т.А. Шемякина, К.Г. Круц // Исследования по интегро–дифференциальным уравнениям. — Бишкек: Илим, 2006. — Вып. 35. — С. 142–147.

[5] Шемякина Т.А. Условия существования и дифференцируемости решения системы Франкля в гиперболическом случае / Т.А. Шемякина // Журнал Средневолжского математического общества. — 2011. — Т. 13, № 2. — С. 127–131.

[6] Шемякина Т.А. Теорема существования ограниченного решения задачи Коши для системы Франкля гиперболического типа / Т.А. Шемякина // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. — 2012. — № 2 (146). — С. 130–131.

[7] Алексеенко С.Н. Исследование разрешимости системы уравнений, описывающей распределение электронов в электрическом поле спрайта / С.Н. Алексеенко, М.В. Донцова // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. — 2012. — Вып. 14. — С. 34–41.

[8] Алексеенко С.Н. Локальное существование ограниченного решения системы уравнений, описывающей распределение электронов в слабоионизированной плазме в электрическом поле спрайта / С.Н. Алексеенко, М.В. Донцова // Матем. вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. — 2013. — Вып. 15. — С. 52–59.

[9] Донцова М.В. Условия локальной разрешимости задачи Коши для системы уравнений, описывающей распределение электронов в слабоионизированной плазме в электрическом поле спрайта / М.В. Донцова // XVIII Нижегородская сессия молодых ученых. Естественные, математические науки. — Н. Новгород: НИУ РАНХИГС, 2013.

[10] Alekseenko S.N. A basic scheme to investigate two first order quasi – linear partial differential equations / S.N. Alekseenko // Analytical and Approximate Methods. H.-P. Blatt, R. Felix, L.G. Lelevkina, M. Sommer (Eds.). – International Conference at the Kyrgyz–Russian–Slavic University. Bishkek – Aachen: Shaker Verlag, 2003. — P. 1–14.

## REFERENCES

[1] Rozhdestvensky B.L., Yanenko N.N. Systems of quasilinear equations and their applications to gas dynamics. [Rozhdestvenskij B.L., Yanenko N.N. Sistemy kvazilinejnyx uravnenij i ix prilozheniya k gazovoj dinamike]. Moscow: Nauka, 1968, 592 p.

[2] Alekseenko S.N., Shemyakina T.A., Dontsova M.V. Nonlocal resolvability conditions for systems of first order partial differential equations. [Alekseenko S.N., Shemyakina T.A., Doncova M.V. Usloviya nelokal'noj razreshimosti sistem differencial'nyx uravnenij v chastnyx proizvodnyx pervogo poryadka]. *Nauchno-texnicheskie vedomosti SPbGPU. Fiziko-matematicheskie nauki — Scientific and technical Bulletin of SPbSPU. Physico-mathematical Sciences*, 2013, no. 3 (177), pp. 190–201.

[3] Imanaliev M.I., Alekseenko S.N. To the question of the existence of a smooth bounded

solution for a system of two nonlinear first order partial differential equations. [Imanaliev M.I., Alekseenko S.N. K voprosu sushhestvovaniya gladkogo ogranichennogo resheniya dlya sistemy dvux nelinejnyx differencial'nyx uravnenij v chastnyx proizvodnyx pervogo poryadka]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2001, Vol. 379, no. 1, pp. 16–21.

[4] Alekseenko S.N., Shemyakina T.A., Kruts K.G. The local existence of a bounded solution of the Frankl system in the hyperbolic case. [Alekseenko S.N., Shemyakina T.A., Kruc K.G. Lokal'noe sushhestvovanie ogranichennogo resheniya sistemy Franklya v giperbolicheskom sluchae]. *Issledovaniya po integro–differencial'nym uravneniyam — Research on integro–differential equations*, Bishkek: Ilim, 2006, iss. 35, pp. 142–147.

[5] Shemyakina T.A. Conditions for the existence and differentiability of a solution of the Frankl system in the hyperbolic case. [Shemyakina T.A. Usloviya sushhestvovaniya i differenciruemosti resheniya sistemy Franklya v giperbolicheskom sluchae]. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshhestva — Journal of Srednevolzhsky mathematical society*, 2011, Vol. 13, no. 2, pp. 127–131.

[6] Shemyakina T.A. The theorem on existence of a bounded solution of the Cauchy problem for the Frankl system of hyperbolic type. [Shemyakina T.A. Teorema sushhestvovaniya ogranichennogo resheniya zadachi Koshi dlya sistemy Franklya giperbolicheskogo tipa]. *Nauchno-texnicheskie vedomosti SPbGPU. Fiziko-matematicheskie nauki — Scientific and technical Bulletin of SPbSPU. Physico-mathematical Sciences*, 2012, no. 2 (146), pp. 130–131.

[7] Alekseenko S.N., Dontsova M.V. The investigation of a resolvability of the system of equations, describing a distribution of electrons in an electric field of sprite. [Alekseenko S.N., Doncova M.V. Issledovanie razreshimosti sistemy uravnenij, opisyvayushhej raspredelenie e'lektronov v e'lektricheskom pole sprajta]. *Matematicheskij vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona — Mathematical Bulletin pedagogical institutes and universities of the Volga-Vyatka region*, 2012, iss. 14, pp. 34–41.

[8] Alekseenko S.N., Dontsova M.V. The local existence of a bounded solution of the system of equations, describing a distribution of electrons in low-pressure plasma in an electric field of sprite. [Alekseenko S.N., Doncova M.V. Lokal'noe sushhestvovanie ogranichennogo resheniya sistemy uravnenij, opisyvayushhej raspredelenie e'lektronov v slaboionizirovannoj plazme v e'lektricheskom pole sprajta]. *Matematicheskij vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona — Mathematical Bulletin pedagogical institutes and universities of the Volga-Vyatka region*, 2013, iss. 15, pp. 52–59.

[9] Dontsova M.V. Local resolvability conditions of the Cauchy problem for a system of equations, describing a distribution of electrons in low-pressure plasma in an electric field of sprite. [Doncova M.V. Usloviya lokal'noj razreshimosti zadachi Koshi dlya sistemy uravnenij, opisyvayushhej raspredelenie e'lektronov v slaboionizirovannoj plazme v e'lektricheskom pole sprajta]. XVIII Nizhny Novgorod session of young scientists. Natural and mathematical sciences, N. Novgorod: NIU RANHIGS, 2013.

[10] Alekseenko S.N. A basic scheme to investigate two first order quasi – linear partial differential equations. Analytical and Approximate Methods. H.-P. Blatt, R. Felix, L.G. Lelevkina, M. Sommer (Eds.). International Conference at the Kyrgyz–Russian–Slavic University. Bishkek – Aachen: Shaker Verlag, 2003, pp. 1–14.

*Донцова Марина Владимировна, аспирант кафедры Математики и математического образования факультета естественных, математических и компьютерных наук, Нижегородский государственный педагогический университет им. Козьмы Минина, Нижний Новгород, Российская Федерация*
*E-mail: dontsowa.marina2011@yandex.ru*

*Dontsova Marina Vladimirovna, graduate student of Mathematics and mathematics education faculty of Natural, Mathematical and Computer Sciences, Nizhny Novgorod State Pedagogical University named Kozma Minin, Nizhny Novgorod, Russian Federation*
*E-mail: dontsowa.marina2011@yandex.ru*