УДК 517.937:517.983

ОБ ОБРАТИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ ОТНОШЕНИЙ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ*

М. С. Бичегкуев

Северо-Осетинский государственный университет имени К. Л. Хетагурова

Поступила в редакцию 09.02.2014 г.

Аннотация: в статье устанавливается теорема о подобии разностных отношений, порождённых одним и тем же семейством эволюционных операторов, но с различными подпространствами начальных условий. Результат получен в терминах экспоненциальной дихотомии семейства эволюционных операторов в пространстве односторонних векторных последовательностей. На основе приведенной теоремы получены необходимые и достаточными условия непрерывной обратимости линейного дифференциального оператора в банаховом пространстве векторных функций на полуоси с неограниченными операторными коэффициентами с начальным условием из подпространства.

Ключевые слова: эволюционное семейство линейных операторов, экспоненциальная дихотомия, разностное отношение, линейный дифференциальный оператор, непрерывно обратимый оператор.

ON THE INVERTIBILITY OF DIFFERENCE RELATIONS AND DIFFERENTIAL OPERATORS

M. S. Bichegkuev

Abstract: in article establishes the theorem the similarity differential relations generated by the same the family of evolutionary operators, but with different subspaces of initial conditions. The result obtained in terms of exponential dichotomy of a family of evolution operators in the unilateral space vector sequences. On the basis of the above theorem the necessary and sufficient conditions continuous invertibility of the linear differential operator in the Banach space of vector functions on the half-line with unbounded operator coefficients with the initial condition of subspaces.

Keywords: evolutionary family linear operators, exponential dichotomy, the difference relation, linear differential operator, is continuously invertible operator.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть X — комплексное банахово пространство.Символом $\mathcal{F}_d = \mathcal{F}_d(\mathbb{Z}_+, X)$, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, обозначим одно из банаховых пространств (односторонних) последовательностей векторов из X:

$$l^p = l^p(\mathbb{Z}_+, X) = \left\{ x : \mathbb{Z}_+ \to X : \|x\|_p = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \|x(k)\|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}, \quad 1 \leqslant p < \infty;$$

$$l^\infty = l^\infty(\mathbb{Z}_+, X) = \left\{ x : \mathbb{Z}_+ \to X : \|x\|_\infty = \sup_{k \geqslant 0} \|x(k)\| < \infty \right\}, \quad p = \infty;$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 14–21–00066)

$$c_0 = c_0(\mathbb{Z}_+, X) = \left\{ x \in l^\infty : \lim_{k\to\infty} \|x(k)\| = 0 \right\}.$$

Стандартно вводятся банаховы пространства векторных функций: $C_b = C_b(\mathbb{R}_+, X)$ — пространство непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ функций со значениями в X; $C_0 = C_0(\mathbb{R}_+, X)$ — (замкнутое) подпространство функций из $C_b(\mathbb{R}_+, X)$ со свойством $\lim\limits_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0$; $L^p(\mathbb{R}_+, X)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, — пространство измеримых по Бохнеру (классов) функций, определенных на $\mathbb{R}_+$ со значениями в X, для которых конечна величина (принимаемая за норму)

$$\|x\|_p = \left(\int\limits_0^\infty \|x(t)\|^p dt \right)^{1/p} \text{ при } 1 \leqslant p < \infty;$$

$$\|x\|_\infty = \operatorname{vrai}\max_{t\geqslant 0} \|x(t)\| \text{ при } p = \infty.$$

Символом $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ будем обозначать одно из приведённых пространств функций.

Пусть $\mathbb{J} \in \{\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}_+\}$ и $LB(X)$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов в X. Отображение

$$\mathcal{U} : \Delta_{\mathbb{J}} = \{(t, s) \in \mathbb{J} \times \mathbb{J} : s \leqslant t\} \to LB(X)$$

называется *семейством эволюционных операторов* на $\mathbb{J}$, если выполнены следующие условия:

1) $\mathcal{U}(t, t) = I$ — тождественный оператор для любого $t \in \mathbb{J}$;

2) $\mathcal{U}(t, s)\mathcal{U}(s, \tau) = \mathcal{U}(t, \tau)$, $\tau \leqslant s \leqslant t$, $s, t, \tau \in \mathbb{J}$;

3) отображение $(t, s) \mapsto \mathcal{U}(t, s)x : \Delta_{\mathbb{J}} \to X$ непрерывно для любого $x \in X$;

4) существуют постоянные $M \geqslant 1$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\|\mathcal{U}(t, s)\| \leqslant Me^{\alpha(t-s)}, \quad s \leqslant t, \; s, t \in \mathbb{J}.$$

Эволюционные семейства операторов естественным образом появляются в связи с представлением решений (см. [1], [2], [3], [4]) абстрактной задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A(t)x, \\ x(s) = x_0 \in D(A(s)), \end{cases} \quad t \geqslant s, \; t, s \in \mathbb{R}_+,$$

где $A(t) : D(t) \subset X \to X, t \geqslant 0$, — семейство линейных замкнутых операторов. Случай, когда операторы $A(t)$, $t \geqslant 0$, ограничены и функция $A : \mathbb{R}_+ \to LB(X)$ является измеримой (по Бохнеру) операторнозначной функцией, удовлетворяющей условию $\sup\limits_{t\geqslant 0} \int\limits_t^{t+1} \|A(\tau)\| d\tau < \infty$ рассмотрен в монографии [2], глава 3. При этом семейство эволюционных операторов $\mathcal{U} : \Delta_+ \to LB(X)$ имеет вид: $\mathcal{U}(t, s) = U(t) \cdot U^{-1}(s)$, $s \leqslant t$, $s, t \in \mathbb{R}_+$. Здесь функция Коши $U : \mathbb{R}_+ \to LB(X)$ является решением (для почти всех $t \in \mathbb{R}_+$) операторного дифференциального уравнения $\dot{\mathcal{X}} = A(t)\mathcal{X}$, $t > 0$, $\mathcal{X}(0) = I$.

Пусть E — замкнутое линейное подпространство в X и $\mathcal{U} : \Delta_{\mathbb{R}_+} \to LB(X)$ — произвольное семейство эволюционных операторов, которое может быть не связано ни с каким дифференциальным уравнением. Рассмотрим линейный оператор

$$\mathcal{L}_E = \mathcal{L}_{E,\mathcal{U}} : D(\mathcal{L}_E) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X),$$

который определяется в пространстве $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ следующим образом: непрерывная функция $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$, для которого вектор $x(0)$ принадлежит подпространству E, относится к области определения $D(\mathcal{L}_E)$ оператора $\mathcal{L}_E$, если существует функция $y \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ такая, что верны равенства

$$x(t) = \mathcal{U}(t, 0)x(0) - \int\limits_0^t \mathcal{U}(t, \tau)y(\tau)\, d\tau, \quad t \geqslant 0. \tag{4}$$

При этом полагают $\mathcal{L}_E x = y$. Корректность определения оператора $\mathcal{L}_E$ отмечалось в [3] и [4].

Если $E = \{0\}$, то семейству эволюционных операторов $\mathcal{U}(t,s) = U(t) \cdot U^{-1}(s)$, $s \leqslant t$, $s,t \in \mathbb{R}_+$, построенных функции Коши $U : \mathbb{R}_+ \to LB(X)$, отвечает оператор $-\frac{d}{dt} + A(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ (см. [1], глава 2; [2], глава 3). Для $E = X$ и произвольного семейства $\mathcal{U}$ оператор $\mathcal{L}_X$ изучался в статье [5]. Случай произвольного (собственного) подпространства $E \subset X = \mathbb{C}^n$ был исследован в статье [6], где также были получены необходимые и достаточные условия его обратимости в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^n)$.

Пусть E — замкнутое подпространство из X и $U : \mathbb{Z}_+ \to LB(X)$ — ограниченная операторнозначная функция. Рассмотрим замкнутое линейное отношение $\mathcal{D}_E$ в $\mathcal{F}_d$, т.е. $\mathcal{D}_E \in LRC(\mathcal{F}_d)$, вида

$$\mathcal{D}_E = \big\{(x,y) \in \mathcal{F}_d \times \mathcal{F}_d : \, y(n) = x(n) - U(n)x(n-1), n \geqslant 1; \\ y(0) = x(0) + x_0, \text{ для некоторого } x_0 \in E\big\}.$$

Если $E = \{0\}$, то $\mathcal{D}_{\{0\}}$ — линейный оператор вида

$$(\mathcal{D}_{\{0\}}x)(n) = \begin{cases} x(n) - U(n)x(n-1), & n \geqslant 1, \\ x(0), & n = 0, \end{cases} \qquad x \in \mathcal{F}_d.$$

Ясно, что

$$\mathcal{D}_E 0 = \{x \in \mathcal{F}_d : \, x(0) \in E, \, x(n) = 0, n \geqslant 1\}.$$

В формулируемых далее утверждениях рассматриваемые разностные отношения строятся с использованием операторной функции $U(n) = \mathcal{U}(n, n-1)$, $n \geqslant 1$.

В статье [3] для исследования оператора $\mathcal{L}_E$ впервые стала применяться спектральная теория линейных разностных отношений. Оператору $\mathcal{L}_E$ сопоставляется линейное разностное отношение $\mathcal{D}_E$ на подходящем банаховом пространстве последовательностей векторов из X и доказывается

Теорема 1([3]; теорема 5.1]). *Оператор $\mathcal{L}_E : D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ непрерывно обратим тогда и только тогда, когда непрерывно обратимо разностное отношение $\mathcal{D}_E \in LRC(\mathcal{F}_d)$.*

Условие непрерывной обратимости линейного оператора $\mathcal{L}_E : D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ (случай с постоянными операторными коэффициентами см. [7], теорема 4.1) получено с использованием понятия экспоненциальной дихотомии семейства эволюционных операторов $\mathcal{U} : \Delta_{\mathbb{R}_+} \to LB(X)$. Отметим еще, что изучение оператора важно в связи с его использованием при построении теории дифференциальных операторов в пространстве функций на всей оси (см.[4],[8],[9])

Будем говорить, что семейство эволюционных операторов $\mathcal{U} : \Delta_{\mathbb{J}} \to LB(X)$ допускает экспоненциальную дихотомию на множестве Ω из $\mathbb{J}$, если существует ограниченная сильно непрерывная проекторнозначная функция $P : \Omega \to LB(X)$ и постоянные $M_0 \geqslant 1$, $\gamma > 0$ такие, что выполнены свойства:

1) $\mathcal{U}(t,s)P(s) = P(t)\mathcal{U}(t,s)$, $s \leqslant t$, $t,s \in \Omega$;

2) $\|\mathcal{U}(t,s)P(s)\| \leqslant M_0 \exp(-\gamma(t-s))$ для $s \leqslant t$, $s,t \in \Omega$;

3) для $s \leqslant t$, $s,t \in \Omega$ сужение $\mathcal{U}_{t,s} : X'(s) \to X'(t)$ оператора $\mathcal{U}(t,s)$ на область значений $X'(s) = \operatorname{Im} Q(s)$ дополнительного к $P(s)$ проектора $Q(s) = I - P(s)$ есть изоморфизм подпространств $X'(s)$ и $X'(t) = \operatorname{Im} Q(t)$, являющееся образом проектора $Q(t)$. Мы определяем оператор $\mathcal{U}(s,t) \in LB(X)$, равный $\mathcal{U}_{t,s}^{-1}$ на $X'(t)$ и равный нулевому на $X(t) = \operatorname{Im} P(t)$;

4) $\|\mathcal{U}(s,t)\| \leqslant M_0 \exp(\gamma(s-t))$ для всех $t \geqslant s$ из Ω.

Пару проекторнозначных функций P и Q, участвующих в определении экспоненциальной дихотомии, называют *расщепляющей парой* для семейства $\mathcal{U}$.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим разностные отношения $\mathcal{D}_E$ и $\mathcal{D}_{\widetilde{E}}$, которые строятся с использованием одной и той же операторной функции $U(n) \in LB(X), n \geqslant 1$, но различными замкнутыми линейными подпространствами начальных условий E и $\widetilde{E}$ из X соответственно. Предположим, что эволюционное семейство $\mathcal{U} : \Delta_{\mathbb{Z}_+} \to LB(X)$, построенное по функции $U(n), n \geqslant 0$, вида

$$\mathcal{U}(n,m) = \begin{cases} U(n)U(n-1)\dots U(m+1), & n > m, \\ I, & n = m, \end{cases} \qquad n, m \in \mathbb{Z}_+,$$

допускает экспоненциальную дихотомию с расщепляющими парами проекторнозначных функций $P, Q : \mathbb{Z}_+ \to LB(X)$ и $\widetilde{P}, \widetilde{Q} : \mathbb{Z}_+ \to LB(X)$, такими, что $\operatorname{Im} Q(0) = E$, $\operatorname{Im} \widetilde{Q}(0) = \widetilde{E}$ соотвественно.

Согласно определению экспоненциальной дихотомии $\operatorname{Im} P(n) = \operatorname{Im} \widetilde{P}(n),\ n \geqslant 0$, и, следовательно, имеют место равенства

$$\widetilde{P}(n)P(n) = P(n),\ P(n)\widetilde{P}(n) = \widetilde{P}(n),\ n \in \mathbb{Z}_+,$$

$$\widetilde{Q}(n)Q(n) = Q(n),\ Q(n)\widetilde{Q}(n) = \widetilde{Q}(n),\ n \in \mathbb{Z}_+.$$

Введём операторнозначные функции $W_k : \mathbb{Z}_+ \to LB(X), k = 1, 2$, определённые равенствами

$$W_1(n) = P(n) + \widetilde{Q}(n),\ W_2(n) = \widetilde{P}(n) + Q(n), n \in \mathbb{Z}_+,$$

и операторы $\mathcal{W}_k \in LB(\mathcal{F}_d), k = 1, 2$, умножения на эти функции, т.е.

$$(\widetilde{W_k} x)(n) = W_k(n)x(n),\ n \in \mathbb{Z}_+,\ x \in \mathcal{F}_d(\mathbb{Z}_+, X).$$

Одним из основных результатов статьи является теорема 2 о подобии разностных отношений $\mathcal{D}_E$ и $\mathcal{D}_{\widetilde{E}}$. Напомним (см.[3], [4]), что линейные отношения $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in LR(X)$ называются *подобными*, если существует непрерывно обратимый оператор $\mathcal{W} \in LB(X)$ такой, что

$$\mathcal{B} = \{(\mathcal{W}x, \mathcal{W}y) : (x, y) \in \mathcal{A}\}$$

или, что то же самое

$$\mathcal{A} = \{(\mathcal{W}^{-1}x, \mathcal{W}^{-1}y) : (x, y) \in \mathcal{B}\}.$$

Эти равенства можно переписать в виде

$$\mathcal{B} = \mathcal{W}\mathcal{A}\mathcal{W}^{-1}, \quad \mathcal{A} = \mathcal{W}^{-1}\mathcal{B}\mathcal{W}.$$

Оператор $\mathcal{W}$ называется *оператором преобразования* отношения $\mathcal{B}$ в отношение $\mathcal{A}$ ($\mathcal{W}^{-1}$ — оператор преобразования отношения $\mathcal{A}$ в отношение $\mathcal{B}$).

Теорема 2. *Пусть E, $\widetilde{E}$ — замкнутые линейные подпространства из X и семейство $\mathcal{U} : \Delta_{\mathbb{Z}_+} \to LB(X)$ допускает экспоненциальную дихотомию с расщепляюшими парами проекторнозначных функций $P, Q : \mathbb{Z}_+ \to LB(X)$ и $\widetilde{P}, \widetilde{Q} : \mathbb{Z}_+ \to LB(X)$, такими,* что $\operatorname{Im} Q(0) = E$, $\operatorname{Im} \widetilde{Q}(0) = \widetilde{E}$. *Тогда отношения $\mathcal{D}_E$ и $\mathcal{D}_{\widetilde{E}}$ подобны, непрерывно обратимы и имеют место равенства*

$$\mathcal{D}_{\widetilde{E}} = \{(\mathcal{W}_d x, \mathcal{W}_d y) : (x, y) \in \mathcal{D}_E\} = \mathcal{W}_d^{-1}\mathcal{D}_E\mathcal{W}_d,$$
$$\mathcal{D}_{\widetilde{E}}^{-1} = \mathcal{W}_d\mathcal{D}_E^{-1}; \quad \sigma(\mathcal{D}_{\widetilde{E}}) = \sigma(\mathcal{D}_E),$$

где оператор умножения $\mathcal{W}_d \in LB(\mathcal{F}_d)$ определяется формулой

$$(\mathcal{W}_d x)(n) = W_d(n)x(n) = (P(n) + \widetilde{Q}(n))x(n), \quad n \geqslant 0.$$

Наряду с отношением $\mathcal{D}_E$ рассмотрим линейный разностный ограниченный оператор

$$\mathcal{D}_E^+ : D(\mathcal{D}^+) \subset \mathcal{F}_d \to \mathcal{F}_d = \mathcal{F}_d(\mathbb{Z}_+, X), \quad D(\mathcal{D}_E^+) = \{x \in \mathcal{F}_d : x(0) \in E\}$$

определенный формулой

$$(\mathcal{D}_E^+)(n) = x(n+1) - V(n)x(n), \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Отметим, что если $E \neq X$, то этот оператор имеет неплотную область определения. Поэтому попытки его изучения с использованием сопряженного оператора приводит к необходимости применения спектральной теории линейных отношений.

Теорема 3. *Отношение $\mathcal{D}_E \in LRC(\mathcal{F}_d)$ непрерывно обратимо тогда и только тогда, когда непрерывно обратим оператор $\mathcal{D}_E^+ \in LB(\mathcal{F}_d)$.*

Из теорем 1 и 2 получим, что верна

Теорема 4. *Оператор $\mathcal{L}_E : D(\mathcal{L}_E) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ непрерывно обратим тогда и только тогда, когда обратим разностный оператор $\mathcal{D}_E^+ \in LB(\mathcal{F}_d)$.*

Для случая дифференциального оператора $\mathcal{L}_E = -\dfrac{d}{dt} + A$ с постоянным операторным коэффициентом (инфинитезимальным оператором полугрупп операторов) теорема 4 была получена в статье [7]. Если $X = \mathbb{C}$, $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^n) = L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^n)$ и $\mathcal{L}_E = -\dfrac{d}{dt} + A(t)$ с $A \in L^\infty(\mathbb{R}_+, LB(\mathbb{C}^n))$ теорема получена в [6].

Хотя привычней привлекать для исследования оператора $\mathcal{L}_E$ разностный оператор $\mathcal{D}_E^+$, следует отметить, что равенство $e^{t\tau(\mathcal{L}_E)} = \sigma(\mathcal{D}_E)\backslash\{0\}$ (теорема об отображении спектра (см. [2; теоремы 1.3 и 9.1])) не является верным, если в правой части множества $\sigma(\mathcal{D}_E)\backslash\{0\}$ заменить на множество $\sigma(\mathcal{D}_E^+)\backslash\{0\}$.

Из приведённых результатов и представления обратного оператора $\mathcal{L}_E^{-1}$ с помощью функции Грина (см. [3; теорема 5.1], [7; теореме 4.1]) позволяют получить оценки ограниченных на $\mathbb{R}_+$ решений, как линейных, так и нелинейных дифференциальных уравнений (см. [10]–[16]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн. — М.: Наука, 1967. — 464 с.

[2] Далецкий Ю.Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн. — М.: Наука, 1970. — 536 с.

[3] Баскаков А.Г. Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений / А.Г. Баскаков // Известия Российской академии наук. Серия математическая. — 2009. — Т. 73, № 2. — С. 3–68.

[4] Баскаков А.Г. Исследования линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений / А.Г. Баскаков // Успехи математических наук. — 2013. — Т. 68, № 1. — С. 77–128.

[5] Баскаков А.Г. Спектральный анализ линейных дифференциальных операторов и полугруппы разностных операторов I / А.Г. Баскаков // Дифференц. уравнения. — 1997. — Т. 33, № 10. — С. 1299–1306; II. — 2001. — Т. 37, № 1. — С. 3–11.

[6] Ben-Artzi A. Invertibility and dichotomy of differential operators on a half-line / A. Ben-Artzi, I. Gohberg, M.A. Kaashoek // J. Dinam. Differential Equations. — 1993. — V. 5, № 1. — P. 1–36.

[7] Бичегкуев М.С. Об условиях разрешимости разностных уравнений с начальным условием из подпространства / М.С. Бичегкуев // Сибирский математический журнал. — 2010. — Т. 51, № 4. — С. 751–768.

[8] Бичегкуев М.С. Об экспоненциальной дихотомии разностных операторов, связанных с полугруппой Хоулэнда, и их спектральные свойства / М.С. Бичегкуев // Дифференц. уравнения. — 2012. — Т. 48, № 6. — С. 763–772.

[9] Бичегкуев М.С. К спектральному анализу разностных и дифференциальных операторов в весовых пространствах / М.С. Бичегкуев // Математический сборник. — 2013. — Т. 204, № 11. — С. 3–20.

[10] Trenogin V.A. New results in the stalility study of non-antonomaus evolution equations in Banach Spaces / V.A. Trenogin, A.-V. Ion // J. Mathem. and App. — 2010. — № 33. — P. 117–127.

[11] Перов А.И. Частотные методы в теории ограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений n-го порядка (существование, почти периодичность, устойчивость) / А.И. Перов // Дифференц. уравнения. — 2012. — Т. 48, № 5. — С. 663–673.

[12] Перов А.И. Об ограниченных решениях обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений n-го порядка / А.И. Перов // Дифференц. уравнения. — 2010. — Т. 46, № 9. — С. 1228–1244.

[13] Баскаков А.Г. Разностные операторы в исследовании дифференциальных операторов; оценки решений / А.Г. Баскаков, Ю.Н. Синтяев // Дифференц. уравнения. — 2010. — Т. 46, № 2. — С. 214–223.

[14] Баскаков А.Г. Оценки оператора вложение пространства Соболева периодических функций и оценки решений дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами / А.Г. Баскаков, К.С. Кобычев // Дифференц. уравнения. — 2011. — Т. 47, № 5. — С. 611–620.

[15] Баскаков А.Г. Линейные дифференциальные операторы с неограниченными операторными коэффициентами и полугруппы разностных операторов / А.Г. Баскаков // Математические заметки. — 1996. — Т. 59, № 6. — С. 811–820.

[16] Баскаков А.Г. О корректности линейных дифференциальных операторов / А.Г. Баскаков // Математический сборник. — 1999. — Т. 190, № 3. — С. 3–29.

REFERENCES

[1] Krein S.G. Linear Differential Equations in Banach Space. [Krejn S.G. Linejnye differencial'nye uravneniya v banaxovom prostranstve]. Moscow: Nauka, 1967, 464 p.

[2] Daletski Yu. L. and Krein M.G. Stability of Solutions to Differential Equations in Banach Space. [Daleckij Yu.L., Krejn M.G. Ustojchivost' reshenij differencial'nyx uravnenij v banaxovom prostranstve]. Moscow: Nauka, 1970, 536 p.

[3] Baskakov A.G. Spectral analysis of differential operators with unbounded operator-valued coefficients, difference relations and semigroups of difference relations. [Baskakov A.G. Spektral'nyj analiz differencial'nyx operatorov s neogranichennymi operatornymi koe'fficientami, raznostnye otnosheniya i polugruppy raznostnyx otnoshenij]. *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Seriya matematicheskaya — Izvestiya: Mathematics*, 2009, Vol. 73, no. 2, pp. 3–68.

[4] Baskakov A.G. Analysis of linear differential equations by methods of the spectral theory of difference operators and linear relations. [Baskakov A.G. Issledovaniya linejnyx differencial'nyx uravnenij metodami spektral'noj teorii raznostnyx operatorov i linejnyx otnoshenij]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 2013, Vol. 68, no. 1, pp. 77–128.

[5] Baskakov A.G. Spectral analysis of linear differential operators, and semigroups of difference operators. I. [Baskakov A.G. Spektral'nyj analiz linejnyx differencial'nyx operatorov i polugruppy raznostnyx operatorov I]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 1997, Vol. 33, no. 10, pp. 1299–1306; II, 2001, Vol. 37, no. 1, pp. 3–11.

[6] Ben-Artzi A., Gohberg I., Kaashoek M.A. Invertibility and dichotomy of differential operators on a half-line. J. Dinam. Differential Equations, 1993, Vol. 5, no. 1, pp. 1–36.

[7] Bichegkuev M.S. Solvability conditions for the difference equations with an initial condition

in a subspace. [Bichegkuev M.S. Ob usloviyax razreshimosti raznostnyx uravnenij s nachal'nym usloviem iz podprostranstva]. *Sibirskij matematicheskij zhurnal — Siberian Mathematical Journal*, 2010, Vol. 51, no. 4, pp. 751–768.

[8] Bichegkuev M.S. On the exponential dichotomy and spectral properties of difference operators related to the Howland semigroup. [Bichegkuev M.S. Ob e'ksponencial'noj dixotomii raznostnyx operatorov, svyazannyx s polugruppoj Xoule'nda, i ix spektral'nye svojstva]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2012, Vol. 48, no. 6, pp. 763–772.

[9] Bichegkuev M.S. Spectral analysis of difference and differential operators in weighted spaces. [Bichegkuev M.S. K spektral'nomu analizu raznostnyx i differencial'nyx operatorov v vesovyx prostranstvax]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 2013, Vol. 204, no. 11, pp. 3–20.

[10] Trenogin V.A., Ion A.-V. New results in the stalility study of non-antonomaus evolution equations in Banach Spaces. J. Mathem. and App., 2010, no. 33, pp. 117–127.

[11] Perov A.I. Frequency methods in the theory of bounded solutions of nonlinear nth-order differential equations (existence, almost periodicity, and stability). [Perov A.I. Chastotnye metody v teorii ogranichennyx reshenij nelinejnyx differencial'nyx uravnenij n-go poryadka (sushhestvovanie, pochti periodichnost', ustojchivost')]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2012, Vol. 48, no. 5, pp. 663–673.

[12] Perov A.I. On Bounded Solutions of nth-Order Nonlinear Ordinary. [Perov A.I. Ob ogranichennyx resheniyax obyknovennyx nelinejnyx differencial'nyx uravnenij n-go poryadka]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2010, Vol. 46, no. 9, pp. 1228–1244.

[13] Baskakov A.G., Sintyaev Yu.N. Finite-difference operators in the study of differential operators: solution estimates. [Baskakov A.G., Sintyaev Yu.N. Raznostnye operatory v issledovanii differencial'nyx operatorov; ocenki reshenij]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2010, Vol. 46, no. 2, pp. 214–223.

[14] Baskakov A.G., Kobychev K.S. Estimates for the embedding operator of a sobolev space of periodic functions and for the solutions of differential equations with periodic coefficients. [Baskakov A.G., Kobychev K.S. Ocenki operatora vlozhenie prostranstva Soboleva periodicheskix funkcij i ocenki reshenij differencial'nyx uravnenij s periodicheskimi koe'fficientami]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2011, Vol. 47, no. 5, pp. 611–620.

[15] Baskakov A.G. Linear differential operators with unbounded operator coefficients and semigroups of bounded operators. [Baskakov A.G. Linejnye differencial'nye operatory s neogranichennymi operatornymi koe'fficientami i polugruppy raznostnyx operatorov]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 1996, Vol. 59, no. 6, pp. 811–820.

[16] Baskakov A.G. On correct linear differential operators. [Baskakov A.G. O korrektnosti linejnyx differencial'nyx operatorov]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 1999, Vol. 190, no. 3, pp. 3–29.

Бичегкуев Маирбек Сулейманович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой функционального анализа и дифференциальных уравнений, Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова, Владикавказ, Российская Федерация
E-mail: bichegkuev@yandex.ru
Тел.: (867)2540-148

Bichegkuev Mairbek Suleimanovich, Head of the Department of functional analysis and differential equations, Doctor of Physics and Mathematics, Professor Vladikavkaz, Russian Federation
E-mail: bichegkuev@yandex.ru
Tel.: (867)2540-148