УДК 517.956

О СВОЙСТВАХ КОММУТАЦИИ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ОПЕРАТОРАМИ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ*

А. Д. Баев, П. А. Кобылинский, М. Б. Давыдова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 02.02.2014 г.

Аннотация: статья посвящена исследованию свойств некоторых вырождающихся псевдодифференциальных операторов с переменным символом. Рассматривается новый класс таких операторов. Псевдодифференциальные операторы, рассмотренные в статье, построены по специальному интегральному преобразованию. Исследуются свойства коммутаторов вырождающихся псевдодифференциальных операторов с операторами дифференцирования. Получены формулы представления и оценки этих коммутаторов в специальных весовых пространствах типа пространств С. Л. Соболева с весом. Нормы в этих пространствах определяются с помощью специального интегрального преобразования.

Ключевые слова: преобразование Фурье, весовое преобразование, псевдодифференциальный оператор, псевдодифференциальный оператор с вырождением, коммутатор операторов.

ON THE PROPERTIES OF SWITCHING A CLASS OF DEGENERATE PSEUDO-DIFFERENTIAL OPERATORS WITH THE OPERATORS OF DIFFERENTIATION

A. D. Baev, P. A. Kobylinskii, M. B. Davidova

Abstract: this paper is devoted to the study of the properties of some degenerate pseudodifferential operators with variable symbol. A new class of such operators. Pseudodifferential operators, discussed in the article, is built on a special integral transformation. We study the properties of switches degenerate pseudodifferential operators with the operators of differentiation. Formulas are obtained the submission and evaluation of these switches in special weighted spaces of spaces SL Weighted Sobolev. Norms in these spaces are defined with a special integral transformation.

Keywords: Fourier transform, the weight conversion, pseudo-differential operator, pseudo-differential operator with degeneration, the switch operators.

ВВЕДЕНИЕ

Теория краевых задач для вырождающихся уравнений интенсивно развивается в настоящее время. Основная трудность, возникающая этой теории, состоит в том, что младшие (в смысле теории регулярных (невырождающихся) операторов) члены уравнения влияют на постановку граничных задач и их коэрцитивную разрешимость.

* Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 14–01–00867, за счет гранта Российского научного фонда № 14–21–00066.

Вырождающиеся уравнения используются при исследовании математических моделей, в которых граница области оказывает существенное влияние на процессы, происходящие вблизи границы. Это приводит к тому, что на границе области может меняться как тип уравнений, так и их порядок. Кроме того, вырождающиеся уравнения используются в теории управления. Вырождающимся эллиптическим уравнениям соответствуют вырожденные или особые оптимальные управления.

Краевые задачи для вырождающихся эллиптических уравнений в пространствах С. Л. Соболева не являются коэрцитивными. Однако, можно доказать коэрцитивную разрешимость этих краевых задач в специальным образом построенных весовых пространствах.

В работах В. П. Глушко [1], [2] была установлена коэрцитивная разрешимость общих краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка в специальных весовых пространствах типа пространств С. Л. Соболева с весом.

Исследование вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка (при "степенном" характере вырождения) было начато в работах М. И. Вишика и В. В. Грушина [3], [4]. Затем ряд результатов для некоторых классов вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка был получен В. П. Глушко [5], Х. Леопольдом [6], С. З. Левендорским [7]. Отметим, что существенным условием работы [7] является условие принадлежности основной весовой функции $\alpha(t)$ пространству $C^{\infty}(R^1)$.

Дальнейшее развитие теории коэрцитивной разрешимости вырождающихся уравнений потребовало развития теории псевдодифференциальных операторов. Одним из направлений развития этой теории стало исследование весовых псевдодифференциальных операторов, построенных по специальному интегральному преобразованию F_α, введенному в [8]. Использование весовых псевдодифференциальных операторов с постоянным символом позволило доказать коэрцитивные априорные оценки и теоремы о существовании решений общих краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка (см. [8]). Исследование весовых псевдодифференциальных операторов с переменным символом позволило исследовать новые классы вырождающихся уравнений высокого порядка (см. [9],[10]). Некоторые вопросы, связанные с аналогичными уравнениями рассматривались в [11], [12].

В настоящей статье получены теоремы о коммутации нового класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов с переменным символом и оператора дифференцирования. Получены также формулы представления этих операторов.

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛИРОВКИ ТЕОРЕМ

Рассмотрим функцию $\alpha(t)$, $t \in R^1_+$, для которой выполняются условия: $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$, $\alpha(t) = const$ для $t \geqslant d$ при некотором $d > 0$.

Рассмотрим интегральное преобразование

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int\limits_0^{+\infty} u(t)\exp(i\eta\int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)})\frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}, \tag{1}$$

которое определено первоначально на функциях $u(t) \in C_0^\infty(R^1_+)$. Это преобразование было введено в [8]. Здесь $C_0^\infty(R^1_+)$ — пространство бесконечно дифференцируемых финитных функций, носитель которых принадлежит R^1_+. В [8] показано, что преобразование (1) и преобразование Фурье

$$F_{\tau\to\eta}[u] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\exp(i\eta\tau)d\tau, \quad \eta \in R^1$$

связаны следующим соотношением

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)],$$

где $u_\alpha(\tau) = \sqrt{\alpha(t)}u(t)\Big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}$, $t = \varphi^{-1}(\tau)$ — функция, обратная к функции $\tau = \varphi(t) = \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$.

Для преобразования F_α справедлив аналог равенства Парсеваля

$$\|F_\alpha[u](\eta)\|_{L_2(R^1)} = \sqrt{2\pi}\,\|u\|_{L_2(R^1_+)}\,. \tag{2}$$

Равенство (2) даёт возможность расширить преобразование (1) до непрерывного преобразования, осуществляющего гомеоморфизм пространств $L_2(R^1)$ и $L_2(R^1_+)$, а также рассмотреть преобразование F_α на некоторых классах обобщенных функций. Для расширенного таким образом преобразования F_α сохраним старое обозначение. Обозначим через F_α^{-1} обратное к F_α преобразование. Это преобразование можно записать в виде

$$F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}F^{-1}_{\eta\to\tau}[w(\eta)]\Bigg|_{\tau=\varphi(t)}.$$

Можно показать, что для функции $u(t) \in C_0^\infty(\bar{R}^1_+)$ справедливы равенства $F_\alpha[D^j_{\alpha,t}u](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta),\ j = 1, 2, \ldots$, где $D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)}$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$.

Определение 1. Пространство $H_{s,\alpha}(R^n_+)$ (s — действительное число) состоит из всех функций $v(x,t)$, для которых конечна норма

$$\|v\|^2_{s,\alpha,p} = \int\limits_{R^n} (1 + |\xi|^2 + \eta^2)^s \left|F_\alpha F_{x\to\xi}[v(x,t)]\right|^2 d\xi d\eta.$$

Определение 2. Пространство $H_{s,\alpha,q}(R^n_+)$ ($s \geqslant 0,\ q > 1$) состоит из всех функций $v(x,t) \in H_{s,\alpha}(R^n_+)$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha,q} = \{\sum_{l=0}^{[\frac{s}{q}]} \left\|F^{-1}_{\xi\to x}F^{-1}_\alpha[(1+|\xi|^2+\eta^2)^{\frac{s-ql}{2}}F_\alpha F_{x\to\xi}[\partial_t^l v]]\right\|^2_{L_2(R^n_+)}\}^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь $[\frac{s}{q}]$ - целая часть числа $\frac{s}{q}$.

Пусть выполнено следующее условие.

Условие 1. Существует число $\nu \in (0,1]$ такое, что $|\alpha'(t)\alpha^{-\nu}(t)| \leqslant c < \infty$ при всех $t \in [0,+\infty)$. Кроме того, $\alpha(t) \in C^{s_1}[0,+\infty)$ для некоторого $s_1 \geqslant 2N - |\sigma|$, где

$$N \geqslant \max_{0\leqslant p_1\leqslant l}\{2p_1 + \frac{l - p_1 + \frac{3}{2}}{\nu} + 1,\ \sigma + 1,\ \sigma + \frac{l}{2}\},\ l = 1, 2 \ldots,$$

σ — некоторое действительное число.

Можно показать, что указанное выше число ν существует, если $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$.

Определим вырождающийся псевдодифференциальный оператор по формуле

$$P(t, D_x, D_{\alpha,t})v(x,t) = F_\alpha^{-1}F^{-1}_{\xi\to x}[p(t,\xi,\eta)F_{x\to\xi}F_\alpha[v(x,t)]]. \tag{3}$$

Здесь $F_{x\to\xi} = F_{x_1\to\xi_1}F_{x_2\to\xi_2}\ldots F_{x_{n-1}\to\xi_{n-1}}$ преобразование Фурье, переводящее переменную $x \in R^{n-1}$ в переменную $\xi \in R^{n-1}$. $F^{-1}_{\xi\to x}$ — обратное преобразование Фурье.

Определим класс символов вырождающегося псевдодифференциального оператора.

Определение 3. Будем говорить, что символ $p\,(t,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $P^{(\sigma)}(t, D_x, D_{\alpha,t})$ принадлежит классу символов $S^\sigma_{\alpha,\rho,0}(\Omega)$, где $\Omega \subset \bar{R}^1_+$ — открытое множество, σ — действительное число, если функция $p\,(t,\xi,\eta)$ является бесконечно дифференцируемой функцией по переменной $t\in\Omega$ и по переменной $\eta\in R^1$. Причем, при всех $j=0,1,2,\ldots$, $l=0,1,2,\ldots$ справедливы оценки

$$\left|\left(\alpha(t)\frac{\partial}{\partial t}\right)^j\frac{\partial^l}{\partial\eta^l}p\,(t,\xi,\eta)\right|\leqslant c_{m,l}\left(1+|\xi|^2+|\eta|^2\right)^{\frac12(\sigma-l\rho)}$$

с константами $c_{m,l}>0$, не зависящими от $\xi\in R^{n-1}$, $\eta\in R^1$, $t\in\Omega$.

Введем обозначение для коммутатора вырождающегося псевдодифференциального оператора и оператора дифференцирования

$$M_{l,\sigma}=\partial_t^l P^{(\sigma)}(t,D_x,D_{\alpha,t})-P^{(\sigma)}(t,D_x,D_{\alpha,t})\partial_t^l. \tag{4}$$

Доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть символ $p(t,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $P^{(\sigma)}(t,D_x,D_{\alpha,t})$ принадлежит классу $S^{\sigma}_{\alpha,\rho,0}(\Omega)$ $\Omega\subset\bar R^1_+$, $\rho\in[0,1]$. Пусть выполнено условие 1. Тогда для оператора $M_{l,\sigma}$, определенного в (4), при всех $v(x,t)\in H_{\sigma+ql,\alpha,q}(R^n_+)$ справедлива формула представления

$$M_{l,\sigma}v(x,t)=\sum_{i=1}^{N-1}Q_{i,\sigma}[\sum_{j=0}^{l}\sum_{i_1=0}^{i-1}b^i_{i_1,j}(t)D^{i_1}_{\alpha,t}\partial_t^j v(x,t)]+R_{N,l,\sigma}v(x,t)+$$
$$+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{i}\frac{\theta^l_i(t)}{\alpha^l(t)}c_{jl}F^{-1}_{\alpha}F^{-1}_{\xi\to x}[(\alpha(t)\partial_t)^j\lambda(t,\xi,\eta)F_{x\to\xi}F_{\alpha}[\partial^{i-p}_{\alpha,t}v]],$$

где функции $Q_{i,\sigma},\ R_{N,l,\sigma}$ определены следующим образом:

$$Q_{i,\sigma}[v(x,t)]=F^{-1}_{\xi\to x}F^{-1}_{\alpha}[\lambda_i(t,\xi,\eta)F_{\alpha}F_{x\to\xi}[v(x,t)]],$$

$$R_{N,l,\sigma}v(x,t)=\sum_{j=0}^{l}\frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}F^{-1}_{\xi\to x}F^{-1}_{\eta\to\tau}[\int\limits_{R^1}F_{\tau\to(\eta-y)}[D^N_\tau\beta_{i,l}(\tau)]\times$$
$$\times F_{x\to\xi}F_{\tau\to y}[(\partial^j_{\alpha,t}v)_\alpha(x,\tau)]g_N(t,\xi,\eta-y,y)\,dy]_{\tau=\varphi(t)}\,,$$

$$g_N(t,\xi,\eta-y,y)=\frac{(-1)^N}{N!}\int\limits_0^1\lambda_N(t,\xi,\eta-z(\eta-y))(1-z)^{N-1}dz,$$

$$\lambda_i(t,\xi,\eta)=\frac{(-1)^i}{i!}\partial^i_\eta\lambda(t,\xi,\eta),\ i=1,2,\ldots,N,$$

c_{pl} — биномиальные коэффициенты, $b^i_{i_1,j}(t)\in C^{s_1-l-i}[0;+\infty)$ — ограниченные функции, функции $\theta^l_i(t)$ определены рекуррентными соотношениями

$$\begin{cases}\theta^{l+1}_i(t)=\theta^l_{i-1}(t)+\partial_{\alpha,t}\theta^l_i(t)-(l+\frac12)\alpha'(t), & 1\leqslant i\leqslant l\\ \theta^{l+1}_0(t)=\partial_{\alpha,t}\theta^l_0(t)-(l+\frac12)\alpha'(t), & \theta^l_l\equiv1,\quad \theta^l_0=-\frac{\alpha'(t)}{2}\,.\end{cases}$$

Теорема 2. Пусть символ $p(t,\xi,\eta)$ вырождающегося псевдодифференциального оператора $P^{(\sigma)}(t,D_x,D_{\alpha,t})$ принадлежит классу $S^{\sigma}_{\alpha,\rho,0}(\Omega)$ $\Omega\subset\bar R^1_+$, $\rho\in[0,1]$. Пусть $v(x,t)\in H_{s+\sigma,\alpha}(R^n_+)$,

$\partial_t^l v(x,t) \in H_{s+\sigma,\alpha}(R_+^n)$, $l = 1, 2, \ldots$. Пусть выполнено условие 1 (с заменой σ на $s+\sigma$). Тогда для оператора $M_{l,\sigma}$, определенного в (4), справедлива оценка

$$\|M_{l,\sigma}v\|_{s,\alpha} \leqslant c(\sum_{j=0}^{l} \left\|\partial_t^j v\right\|_{s+\sigma-\rho,\alpha} + \sum_{j=0}^{l-1} \left\|\partial_t^j v\right\|_{s+\sigma,\alpha})$$

с константой $c > 0$, не зависящей от v.

Теорема 3. Пусть $q > 1$, $s \geqslant 0$ — действительные числа, $v(x,t) \in H_{s+(l+1)q,\alpha,q}(R_+^n)$. Пусть символ $p(t,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $P^{(\sigma)}(t, D_x, D_{\alpha,t})$ принадлежит классу $S^{\sigma}_{\alpha,\rho,0}(\Omega)$ $\Omega \subset \bar{R}^1_+$, $\rho \in [0,1]$. Пусть выполнено условие 1 при $\sigma = s+q$. Тогда для оператора $M_{l,q}$, определенного в (10) при $\sigma = q$, справедлива оценка

$$\|M_{l,q}v\|_{s,\alpha,q} \leqslant c\,\|v\|_{s+lq-\rho,\alpha,q}$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от v.

При $\rho = 1$, $\delta = 0$ утверждения, аналогичные теоремам 1 и 2, были доказаны в [8], [9], при $\rho = 0$, $\delta \in [0;1)$ аналогичные утверждения были доказаны в [13]. Теоремы о композиции и теоремы об ограниченности вырождающихся псевдодифференциальных операторов с переменным символом из класса $S^{\sigma}_{\alpha,\rho,0}(\Omega)$ получены в [14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Глушко В.П. Коэрцитивность в L_2 общих граничных задач для вырождающегося эллиптического уравнения второго порядка / В.П. Глушко // Функциональный анализ и его приложения. — 1968. — Т. 2, № 3. — С. 87–88.

[2] Глушко В.П. Оценки в L_2 и разрешимость общих граничных задач для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка / В.П. Глушко // Труды Московского математического общества. — 1970. — Т. 23. — С. 113–178.

[3] Вишик М.И. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области / М.И. Вишик, В.В. Грушин // Математический сборник. — 1969. — Т. 80 (112), № 4. — С. 455–491.

[4] Вишик М.И. Вырождающиеся эллиптические дифференциальные и псевдодифференциальные операторы / М.И. Вишик, В.В. Грушин // Успехи математических наук. — 1970. — Т. 25, № 4. — С. 29–56.

[5] Глушко В.П. Теоремы разрешимости краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / В.П. Глушко // Дифференциальные уравнения с частными производными : тр. семинара акад. С. Л. Соболева. — Новосибирск, 1978. — № 2. — С. 49–68.

[6] Леопольд Х.Г. Априорные оценки для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка с невырождающейся второй производной / Х.Г. Леопольд. — Новосибирск, 1981. — 33 с. — Деп. в ВИНИТИ 29.08.81, № 4269–81.

[7] Левендорский С.З. Краевые задачи в полупространстве для квазиэллиптических псевдодифференциальных операторов, вырождающихся на границе / С.З. Левендорский // Математический сборник. — 1980. — Т. 111 (153), № 4. — С. 483–501.

[8] Баев А.Д. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы / А.Д. Баев // Доклады Академии наук. — 1982. — Т. 265, № 5. — С. 1044–1046.

[9] Баев А. Д. Качественные методы теории краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений / А. Д. Баев. — Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 2008. — 240 с.

[10] Баев А.Д. Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. — 2008. — Т. 422, № 6. — С. 727–728.

[11] Зверева М.Б. Задача граничного управления дифференциальной системой с нелинейным условием / М.Б. Зверева // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 2. — С. 182–191.

[12] Звягин А.В. Исследование разрешимости одной стационарной модели движения неньютоновой жидкости в неограниченной области / А.В. Звягин // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2012. — № 2. — С. 118–121.

[13] Баев А.Д. О некоторых краевых задачах в полупространстве для одного класса псевдодифференциальных уравнений с вырождением / А.Д. Баев, П.В. Садчиков // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2010. — № 10. — С. 2(88).

[14] Баев А.Д, Кобылинский П.А. О некоторых свойствах одного класса псевдодиффференциальных уравнений с вырождением / А.Д. Баев, П.А. Кобылинский // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 66–73.

REFERENCES

[1] Glushko V.P. Coercivity in general boundary value problems for degenerate elliptic equations of second order. [Glushko V.P. Koe'rcitivnost' v L_2 obshhix granichnyx zadach dlya vyrozhdayushhegosya e'llipticheskogo uravneniya vtorogo poryadka]. *Funkcional'nyj analiz i ego prilozheniya — Functional analysis and its applications*, 1968, Vol. 2, no. 3, pp. 87–88.

[2] Glushko V.P. Estimates and solvability of general boundary value problems for degenerate elliptic equations of second order. [Glushko V.P. Ocenki v L_2 i razreshimost' obshhix granichnyx zadach dlya vyrozhdayushhixsya e'llipticheskix uravnenij vtorogo poryadka]. *Trudy Moskovskogo matematicheskogo obshhestva — Proceedings of the Moscow Mathematical Society*, 1970, Vol. 23, pp. 113–178.

[3] Vishik M.I., Grushin V.V. Boundary value problems for elliptic equations degenerating on the boundary. [Vishik M.I., Grushin V.V. Kraevye zadachi dlya e'llipticheskix uravnenij, vyrozhdayushhixsya na granice oblasti]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 1969, Vol. 80 (112), no. 4, pp. 455–491.

[4] Vishik M.I., Grushin V.V. degenerate elliptic differential and pseudodifferential operators. [Vishik M.I., Grushin V.V. Vyrozhdayushhiesya e'llipticheskie differencial'nye i psevdodifferencial'nye operatory]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 1970, Vol. 25, no. 4, pp. 29–56.

[5] Glushko V.P. theorems solvability of boundary value problems for a class of degenerate elliptic equations of high order. [Glushko V.P. Teoremy razreshimosti kraevyx zadach dlya odnogo klassa vyrozhdayushhixsya e'llipticheskix uravnenij vysokogo poryadka]. *Differencial'nye uravneniya s chastnymi proizvodnymi : tr. seminara akad. S. L. Soboleva — Differential equations with partial derivatives: Tr. Seminar Acad. Sobolev*, Novosibirsk, 1978, no. 2, pp. 49–68.

[6] Leopold H.G. A priori estimates for degenerate elliptic equations of higher order with nondegenerate second derivative. [Leopol'd X.G. Apriornye ocenki dlya vyrozhdayushhixsya e'llipticheskix uravnenij vysokogo poryadka s nevyrozhdayushhejsya vtoroj proizvodnoj]. Novosibirsk, 1981, 33 p. Dep. VINITI 29.08.81, no. 4269–81.

[7] Levendorskii S.Z. Boundary-value problems in a half-space for quasi-elliptic pseudodifferential operators degenerate on the boundary. [Levendorskij S.Z. Kraevye zadachi v poluprostranstve dlya kvazie'llipticheskix psevdodifferencial'nyx operatorov, vyrozhdayushhixsya na granice]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 1980, Vol. 111 (153), no. 4, pp. 483–501.

[8] Baev A.D. Degenerate elliptic equations of higher order and related pseudodifferential operators. [Baev A.D. Vyrozhdayushhiesya e'llipticheskie uravneniya vysokogo poryadka i svyazannye s nimi psevdodifferencial'nye operatory]. *Doklady Akademii nauk — Doklady*

Mathematics, 1982, Vol. 265, no. 5, pp. 1044–1046.

[9] Baev A.D. Qualitative methods in the theory of boundary value problems for degenerate elliptic equations. [Baev A. D. Kachestvennye metody teorii kraevyx zadach dlya vyrozhdayushhixsya e'llipticheskix uravnenij]. Voronezh: Voronezh State University Press, 2008, 240 p.

[10] Baev A.D. General boundary value problems in a half for degenerate elliptic equations of high order. [Baev A.D. Ob obshhix kraevyx zadachax v poluprostranstve dlya vyrozhdayushhixsya e'llipticheskix uravnenij vysokogo poryadka]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2008, Vol. 422, no. 6, pp. 727–728.

[11] Zvereva M.B. The boundary control differential system with nonlinear condition. [Zvereva M.B. Zadacha granichnogo upravleniya differencial'noj sistemoj s nelinejnym usloviem]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 2, pp. 182–191.

[12] Zviagin A.V. Investigation of the solvability of a stationary non-Newtonian fluid model of the motion in an unbounded domain. [Zvyagin A.V. Issledovanie razreshimosti odnoj stacionarnoj modeli dvizheniya nen'yutonovoj zhidkosti v neogranichennoj oblasti]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 2, pp. 118–121.

[13] Baev A.D., Sadchikov P.V. Some boundary value problems in a half for a class of pseudodifferential equations with degeneration. [Baev A.D., Sadchikov P.V. O nekotoryx kraevyx zadachax v poluprostranstve dlya odnogo klassa psevdodifferencial'nyx uravnenij s vyrozhdeniem]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika — Proceedings of the University of Saratov. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2010, Vol. 10, №2 (88), pp. 34–41.

[14] Baev A.D., Kobylinskii P.A. On some properties of a class of equations with degeneration psevdodiffferentsialnyh. [Baev A.D, Kobylinskij P.A. O nekotoryx svojstvax odnogo klassa psevdodiffferencial'nyx uravnenij s vyrozhdeniem]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 2, pp. 66–73.

Баев Александр Дмитриевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа, математический факультет Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: alexsandrbaev@mail.ru

Baev Alexander D., doctor of physical-mathematical Sciences, Professor, head of Department of mathematical analysis, Voronezh state University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: alexsandrbaev@mail.ru

Кобылинский Петр Александрович, аспирант кафедры математического анализа, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: urfenjuse@mail.ru

Kobylinskii P.A., postgraduate student of the Department of mathematical analysis, Voronezh state University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: urfenjuse@mail.ru

Давыдова Майя Борисовна, доцент кафедры математического анализа, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: mbd@vsu.ru

Davydova Maya B., associate Professor of mathematical analysis, Voronezh state University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: mbd@vsu.ru