УДК 539

СООТНОШЕНИЯ ИЗОТРОПИИ И АССОЦИИРОВАННЫЙ ЗАКОН ТЕЧЕНИЯ

М. А. Артемов, Е. С. Барановский, А. П. Якубенко

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 01.03.2014 г.

Аннотация: рассматриваются вопросы математического моделирования напряженного и деформированного состояния пластических тел. Обсуждается возможность определения пластического потенциала анизотропного пластического тела как функции только собственных значений и собственных векторов тензора напряжений. Условие симметрии свертки тензора напряжений и скоростей пластических деформаций в качестве определяющего соотношения сопоставляется с соотношениями ассоциированного закона пластического течения. Использование обобщенного закона пластического течения для получения непрерывных полей деформаций в упругопластическом теле рассматривается на примере плоской осесимметричной задачи.

Ключевые слова: пластический потенциал, условие изотропии, обобщенный ассоциированный закон пластического течения.

RATIO ISOTROPY AND ASSOCIATED FLOW LAW

M. A. Artemov, E. S. Baranovskii, A. P. Yakubenko

Abstract: we consider questions of mathematical modeling of stress and strain state of the plastic bodies. The possibility of determining the capacity of an anisotropic plastic plastic body as a function of only the eigenvalues and eigenvectors of the stress tensor. Condition of symmetry of the convolution of the stress tensor and plastic strain rate as the defining relation is compared with the relations of the associated law of plastic flow. Using the generalized law of plastic flow for continuous deformation fields in elastic-plastic body is considered as an example of a plane axisymmetric problem.

Keywords: plastic potential, condition of isotropy, associated flow rule for non-smooth yield surface.

ВВЕДЕНИЕ

В математической теории пластичности при конструировании уравнений состояния исходят из результатов эксперимента. При интерпретации полученных результатов делается ряд предположений относительно связей величин, определяющих внешние воздействие и величин, определяющих отклики материала на эти воздействия. Например, пропорциональность тензоров, соосность тензоров (и т. д.), определяющих воздействия и отклики [1]–[5].

Одно из направлений математической теории пластичности — теория пластического течения, в рамках которой для материала, находящегося в пластическом состоянии, связь напряжений и скоростей пластических деформаций определяется ассоциированным законом пластического течения, предполагающего тождественность функции пластичности и пластического потенциала [5]–[11].

К ПОСТРОЕНИЮ ПЛАСТИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА

В работе [12] рассматриваются различные формы записи соотношений ассоциированного закона пластического течения для изотропных и анизотропных идеально пластических тел. Условие

$$F(\sigma_{ij}) = f(\sigma) = 0, \tag{1}$$

где σ — тензор напряжений, определяет предельное состояние или состояние пластичности. С учетом спектрального разложения тензора напряжений

$$\sigma = \sigma_1 \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \sigma_2 \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \sigma_3 \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$$

и выражений для координат тензора напряжений σ через его собственные значения и собственные векторы

$$\sigma_{ij} = \sigma \cdot \cdot \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \sigma_1 l_i l_j + \sigma_2 m_i m_j + \sigma_3 n_i n_j$$

условия (1) записывается в виде [12]

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, l_1, m_1, n_1, l_2, m_2, n_2, l_3, m_3, n_3) = 0, \tag{2}$$

где l_i, m_i, n_i — координаты собственных векторов тензора σ в выбранной системе координат x, y, z.

Согласно принципу материальной независимости от системы отсчета условие пластичности для любых тел должно быть инвариантом [5]–[11].

Аргументами функции (2) являются инварианты тензора напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (главные нормальные напряжения) и неинвариантные величины l_i, m_i, n_i. Инвариантными величинами относительно преобразования системы координат являются направления собственных векторов тензора σ относительно главных направлений анизотропии материала [12]. Однако, этой информации недостаточно для определения пластического потенциала, поскольку должны быть также известны другие параметры анизотропии.

Если при записи условия пластичности (2) используется фиксированная система координат, то всякий раз при выборе иного направления осей координат надо будет определять новую функцию (2).

Для получения инвариантной относительно преобразования системы координат функции пластичности, учитывающей начальную анизотропию материала, определяют, например, функцию совместных инвариантов тензора напряжений и тензоров, определяющих анизотропию материала [3], [15], [16].

СООТНОШЕНИЯ ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТИ ИШЛИНСКОГО

Рассмотрим некоторые соотношения между тензорами второй валентности.

Тензоры второй валентности можно представить в виде суммы шаровой и девиаторной составляющих:

$$\sigma = \frac{1}{3}\mathbf{E} \otimes \mathbf{E} \cdot \cdot \sigma + {}^4\mathbf{D} \cdot \cdot \sigma = \frac{1}{3} tr(\sigma) \mathbf{E} + \mathbf{s}, \quad \frac{1}{3}\mathbf{E} \otimes \mathbf{E} + {}^4\mathbf{D} = {}^4\mathbf{I}.$$

Здесь $\mathbf{E}$ — единичный тензор второй валентности. Изотропный тензор четвертой валентности $\frac{1}{3}\mathbf{E} \otimes \mathbf{E}$ при свертке по двум паром индексов с тензором второй валентности выделяет шаровую часть, является проектором на подпространство изотропных тензоров второй валентности. Изотропный тензор четвертой второй валентности ${}^4\mathbf{D}$ — при свертке по двум паром индексов с тензором второй валентности выделяет девиаторную составляющую последнего, является проектором на девиаторное подпространство, ${}^4\mathbf{I}$ — единичный тензор четвертой валентности. В соответствии с этим, свертка двух тензоров второй валентности σ и ε по одной паре индексов представима в виде

$$\sigma\cdot\varepsilon=\tfrac{1}{3}tr(\sigma)tr(\varepsilon)\mathbf{E}+\mathbf{s}\cdot\mathbf{d},$$
$$\varepsilon\cdot\sigma=\tfrac{1}{3}tr(\sigma)tr(\varepsilon)\mathbf{E}+\mathbf{d}\cdot\mathbf{s}.$$

В общем случае тензор $\mathbf{s}\cdot\mathbf{d}$ не является девиатором т. е. $tr(\mathbf{s}\cdot\mathbf{d})\neq 0$. След тензора $\mathbf{s}\cdot\mathbf{d}$ будет равен нулю, если в девиаторной плоскости векторы, соответствующие тензорам $\mathbf{s}$ и $\mathbf{d}$ ортогональны ($tr(\mathbf{s}\cdot\mathbf{d})=\mathbf{s}\cdot\cdot\mathbf{d}=0$).

Если симметричные тензоры σ и ε являются соосными, то есть собственные векторы одного тензора являются собственными векторами второго, то будет выполняться равенство

$$\sigma\cdot\varepsilon=\varepsilon\cdot\sigma. \tag{3}$$

Действительно, если обозначить через $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ собственные векторы тензоров σ и ε, то, учитывая спектральное разложение тензоров

$$\sigma=\sigma_1\mathbf{l}\otimes\mathbf{l}+\sigma_2\mathbf{m}\otimes\mathbf{m}+\sigma_3\mathbf{n}\otimes\mathbf{n},$$
$$\varepsilon=\varepsilon_1\mathbf{l}\otimes\mathbf{l}+\varepsilon_2\mathbf{m}\otimes\mathbf{m}+\varepsilon_3\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}$$

операцию свертки $\sigma\cdot\varepsilon$ можно представить в виде

$$\sigma\cdot\varepsilon=\sigma_1\varepsilon_1\mathbf{l}\otimes\mathbf{l}+\sigma_2\varepsilon_2\mathbf{m}\otimes\mathbf{m}+\sigma_3\varepsilon_3\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}=\varepsilon\cdot\sigma.$$

Иной алгоритм доказательства равенства (5) приведен в [17].

Из (3) следует шесть соотношений

$$\sigma_{i\,k}\varepsilon_{k\,j}=\varepsilon_{i\,k}\sigma_{k\,j}. \tag{4}$$

Три соотношения (4) выполняются тождественно, когда $i=j$.

Условия (4) были приведены в работе Ишлинского [18] как условия совпадения главных осей тензора напряжений и тензора скоростей пластических деформаций.

Поскольку единичный тензор второй валентности $\mathbf{E}$ сосен любому симметричному тензору второй валентности, то представляя теноры σ и ε в виде суммы шаровой и девиаторной составляющих

$$\sigma\cdot=\frac{1}{3}tr(\sigma)\mathbf{E}+\mathbf{s},\quad \varepsilon\cdot=\frac{1}{3}tr(\varepsilon)\mathbf{E}+\mathbf{d},$$

из равенства

$$\sigma\cdot\varepsilon=\frac{1}{3}tr(\sigma)tr(\varepsilon)\mathbf{E}+\mathbf{s}\cdot\mathbf{d}=\varepsilon\cdot\sigma=\frac{1}{3}tr(\sigma)tr(\varepsilon)\mathbf{E}+\mathbf{d}\cdot\mathbf{s}$$

получаем, что

$$\mathbf{s}\cdot\mathbf{d}=\mathbf{d}\cdot\mathbf{s}.$$

Это равенство равносильно равенству (1). Также будет выполняться равенство

$$(\sigma+\alpha\mathbf{E})\cdot(\varepsilon+\beta\mathbf{E})=(\varepsilon+\beta\mathbf{E})\cdot(\sigma+\alpha\mathbf{E}),$$

где α,β — скалярные величины.

Из симметрии тензора $\mathbf{s}\cdot\mathbf{d}$ следует соосность тензоров $\mathbf{s}$ и $\mathbf{d}$. Действительно, пусть $\mathbf{n}_i$ — собственные векторы тензора $\mathbf{s}$, а $\mathbf{m}_i$— собственные векторы тензора $\mathbf{d}$. Тогда

$$\mathbf{s}\cdot\mathbf{d}=s_id_k(\mathbf{n}_i\cdot\mathbf{m}_k)\mathbf{n}_i\otimes\mathbf{m}_k,$$
$$\mathbf{d}\cdot\mathbf{s}=s_kd_i(\mathbf{n}_k\cdot\mathbf{m}_i)\mathbf{m}_i\otimes\mathbf{n}_k.$$

Равенство $\mathbf{s}\cdot\mathbf{d} = \mathbf{d}\cdot\mathbf{s}$ будет выполняться, если $\mathbf{n}_i = \mathbf{m}_i$ (другое доказательство приведено в работе Радаева [19].

Рассмотрим вопрос об использовании (3) в качестве определяющего уравнения в математической теории пластичности для изотропных идеально пластических тел.

В работе [13] говорится, что для изотропного идеально пластического тела соотношения ассоциированного закона пластического течения приобретают вид $\sigma\cdot\varepsilon = \varepsilon\cdot\sigma$ (симметрия свертки тензоров напряжений и скоростей пластических деформаций).

Из ассоциированного закона течения, предполагающего тождество функции пластическому потенциалу, следует, что для изотропного идеально пластического тела тензор скоростей деформаций будет сосен тензору напряжений, а, следовательно, будут выполняться соотношения (3).

Закон нормальной связи, кроме соосности тензоров, определяет и другие соотношения между компонентами тензоров.

В качестве примера рассмотрим однородное напряженное состояние. Для изотропного пластического тела, если напряженное состояние является однородном, то из ассоциированного закона пластического течения следует, что деформированное состояние будет также однородным. Действительно, в рассматриваемом случае, если направить оси координат по главным направлениям тензора напряжений, то согласно ассоциированному закону пластического течения

$$\varepsilon_{ii} = \lambda_k(\frac{\partial f_k}{\partial tr(\sigma)} + 2\frac{\partial f_k}{\partial tr(\mathbf{s}^2)}s_{ii}^{+}3\frac{\partial f_k}{\partial tr(\mathbf{s}^3)}(s_{ii}^2 - \frac{1}{3}s_{ij}^2\delta_{ij})), \quad \lambda_k \geqslant 0. \tag{5}$$

Если $\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} = 0$, когда $i \neq j$, соотношения (3) будут выполняться тождественно, то есть в отличие от ассоциированного закона пластического течения (5) соотношения (4) не будут устанавливать какой-либо связи между компонентами тензора напряжений и скоростей деформаций.

Рассмотрим второй пример. Для изотропного жесткопластического тела согласно ассоциированному закону течения будем иметь соотношения

$$\frac{\varepsilon_{ij}}{\partial f/\partial\sigma_{ij}} = \lambda. \tag{6}$$

Так для потенциала Мизеса ($f = \alpha\mathbf{s}\cdot\cdot\mathbf{s}$, $\alpha = const$) из пропорций (6) следует, что

$$\varepsilon_{ij}s_{nk} = \varepsilon_{nk}s_{ij}. \tag{7}$$

Несложно проверить, что при выполнении (7) соотношения соосности тензоров σ и ε будут выполняться тождественно. Выполнение соотношений (3) не влечет за собой выполнение соотношений (7).

Рассмотрим третий пример. Для идеально пластического тела рассмотрим функцию пластичности общего вида

$$f(tr(\sigma), tr(\mathbf{s}^2), tr(\mathbf{s}^3)).$$

Здесь $\mathbf{s}$ — девиатор тензора напряжений.

Запишем соотношения ассоциированного закона пластического течения в виде

$$\varepsilon = \lambda\mathbf{h},$$

где

$$\mathbf{h} = \frac{\partial f}{\partial tr(\sigma)}\mathbf{E} + 2\frac{\partial f}{\partial tr(\mathbf{s}^2)}\mathbf{s} + 3\frac{\partial f}{\partial tr(\mathbf{s}^3)}\mathbf{s}^2{:}{}^4\mathbf{D}.$$

Из определения девиатора и степени тензора следует, что тензоры $\mathbf{s}$ и $\mathbf{s}^2{:}{}^4\mathbf{D}$ соосны [20]. Так как единичный тенор $\mathbf{E}$ сосен любому симметричному тензору второй валентности, то тензор ε будет соосен тензорам $\mathbf{s}$, $\mathbf{s}^2{:}^4\mathbf{D}$, $\mathbf{h}$, $\mathbf{E}$. Следовательно, при выполнении ассоциированного закона пластического течения будут также выполняться равенства

$$\varepsilon \cdot \mathbf{s} = \mathbf{s} \cdot \varepsilon,$$

$$\varepsilon \cdot \mathbf{h} = \mathbf{h} \cdot \varepsilon,$$
$$\varepsilon \cdot (\mathbf{s}^2 \cdot \cdot {}^4\mathbf{D}) = (\mathbf{s}^2 \cdot \cdot {}^4\mathbf{D}) \cdot \varepsilon.$$

Отметим также [16], что для соосных теноров напряжений и скоростей пластических деформаций, в общем случае, не имеет место неравенство

$$\varepsilon \cdot \cdot \sigma \geqslant 0,$$

определяющее неотрицательность диссипативной функции.

В качестве другого примера рассмотрим задачу о нагружении трубы, внешняя и внутренняя стенки которой — соосные круговые цилиндрические поверхности. Для идеально жестко пластического тела, если труба находится в пластическом состоянии, распределение напряжений при условии пластичности Треска ($r.\theta.z$— цилиндрическая система координат)

$$\begin{array}{l} \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = 2\kappa k, \quad \kappa = sign(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}), \\ \min\{\sigma_{\theta\theta}, \sigma_{rr}\} \leqslant \sigma_{zz} \leqslant \max\{\sigma_{\theta\theta}, \sigma_{rr}\} \end{array}$$

будет иметь вид

$$\sigma_{rr} = -p_a + 2k\kappa \lg \frac{r}{a}, \quad \sigma_{\theta\theta} = -p_a + 2k\kappa \lg \frac{r}{a} + 2k\kappa. \tag{8}$$

Решение (8) получено в предположении, что на внутренней стенке трубы при $r = a$ радиальная компонента тензора напряжений

$$\sigma_{rr} = -p_a.$$

Напряжения на внешней границе трубы $r = b$ определяются из решения (8). Осевая компонента тензора напряжений σ_{zz} остается неопределенной [21]. Полученное решение позволяет установить, что знак κ соответствует знаку разности давлений действующих на внешнюю и внутреннюю стенки труды $p_a - p_b$

$$p_a - p_b = 2k\kappa \lg \frac{b}{a}.$$

При использовании иных условий пластичности, кроме Треска, не зависящих от первого инварианта тензора напряжений, для определения напряжений необходимо использовать уравнения состояния, например, ассоциированный закон, который позволят установить, что для несжимаемого материала при $\varepsilon_{zz} = 0$ осевая компонента тензора напряжений $\sigma_{zz} = 0,5(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})$, что в сою очередь приводит к условию (9).

Из условий несжимаемости и соосности тензоров напряжений и скоростей деформаций, которые здесь принимается без рассмотрения ассоциированного закона течения, следует, что скорости перемещений и компоненты тензора скоростей перемещений будут иметь вид

$$u_r = \frac{u_a}{r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = -\varepsilon_{rr} = \frac{u_a}{r^2}.$$

Компоненты тензора напряжений и скоростей деформаций удовлетворяют условию (3). Однако знак величины u_a остается произвольным до использования условия неотрицательности диссипативной функции, которое позволяет установить связь знаков величин κ и u_a в рассматриваемой задаче.

Поскольку условия (3) допускают любой знак диссипативной функции, в работе [16] отмечалось о необходимости дополнения модели пластического тела, включающей соотношения (3), условием неотрицательности диссипативной функции.

В заключение рассмотрим случай, когда изотропное пластическое тело чувствительно к гидростатическому давлению. Согласно ассоциированному закону пластического течения не выполняется равенство $tr(\varepsilon) = 0$. Если рассматривать условие (3) без предположения о пластической несжимаемости ($tr(\varepsilon) = 0$), то будем иметь незамкнутую систему уравнений (14 уравнений, 15 неизвестных)

$$\nabla \cdot \sigma = \mathbf{0},$$

$$f_1(\sigma) = 0,$$
$$f_2(\sigma) = 0,$$
$$\varepsilon \cdot \mathbf{s} = \mathbf{s} \cdot \varepsilon,$$

$$\varepsilon = (\nabla \otimes \mathbf{u} + (\nabla \otimes \mathbf{u})\mathrm{T})/2.$$

В рамках теории течения система уравнений будет замкнутой.

О СООТНОШЕНИЯХ ОБОБЩЕННОГО АССОЦИИРОВАННОГО ЗАКОНА ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ

В работе 1928 г. Р. Мизес [3] для жесткопластического тела вывел закон градиентной связи тензора приращений пластических деформаций и гладких функций пластичности общего вида. Для ребра поверхности пластичности аналогичные результаты были изложены Рейсом в работе [4].

Друкер [22] ввел постулат, согласно которому допустимые направления вектора скорости пластических деформаций в сингулярных точках пересечения поверхностей пластичности ограничено направлениями нормалей к этим поверхностям

$$\varepsilon^p = \lambda \frac{\partial f_1}{\partial \sigma} + \mu \frac{\partial f_2}{\partial \sigma}, \quad \lambda, \mu \geqslant 0.$$

Койтер в работах [23], [24] сформулировал обобщенный закон пластического течения для угловых точек поверхности пластичности

$$\varepsilon = \sum_k \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \sigma}, \quad k = 1, 2, \ldots, N,$$

где N число поверхностей, пересекающихся в рассматриваемой точке кусочно гладкой пластичности. Этот закон допускал непрерывность скоростей пластических деформаций в сингулярных точках поверхности пластичности упруго-пластического тела.

Рассмотрим в качестве примера задачу о быстро вращающемся тонком диске, находящегося в упругопластическом состоянии, когда "истинная" функция пластичности аппроксимируется некоторой кусочно-линейной функцией.

Уравнение равновесия при выборе цилиндрической системы координат (r, θ, z) имеет вид [8]

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\theta = -\rho \omega^2 r^2.$$

Когда рассматривается угловая точка кривой пластичности, если предположить, что в некоторой области диска

$$r_1 \leqslant r \leqslant r_2, \quad r_2 > r_1$$

компоненты тензора напряжений не изменяют своего значения

$$\sigma_r = const_1, \quad \sigma_\theta = const_2,$$

то уравнение равновесия не будет выполняться. Следовательно, когда при изменении напряженного состояния вектор напряжений переходит через угловую точку, в рамках теории пластического течения вектор скоростей пластических деформаций будет претерпевать разрыв, то есть обобщенный ассоциированный закон пластического течения не выполняется.

В качестве второго примера рассмотрим задачу об осесимметричном плоско-деформированном состоянии цилиндрической трубы из упругопластического материала при учете упругой сжимаемости. Если рассматривать кусочно-линейную функцию пластичности, то, аналогично задаче о вращающемся диске, не возникает зона, в которой напряженное состояние не зависит от радиальной координаты, то есть в рамках теории пластического течения для угловых точек поверхности пластичности не будет выполняться обобщенный ассоциированный закон. Таким образом, если полагать, что в упругопластическом теле деформации должны быть непрерывными, то в рамках теории течения возникает вопрос о целесообразности рассмотрения кусочно-гладких функций пластичности.

ВЫВОДЫ

Соотношения соосности тензоров напряжений и скоростей пластических деформаций, налагают менее жесткие ограничения чем соотношения ассоциированного закона течения, и при решении задач должны быть дополнены условием неотрицательности диссипативной функции, а для пластически сжимаемых тел требуют дополнительных соотношений для получения замкнутой системы уравнений. Если полагать, что в упругопластическом теле деформации должны быть непрерывными, то в рамках теории течения возникает вопрос о возможности рассмотрения кусочно-гладких функций пластичности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Levy M. Memoire sur les equations generales des mouvements interieurs des corps solides ductiles au dela des limites oul elasticite pourrait les ramener a leur premier etat / M. Levi // Comples Rendus Acad. Sci., Paris. — 1870. — Vol. 70. — P. 1323–1325.

[2] Mises R. Mechanics of solids in plastic state / R. Mises // Göttinger Nachr. Math. Phys. — 1913.— Heft 4. — S. 582–592.

[3] Mises R. Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen / R. Mises // Ztschr. Angew. Math. und Mech. — 1928. — Band 8. — Heft 3. — S. 161–185.

[4] Reuss A. Vereintachte Berechnung der plastischen Formänderungs-geschwindingkeiten bei Voraussetzung der Schubspannungsfliesbedingung / A. Reuss // Ztschr. Angew. Math. und Mech. — 1933. — Band. 13. — Heft 5.— S. 365-360.

[5] Hill R. The Mathematical Theory of Plasticity / R. Hill. — Oxford University Press, New York, 1950. — 356 p.

[6] Prager W. Theory of Perfectly Plastic Solids / W. Prager, P.G. Hodge. — Wiley, New York, 1951. — 356 p.

[7] Фрейденталь А. Математическая теория неупругой сплошной среды / А. Фрейденталь, Х. Гейрингер. — М.: Физматгиз, 1962. — 432 с.

[8] Соколовский В.В. Теория пластичности / В.В. Соколовский. — М.: Высшая школа, 1969. — 608 с.

[9] Качанов Л.М. Основы теории пластичности / Л.М. Качанов. — М.: Наука, 1969. — 420 с.

[10] Быковцев Г.И. Теория пластичности / Г.И. Быковцев, Д.Д. Ивлев. — Владивосток: Дальнаука, 1998. — 528 с.

[11] Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести / Н.Н. Малинин. — М.: Машиностроение, 1975. — 400 с.

[12] Новожилов В.В. Теория упругости / В.В. Новожилов. — Л.: Судпромгиз, 1958. — 370 с.

[13] Ивлев Д.Д. Теория предельного состояния и идеальной пластичности / Д.Д. Ивлев // Воронеж: ВорГУ, 2005. — 357 с.

[14] Гольденблат И.И. Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов / И.И. Гольденблат, В.А. Копнов. — М.: Машиностроение, 1968. — 192 с.

[15] Banabic D. Plastic Behaviour of Sheet Metal in Sheet Metal Forming Processes / D. Banabic. — Springer Berlin Heidelberg, 2010. — P. 27–140.

[16] Артемов М.А. К теории пластичности анизотропных материалов / М.А. Артемов // Проблемы механики: Сб. статей. К 90-летию дня рождения А.Ю. Ишлинского. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — С. 100–104.

[17] Ишлинский А.Ю. Математическая теория пластичности / А.Ю. Ишлинский, Д.Д. Ивлев. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 704 с.

[18] Ишлинский А.Ю. Прикладные задачи механики. Т. 1 / А.Ю. Ишлинский. — М.: Наука, 1986. — 407 с.

[19] Радаев Ю.Н. О соотношениях перестановочности Ишлинского в математической теории пластичности / Ю.Н. Радаев // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. — 2007. — № 6(56). — С. 102–113.

[20] Лурье А.И. Нелинейная теория упругости / А.И. Лурье. — М.: Наука, 1980. — 512 с.

[21] Артемов М.А. Следствия нормального закона пластического течения / М.А. Артемов, Н.С. Потапов, А.П. Якубенко // Вестн. Воронеж. гос. тех. ун-та. — 2009. — Т. 5, № 9. — С. 145–147.

[22] Drucker D.C. A more fundamental approach to plastic stress strain relations / D.C. Drucker // In Proc. 1st U.S. Natl. Congr. Appl. Mech., Chicago, 1951. — p. 487–491.

[23] Koiter W.T. Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic materials with Singular yield surfaces. Quart. Appl. Math. — 1953. — Vol. 11, № 3. — P. 350–354.

[24] Koiter W.T. General theorems for elasto-plastic solids / W.T. Koiter // In Prog. Solid. Mech. (eds I. N. Sneddon and R. Hill), North-Holland Publ. Company. — 1960. — P. 167–211.

REFERENCES

[1] Levy M. Memoire sur les equations generales des mouvements interieurs des corps solides ductiles au dela des limites oul elasticite pourrait les ramener a leur premier etat. Comples Rendus Acad. Sci., Paris, 1870, Vol. 70, pp. 1323–1325.

[2] Mises R. Mechanics of solids in plastic state. Göttinger Nachr. Math. Phys., 1913, Heft 4, s. 582–592.

[3] Mises R. Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen, Ztschr. Angew. Math. und Mech., 1928, Band 8, heft 3, s. 161–185.

[4] Reuss A. Vereintachte Berechnung der plastischen Formänderungs-geschwindingkeiten bei Voraussetzung der Schubspannungsfliesbedingung, Ztschr. Angew. Math. und Mech., 1933, Band. 13, heft 5, s. 365–360.

[5] Hill R. The Mathematical Theory of Plasticity, Oxford University Press, New York, 1950, 356 p.

[6] Prager W. Theory of Perfectly Plastic Solids, Wiley, New York., 1951, 356 p.

[7] Freudental A.M., Geiringer H. The mathematical theories of the inelastic continuum. [Freudental A.M., Geiringer H. Matematicheskaya teoriya neuprugoj sploshnoj sredy]. Moscow: Fizmatlit, 1962, 432 p.

[8] Sokolovskii V.V. Theory of plasticity. [Sokolovskij V.V. Teoriya plastichnosti]. Moscow: Vishaya Shkola, 1969, 608 p.

[9] Kachanov L. M. Foundations of the Theory of Plasticity. [Kachanov L.M. Osnovy teorii plastichnosti]. Moscow: Nauka, 1973, 576 p.

[10] Bikovtsev G.I., Ivlev D.D. Theory of plasticity. [Bykovcev G.I., Ivlev D.D. Teoriya plastichnosti]. Vladivostok: Dalnauka, 1998, 528 p.

[11] Malinin N.N. Applied theory of plasticity and creep. [Malinin N.N. Prikladnaya teoriya plastichnosti i polzuchesti]. Moscow: Mashinostroenie, 1975, 400 p.

[12] Novozsilov V.V. Theory of elasticity. [Novozhilov V.V. Teoriya uprugosti]. Leningrad: Sudpromgiz, 1958, 370 p.

[13] Ivlev D.D. Theory of limits condition and ideal plasticity. [Ivlev D.D. Teoriya predel'nogo sostoyaniya i ideal'noj plastichnosti]. Voronezh: Voronezh State University, 2005, 357 p.

[14] Golijdenblat I.I., Kopnov V.A. The criteria of strength and plasticity of structural materials solids. [Gol'denblat I.I., Kopnov V.A. Kriterii prochnosti i plastichnosti konstrukcionnyx materialov]. Moscow: Engineering, 1968, 192 p.

[15] Banabic D. Plastic Behaviour of Sheet Metal in Sheet Metal Forming Processes, Springer Berlin Heidelberg, 2010, pp. 27–140.

[16] Artemov M.A. On theory of plasticity of anisotropy solids. [Artemov M.A. K teorii plastichnosti anizotropnyx materialov]. Problems in mechanics: a Collection of articles. To the 90th anniversary of the birthday A.Y. Ishlinsky. Moscow: FIZMATLIT, 2003, pp. 100–104.

[17] Ishlinskii A.Y., Ivlev D.D. Mathematical Theory of Plasticity. [Ishlinskii A.Y., Ivlev D.D. Matematicheskaya teoriya plastichnosti]. Moscow: FIZMATLIT, 2001, 704 p.

[18] Ishlinskii A.Y. Applied problems of mechanics. [Ishlinskij A.Yu. Prikladnye zadachi mexaniki]. Moscow: Nauka, 1986, Vol. 2, 407 p.

[19] Radayev Y.N. On the Ishlinsky commutative equations in the mathematical theory of plasticity. [Radaev Yu.N. O sootnosheniyax perestanovochnosti Ishlinskogo v matematicheskoj teorii plastichnosti]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya — Vestnik of Samara state University. Science series*, 2007, no. 6 (56), pp. 102–113.

[20] Lurie A.I. Nonlinear theory of elasticity. [Lur'e A.I. Nelinejnaya teoriya uprugosti]. Moscow: Nauka, 1980, 512 p.

[21] Artemov M.A., Potapov N.S., Yakubenko A.P. Full plasticity condition and associated law of deformation. [Artemov M.A., Potapov N.S., Yakubenko A.P. Sledstviya normal'nogo zakona plasticheskogo techeniya]. *Vestnik Voronezhskogo technicheskogo universiteta — Proceedings of Voronezh State Technical University*, 2009, Vol. 5, no. 9, pp. 145–147.

[22] Drucker D.C. A more fundamental approach to plastic stress strain relations. In Proc. 1st U.S. Natl. Congr. Appl. Mech., Chicago, 1951, pp. 487–491.

[23] Koiter W.T. Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic materials with Singular yield surfaces, Quart. Appl. Math., 1953, Vol. 11, no. 3, pp. 350–354.

[24] Koiter W.T. General theorems for elasto-plastic solids, In Prog. Solid. Mech. (eds I. N. Sneddon and R. Hill), North-Holland Publ. Company, 1960, pp. 167–211.

Артемов Михаил Анатольевич, заведующий кафедрой программного обеспечения и администрирования информационных систем факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского госуниверситета, доктор физико-математических наук, профессор, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: artemov_m_a@mail.ru

Artemov Mikhail Anatolievich, Head of the Chair of Programming Software and Administration of Voronezh State University, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Voronezh, Russian Federation
E-mail: artemov_m_a@mail.ru

Барановский Евгений Сергеевич, доцент кафедры программного обеспечения и администрирования информационных систем факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского госуниверситета, кандидат физико-математических наук, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: esbaranovskii@gmail.com

Baranovskii Evgeni Sergeevich, Associate Professor of the Chair of Programming Software and Administration of Voronezh State University, candidate of physical and mathematical sciences, Voronezh, Russian Federation
E-mail: esbaranovskii@gmail.com

Якубенко Андрей Павлович, преподаватель кафедры программного обеспечения и администрирования информационных систем факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского госуниверситета, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: Andrey.Yakubenko@dataart.com

Yakubenko Andrey Pavlovich, Lecturer of the Chair of Programming Software and Administration of Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: Andrey.Yakubenko@dataart.com