

## К ОПРЕДЕЛЕНИЮ МОМЕНТА СИЛ ТРЕНИЯ ДИСКА, ВРАЩАЮЩЕГОСЯ В ОГРАНИЧЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ, ЗАПОЛНЕННОМ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ

А. А. Афанасьев, А. В. Ковалев

*Воронежский государственный университет*

Поступила в редакцию 20.02.2014 г.

**Аннотация:** в данной работе представлены различные подходы к определению мощности момента сил трения вращающихся дисков. Приводится постановка математической модели. Сравнительный анализ эмпирических и аналитических методов вычисления момента сил трения диска с современными средствами вычислительной гидродинамики позволяет оценить эффективность последних для решения подобного рода задач. В статье выделены ключевые моменты проведения расчета средствами вычислительной гидродинамики, которые могут быть обобщены для решения других задач турбомашиностроения. Систематизация и сравнение с компьютерным экспериментом имеющихся формул для определения момента сил трения дисков позволяет выделить наиболее точные подходы и отсеять некорректные.

**Ключевые слова:** вращающийся диск, мощность момента сил трения, вычислительная гидродинамика.

## ABOUT FINDING FRICTION TORQUE OF A DISK ROTATING IN LIMITED SPACE FILLED WITH VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLUID

A. A. Afanasyev, A. V. Kovalev

**Abstract:** different approaches for finding a rotating disk friction torque power are given in this article. Also mathematical model is described. Comparative analysis of empirical and analytical methods of calculation the disk friction torque power with modern computational fluid dynamics resources lets appreciate effectiveness of CFD for such kind of tasks. Key moments of realization of this calculation with help of computational fluid dynamics are highlighted. This things can be summarized for solving other turbomachinery problems. Systematization and comparison with computer experiment existing formulas for finding the disk friction torque lets highlights most accurate approaches and decline incorrect one.

**Keywords:** rotating disk, friction torque power, computational fluid dynamics.

### ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим гладкий диск радиуса  $r$  и толщины  $b$ , вращающийся с постоянной угловой скоростью в ограниченном пространстве, заполненном вязкой несжимаемой жидкостью. Задача о вычислении момента сил трения данного диска не теряет своей актуальности на протяжении многих лет из-за широкой распространенности различного рода турбомашин, например центробежных насосов. Ранее для решения конструкторских задач требовалось проводить

эксперименты. Сейчас с распространением вычислительной техники всё большую актуальность приобретает имитационное компьютерное моделирование.

На первом этапе решения поставленной задачи сформулируем математическую модель. Запишем уравнения Навье-Стокса [1], в цилиндрической системе координат, приближенное решение которых требуется найти:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu (\Delta^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}) + f_r; \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} - \frac{v_\theta v_r}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu (\Delta^2 v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta}) + f_\theta; \quad (2)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta^2 v_z + f_z; \quad (3)$$

$$\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \quad (4)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0 \quad (5)$$

где  $v_r, v_\theta, v_z$  — компоненты вектора скорости в цилиндрической системе координат,  $\rho$  — плотность,  $p$  — давление,  $\nu$  — кинематическая вязкость,  $f_r, f_\theta, f_z$  — массовые силы.

Задача о вращении диска в ограниченном пространстве удовлетворяет следующим условиям:

1. Осесимметричность.
2. Несжимаемость.
3. Отсутствие массовых сил.
4. Стационарность.

С учётом поставленных условий уравнения (1)–(5) примут следующий вид:

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right); \quad (6)$$

$$v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_\theta v_r}{r} = \nu \left( \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right); \quad (7)$$

$$v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right); \quad (8)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (9)$$

Граничные условия в уравнениях (6)–(9):

1. Угловая скорость вращения диска —  $\omega$ .
2. Условие прилипания на вращающемся диске, т.е. скорость на диске зависит от радиуса и равна  $\omega r$ .
3. Условие прилипания на корпусе - все компоненты скорости равны нулю.
4. Давление на оси вращения  $\rho_0$ .

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

При трехмерном моделировании дисков, вращающихся в ограниченном пространстве, возникает ряд сложностей при определении момента сил трения дисков. Основное внимание при решении подобных задач следует уделять построению корректной сеточной модели и выбору подходящей модели турбулентности [2].

Решение поставленной математической модели проводится в пакете вычислительной гидродинамики ANSYS CFX. Запишем необходимые для моделирования в ANSYS CFX исходные данные. Эти величины представлены в таблице 1.

Таблица 1. Исходные данные для расчёта в ANSYS CFX.

Параметр	Величина
Угловая частота вращения, рад/с	100, 70, 40, 10, 5, 1
Плотность воды, $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	997
Динамическая вязкость, $\mu$ , кг/м с	$8,899 \cdot 10^{-4}$
Радиус диска, $R_2$ , м	0,1
Радиус кожуха, $R_3$ , м	0,102
Осевой зазор между корпусом и диском, $s$ , м	0,004; 0,008; 0,012; 0,016; 0,02
Толщина диска, $b$ , м	0,02

Следующим шагом при трехмерном моделировании является создание сеточной модели. Для исследуемой задачи создана структурированная сеточная модель. Для дисков с более сложной геометрией, например турбонасосных агрегатов жидкостных ракетных двигателей, для экономии затрачиваемого на создание модели времени рекомендуется использовать неструктурированные сетки. При построении сеточной модели особое внимание следует уделить призматическому пристеночному слою, так как его качество будет являться определяющим фактором, влияющим на расчетную величину момента сил трения диска. В ANSYS CFX момент сил трения рассчитывается по ламинарному подслою на стенках и, соответственно, сеточная модель должна содержать призматический слой высота первого элемента в котором сравнима с высотой ламинарного подслоя на диске.

Как отмечалось ранее, еще одним определяющим фактором при решении задачи является выбор модели турбулентности. В пакет ANSYS CFX входит более 15 различных моделей. При расчетах мы использовали модели  $k-\varepsilon$ , SSG, SST и BSL. Выбор моделей  $k-\varepsilon$  и SSG обусловлен их универсальностью, а моделей SST и BSL их направленностью на расчет закрученных потоков. Модели  $k-\varepsilon$  и SST содержат два параметра. Модели SSG и BSL содержат по семь параметров и являются в свою очередь усложненными для моделей  $k-\varepsilon$  и SST соответственно. Модели SST и BSL являются модификациями для модели  $k-\omega$ . Усложненные модели целесообразно применять для задач со сложной геометрией, так как для простых задач они не дадут выигрыша в точности решения, но значительно увеличат время вычислений. Для верификации расчетов применялась эмпирическая интерполяционная формула Пантелла (10) для учета влияния ширины зазора  $s$  на момент сопротивления одной стороны диска радиуса  $R$  при отсутствии расхода [1]. Формула справедлива до  $s/R = 0,44$ .

$$M = \left[ \frac{0,151}{\left(\frac{s}{R}\right)^2 Re^{1,2}} + \frac{1,02 + \frac{s}{R}}{12 \left(6 + \frac{s}{R}\right) Re^{0,182}} \right] \rho \omega^2 R^5 \quad (10)$$

где  $M$  — момент сил трения одной стороны диска.

Для сравнения результатов компьютерного моделирования и эмпирической формулы (10) использовался безразмерный коэффициент момента сопротивления [1], широко применяемый

в инженерных методах расчетов, определяемый формулой

$$C_M = \frac{2M}{\rho \omega^2 R^5} \quad (11)$$

На рисунке 1 приведены графики зависимости данного коэффициента от величины числа Рейнольдса при фиксированном осевом зазоре (4 мм) между корпусом и диском. На графиках не представлена модель турбулентности BSL, так как результаты полученные с ее использованием отличались от результатов модели SST не более чем на 0,3%.

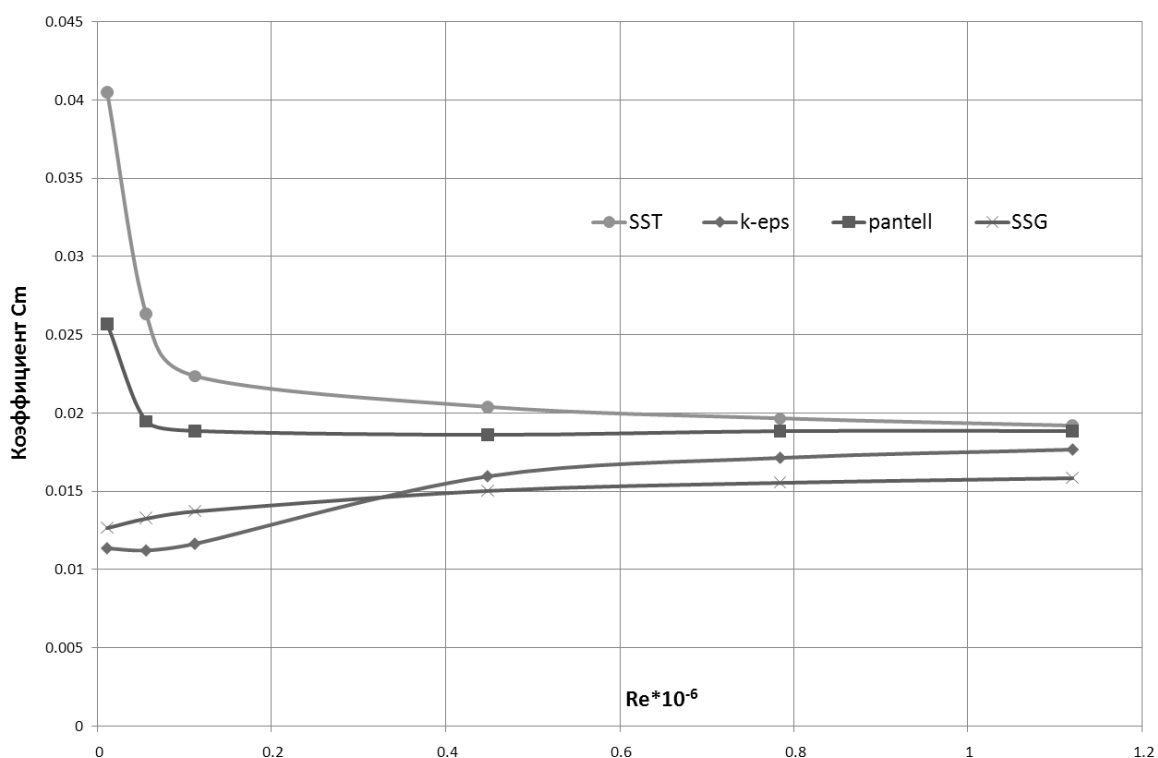


Рис. 1. Зависимость безразмерного коэффициента момента сопротивления от числа Рейнольдса.

Качественно и количественно лучше всего результаты экспериментов Пантелла удалось повторить применяя модель турбулентности SST. Если в области малых чисел Рейнольдса наблюдалось некоторое расхождение между графиками, то с его увеличением погрешность расчета практически исчезала (при  $Re=10^6$  менее 3%). Также с увеличением числа Рейнольдса уменьшалась погрешность и других моделей турбулентности. Подобные результаты получены и для осевых зазоров {8мм, 12мм, 16мм, 20мм}. То есть выбор модели турбулентности оказывает значительное влияние на вычисляемый в ANSYS CFX момент силы трения.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА СИЛ ТРЕНИЯ

Затраты мощности (дисковые потери) на трение боковых поверхностей рабочего колеса центробежного насоса могут составлять значительную долю в общем балансе энергии, особенно при малых коэффициентах быстроходности. Поэтому при расчете энергетического баланса центробежных насосов необходимо с высокой точностью определять величину данных потерь.

Момент сопротивления диска радиуса  $R$ , смачиваемого с одной стороны, равен [3]

$$M = -2\pi \int_0^R r^2 \cdot \tau_{z\varphi} dr \quad (12)$$

где  $\tau_{z\varphi}$  — окружная составляющая касательного напряжения.

Безразмерный коэффициент момента сопротивления, как отмечалось ранее, определяется формулой (11)

Для коэффициента момента диска, вращающегося в ограниченном пространстве (кожухе), при турбулентном режиме по расчётам Окайа и Хосегава [3]

$$\frac{C_M}{2} Re^{0,2} = 0,039 \quad (13)$$

где  $Re = \frac{R^2 \cdot \omega}{\nu}$  — число Рейнольдса,  $\nu$  — кинематическая вязкость жидкости.

При этом предполагалось, что отношение радиуса кожуха к радиусу диска равно 1,05 и окружная скорость диска больше окружной скорости ядра течения в 2,22 раза. При равенстве радиусов диска и кожуха и отношении указанных скоростей равном 2 константа 0,039 становится равной 0,0357.

Сравнивая выражения (11) и (13) получим формулу для определения момента трения одной стороны вращающегося диска

$$M = \frac{0,0195}{\sqrt[5]{Re}} \rho \omega^2 R^5. \quad (14)$$

Для турбулентного течения вокруг диска, вращающегося в свободном пространстве, в работе [3] решение Кармана для момента сопротивления одной стороны диска радиуса  $R$  имеет вид

$$M = \frac{0,0364}{\sqrt[5]{Re}} \rho \omega^2 R^5 \quad (15)$$

Согласно многочисленным опытным данным отношение минимального значения  $(C_M)_{\min}$  к значению  $(C_M)_{\text{св}}$  для “свободного” диска равно [1]

$$\frac{(C_M)_{\min}}{(C_M)_{\text{св}}} \approx 0,474 \quad (16)$$

С учётом зависимостей (15) и (16) минимальное значение момента сопротивления для одной стороны диска, вращающегося в ограниченном пространстве (кожухе) при турбулентном режиме будет иметь вид

$$M = \frac{0,0364 \cdot 0,474}{\sqrt[5]{Re}} \rho \omega^2 R^5 = \frac{0,0172}{\sqrt[5]{Re}} \rho \omega^2 R^5. \quad (17)$$

Таким образом, в формуле для момента трения по выражению (14) для одной стороны диска, вращающегося в ограниченном пространстве (кожухе) при турбулентном режиме, заложен запас  $0,0195/0,0172 = 1,13$ .

В работе [4] константа в формуле (14) или (15) по данным различных авторов может принимать значение от 0,022 до 0,027.

В работе [3] для окружной составляющей местного трения при турбулентном режиме приводится зависимость

$$\frac{\tau_{z\varphi}}{\rho \cdot (R \cdot \omega)^2} = 0,013065 \cdot Re^{-0,2} \quad (18)$$

Интегрируя выражение (12) с учётом окружной составляющей местного трения по выражению (18) будем иметь для одной стороны диска

$$M = \frac{\frac{2\pi}{5} 0,013065}{\sqrt[5]{Re}} \rho \omega^2 R^5 = \frac{0,01646}{\sqrt[5]{Re}} \rho \omega^2 R^5 \quad (19)$$

Различные подходы к определению момента сопротивления одной стороны диска показывают, что константа в формуле изменяется по данным работы [3] от 0,0146 до 0,0195, а по данным работы [4,5] со ссылкой на различных авторов — от 0,022 до 0,027.

В работе [4] на основании экспериментального изучения гидродинамического сопротивления дисков, вращающихся в кожухе, получена аппроксимация (примерно по 500 опытными точкам) со среднеквадратичной погрешностью около 1,5% для  $Re > 7 \cdot 10^5$ ,  $S/R = 0,066 \dots 0,49$  ( $S/R$  — относительный осевой зазор между кожухом и диском):

$$C_M = \frac{0,338 [\lg(S/R + 2,37) - 0,165]}{Re^{0,2}} \quad (20)$$

Если принять относительный осевой зазор равным минимальному значению экспериментального диапазона  $S/R = 0,066$ , то с учётом определения коэффициента сопротивления (11) для одной стороны вращающегося в корпусе диска момент равен

$$M = \frac{0,01872}{Re^{0,2}} \rho \omega^2 R^5 \quad (21)$$

Для определения момента сил трения также существует, ранее упоминавшаяся, эмпирическая интерполяционная формула Пантелла (10) для учета влияния ширины зазора  $S$  на момент сопротивления одной стороны диска радиуса  $R$  при отсутствии расхода. Формула справедлива до  $S/R = 0,44$ .

Мощность трения одной стороны диска определяется как  $N_{\text{ТР}} = M \cdot \omega$ . Многие инженеры, проектирующие турбонасосные агрегаты мощность трения дисков насосов рассчитывают по формуле из работы [6]

$$N_{\text{ТР,д}} = 2 \frac{0,039}{\sqrt[5]{Re}} \rho R^5 \omega^3 \quad (22)$$

где коэффициент "2" учитывает трение по внешним сторонам обоих дисков.

Природа появления константы 0,039 в формуле (9) возможно неправильное толкование данных работы [3]. На основании изложенного можно утверждать, что формула (22) даёт завышенную мощность трения дисков центробежного насоса минимум в 2 раза.

Кроме того момент сил трения определенный с помощью имитационного моделирования в ANSYS CFX также подтвердил завышение величины мощности сил трения вычисляемой по формуле (22). Был проведен ряд компьютерных экспериментов для относительных осевых зазоров {0,04; 0,08; 0,12; 0,16; 0,2} и нескольких чисел Рейнольдса.

Представленные на рисунке 2 результаты показывают, что для чисел Рейнольдса порядка  $10^4 - 10^5$  значения коэффициента  $C_M$  несколько меньше коэффициента принимаемого в формуле (14). С увеличением числа Рейнольдса результаты, полученные в ANSYS CFX, хорошо коррелируют с формулой (14). Сравнение результатов моделирования с формулой Пантелла (10) показало, что значения  $C_M$  по 3D расчету на 1-10% ниже значений вычисленных по формуле (10).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Проведенный компьютерный эксперимент позволил оценить эффективность использования средств вычислительной гидродинамики для решения задачи о диске, вращающемся в

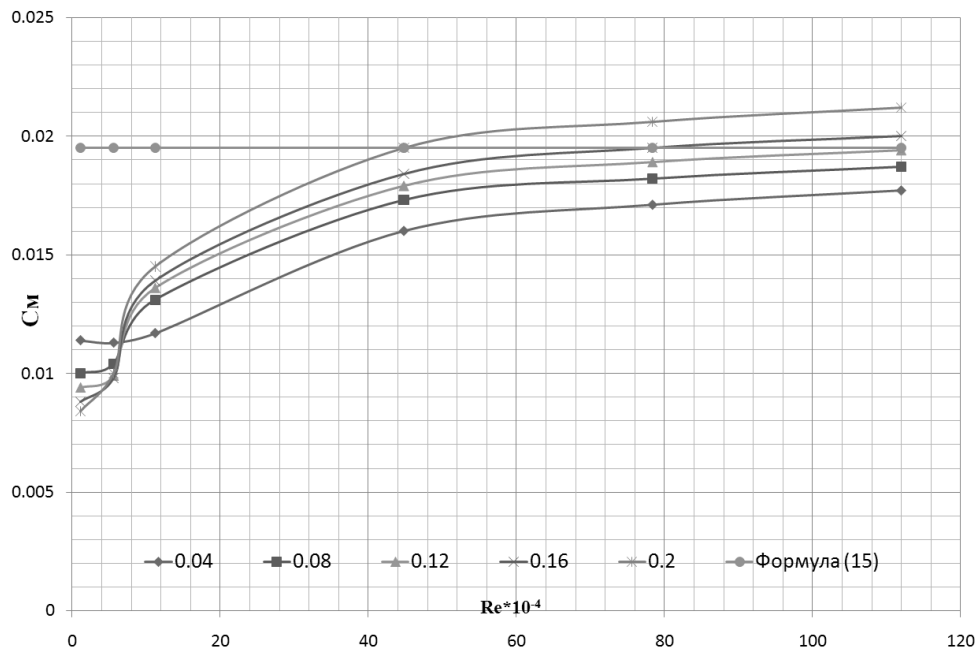


Рис. 2. Зависимость коэффициента момента силы трения от числа Рейнольдса при различных относительных осевых зазорах.

ограниченном пространстве. Анализ известных формул для определения момента дискового трения и сравнение их с результатами имитационного моделирования позволили обнаружить неточность в широко применяемой при проектировании центробежных насосов формуле.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. — М.-Л.: Гостехиздат, 1950. — 676 с.
- [2] Bathe K.J. Computational fluid and solid mechanics / K.J. Bathe. — Oxford: Elsevier Science Ltd., 2003. — 2524 p.
- [3] Дорфман Л.А. Гидродинамическое сопротивление и теплоотдача вращающихся тел / Л.А. Дорфман. — М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. — 260 с.
- [4] Роговский Т.А. О гидродинамическом сопротивлении дисков колеса центробежного насоса / Т.А. Роговский, З.Р. Горбис // Теплоэнергетика. — 1970. — № 9. — С. 46–49.
- [5] Краев М.В. Гидродинамические радиальные уплотнения высокооборотных валов / М.В. Краев, Б.В. Овсянников, А.С. Шапиро. — М.: Машиностроение, 1976. — 104 с.
- [6] Боровский Б.И. Энергетические параметры и характеристики высокооборотных лопастных насосов / Б.И. Боровский. — М.: Машиностроение, 1989. — 184 с.

### REFERENCES

- [1] Loitsyanskii L.G. Fluid and gas mechanics. [Lojcyanskij L.G. Mexanika zhidkosti i gaza]. Moscow–Leningrad: Gostechizdat, 1950, 676 p.
- [2] Bathe K.J. Computational fluid and solid mechanics, Oxford: Elsevier Science Ltd., 2003, 2524 p.
- [3] Dorfman L.A. Hydrodynamic resistance and heat transfer of solids of revolution. [Dorfman L.A. Gidrodinamicheskoe soprotivlenie i teplootdacha vrashhayushhixsya tel]. Moscow: State Publishing House of physic-mathematical literature, 1960, 260 p.

[4] Rogovsky T.A., Gorbis Z.R. About hydrodynamic resistance of centrifugal pump impeller disks. [Rogovskij T.A., Gorbis Z.R. O gidrodinamicheskom soprotivlenii diskov koleca centrobezhnogo nasosa]. *Teploe'nergetika – Heat-and-power engineering*, 1970, no. 9, pp. 46–49.

[5] Kraev M.V., Ovsyannikov B.V., Shapiro A.S. Hydrodynamic radial sealing of high speed shafts. [Kraev M.V., Ovsyannikov B.V., Shapiro A.S. Gidrodinamicheskie radial'nye uplotneniya vysokooborotnyx valov]. Moscow: Engineering, 1976, 104 p.

[6] Borovsky B.I. Energy parameters and characteristics of high speed blade pumps. [Borovskij B.I. E'nergeticheskie parametry i karakteristiki vysokooborotnyx lopastnyx nasosov]. Moscow: Engineering, 1989, 184 p.

*Афанасьев Александр Александрович, аспирант кафедры теоретической и прикладной механики, факультет прикладной математики, информатики и механики, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация  
E-mail: afanasyev.alex.alex@gmail.com*

*Afanasyev Alexandr Alexandrovich, graduate student of the department of Theoretic and applied mechanics, faculty of applied mathematics, informatics and mechanics, Voronezh State University, Voronezh, Russian federation  
E-mail: afanasyev.alex.alex@gmail.com*

*Ковалев Алексей Викторович, заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики, факультет прикладной математики, информатики и механики, доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация  
E-mail: kovalev@amm.vsu.ru*

*Kovalev Aleksey Viktorovich, head of the department of Theoretic and applied mechanics, faculty of applied mathematics, informatics and mechanics, Doctor of Physics & Mathematics, Professor, Voronezh State University, Voronezh, Russian federation  
E-mail: kovalev@amm.vsu.ru*