УДК 514.7

ОДНО СВОЙСТВО НОРМАЛЕЙ К ГРАНЯМ n–МЕРНОГО СИМПЛЕКСА

А. Т. Астахов, В. З. Мешков

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 16.06.2014 г.

Аннотация: основное содержание статьи составляет рассмотрение геометрических свойств симплексов, а также с помощью привлечения теоремы Гаусса–Остроградского устанавливается, что для любого симплекса найдутся две нормали, такие, что $(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \leqslant -1/n$. Исследование дополняется также рассмотрением частного случая когда неравенство переходит в равенство. Данное направление дополняется также рассмотрением того, что любой развёрнутый набор единичных векторов служит внешними нормалями к некоторому симплексу T с непустой внутренностью. С помощью неравенства $(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \leqslant -1/n$ установлено, что в любом наборе развернутых единичных векторов найдутся два таких, для которых оно выполняется. Данная проблема и метод доказательства теоремы мало изучены и требуют дальнейших исследований.

Ключевые слова: симплекс, внешняя нормаль, единичный вектор.

ONE PROPERTY OF THE NORMALS TO THE FACES OF THE n–DIMENSIONAL SIMPLEX

A. T. Astahov, V. Z. Meshkov

Abstract: the main contents of article make consideration of geometrical properties симплексов, and also by means of attraction of the theorem of Gauss–Ostrogradsky are established that for any simplex there will be two normals, such that $(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \leqslant -1/n$. Research is supplemented also with consideration of a special case when the inequality turns into equality. Channelized it is supplemented also with consideration of that any developed set of single vectors serves as external normals to some simplex of T with a nonempty interior. By means of inequality $(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \leqslant -1/n$ is established that in any set of the developed single vectors there will be two such for which it is carried out. This problem and method of the proof of the theorem are a little studied and demand further researches.

Keywords: simplex, external normal, unit vector.

Под симплексом в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ мы будем понимать выпуклую оболочку из набора $n+1$ точек $\{A_i\}_{i=1}^{n+1} \in \mathbf{R}^n$. T–есть симплекс $T = \operatorname{ch}\{A_i\}_{i=1}^{n+1}$. При этом всюду здесь предполагается, что внутренность $\operatorname{int} T$–непустое множество. Пусть $\{\vec{n}_i\}_{i=1}^{n+1}$ обозначает набор внешних единичных нормалей к граням симплекса, а $\{S_i\}_{i=1}^{n+1}$–площади этих граней.

Теорема. *Для любого симплекса T найдутся две нормали $\vec{n}_i$ и $\vec{n}_j$ такие, что*

$$(\vec{n}_i, \vec{n}_j) \leqslant -\frac{1}{n}.$$

Замечание. В случае правильного симплекса в $\mathbf{R}^n$ для любых двух нормалей

$$(\vec{n}_i, \vec{n}_j) = -\frac{1}{n}.$$

Доказательство. В силу теоремы Гаусса–Остроградского имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^{n+1} \vec{n}_i S_i = 0. \tag{1}$$

В трёхмерном случае это равенство имеет чёткий механический смысл. Поверхность, подвергнутая равномерному всестороннему давлению, остаётся в равновесии. См., например Полиа Г., Сегё Г. Задачи и теоремы из анализа. II часть. 1978 г. Стр. 179, Задача 8.

Без ограничения общности будем считать, что S_1–грань, имеющая максимальную площадь. Умножим скалярно равенство (1) на вектор $\vec{n}_1$

$$S_1 + S_2(\vec{n}_1, \vec{n}_2) + S_3(\vec{n}_1, \vec{n}_3) + \cdots + S_{n+1}(\vec{n}_1, \vec{n}_{n+1}) = 0, \tag{2}$$

В равенстве (2) оставим в левой части все неотрицательные члены, а все отрицательные члены перенесём в правую часть, тогда получившееся равенство можно условно записать

$$S_1 + \sum_{j=2}^{k} (\vec{n}_1, \vec{n}_j) S_j = \sum_{j=k+1}^{n+1} (-1)(\vec{n}_1, \vec{n}_j) S_j.$$

Левая часть этого равенства больше или равна S_1. Правая часть этого равенства состоит из $n+1-k$ положительных членов. Значит, по крайней мере, один из них будет больше или равен

$$\frac{S_1}{n+1-k} \geqslant \frac{S_1}{n}.$$

Итак, имеем

$$-(\vec{n}_1, \vec{n}_{j_0}) S_{j_0} \geqslant \frac{S_1}{n}$$

или

$$(\vec{n}_1, \vec{n}_{j_0}) \leqslant -\frac{S_1}{S_{j_0}} \frac{1}{n} \leqslant -\frac{1}{n}.$$

Что и требовалось доказать.

Через O далее будем обозначать начало координат $O = (0, 0, ..., 0)$ в $\mathbf{R}^n$. Пусть $\{A_k\}_{k=1}^{n+1} \in \mathbf{R}^n$.

Определение. Набор единичных векторов $\{OA_k\}_{k=1}^{n+1}$ будем называть развёрнутым, если

$$O \in \operatorname{int} T = \operatorname{ch} \{A_k\}_{k=1}^{n+1}.$$

Утверждение. *Любой развёрнутый набор единичных векторов служит внешними нормалями к некоторому симплексу T с непустой внутренностью.*

Доказательство. Пусть набор векторов $\{OA_k\}_{k=1}^{n+1}$ развёрнут. Положим $n_k = \overrightarrow{OA_k}$ и зададим симплекс T условиями

$$T = \{x \in \mathbf{R}^n : (n_k, x) \leqslant 1, k = 1, 2, .., n+1\}.$$

Точка O является внутренней точкой этого симплекса поскольку $(O, n_i) = 0 < 1$. Причём это неравенство выполняется для некоторой окрестности точки O. Грани симплекса T очевидным образом лежат в гиперплоскостях $(n_i, x) = 1$; $i = 1, 2, ..., n+1$, а n_i– служит нормалями к этим гиперплоскостям.

Следствие. *Для любого набора развернутых единичных векторов найдутся два таких, что $(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \leqslant -\dfrac{1}{n}$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Полиа Г. Задачи и теоремы из анализа. II ч. / Г. Полиа, Г. Сегё. — М.: Наука, 1978. — 432 с.

REFERENCES

[1] Polya G., Szego G., Problems and theorems of analysis. II part. [Polia G., Segyo G. Zadachi i teoremy iz analiza. II ch]. Moscow, Nauka, 1978, 432 p.

Астахов Александр Тимофеевич, кандидат физики-математических наук, доцент кафедры математического и прикладного анализа, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: AstahovAleks@yandex.ru
Тел.: 8(473)–220–83–48

Astahov Aleksandr Timofeevich, Associate Professor of the Department of mathematical and applied analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: AstahovAleks@yandex.ru
Tel.: 8(473)–220–83–48

Мешков Виктор Захарович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического и прикладного анализа, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: AstahovAleks@yandex.ru
Тел.: 8(473)–220–83–48

Meshkov Victor Zaharovich, Doctor of phisico-mathematical science, Professor of the Department of mathematical and applied analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: AstahovAleks@yandex.ru
Tel.: 8(473)–220–83–48