УДК 537.872.2, 530.145.7, 53.043

ИЗЛУЧЕНИЕ ВАВИЛОВА-ЧЕРЕНКОВА: ОТ КЛАССИЧЕСКОЙ КАРТИНЫ К КВАНТОВОМУ ОПИСАНИЮ*

Ханг Тхи Тхюи Нгуен[1], П. А. Мелешенко[2,3], В. А. Горлов[2], М. Е. Семенов[2,3,4], А. Ф. Клинских[3]

[1]*Institute of Technology, Vietnam National University-Ho Chi Minh City, Vietnam*
[2]*ВУНЦ ВВС "ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина",*
[3]*Воронежский государственный университет,*
[4]*Воронежский государственный архитектурно-строительный университет*

Поступила в редакцию 02.10.2014 г.

Аннотация: в работе рассмотрено спонтанное излучение Вавилова-Черенкова в рамках различных подходов: классического Тамма-Франка, подхода Ферми, основанного на эффекте торможения заряженной частицы полем, а также квантово-механического подхода. Анализ этих подходов позволяет сделать важный вывод о том, что спонтанное излучение Вавилова-Черенкова является следствием взаимодействия заряженной частицы с электромагнитным вакуумом, модифицированным средой, а не с самой средой. Использование квантово-механического подхода позволяет также рассмотреть эффект Вавилова-Черенкова в случае движения заряженной частицы на фоне сжатого электромагнитного вакуума и получить аналитическое выражение для мощности излучения в этом случае.

Ключевые слова: излучение Вавилова-Черенкова, электромагнитный вакуум, сжатые состояния.

CHERENKOV RADIATION: FROM CLASSICAL PATTERN TO QUANTUM DESCRIPTION

Hang T.T. Nguyen, P. A. Meleshenko, V. A. Gorlov, M. E. Semenov, A. F. Klinskikh

Abstract: in this paper we consider the spontaneous Cherenkov radiation in the frame of different approaches. Namely, we consider the standard results by Frank and Tamm, Fermi results based on the radiative attenuation of the charged particle and results of quantum-mechanical calculations. Quantum-mechanical approach allows to make an important conclusion on the nature of Cherenkov radiation, namely, the Cherenkov radiation is the result of interaction of the charged particle with the electromagnetic vacuum which is changed by a medium, nor the interaction with a medium. In the frame of a quantum-mechanical approach it is possible to obtain the analytic expression for Cherenkov radiated power in the case of squeezed state of electromagnetic vacuum.

Keywords: Cherenkov radiation, electromagnetic vacuum, squeezed states.

1. ВВЕДЕНИЕ

Эффект Вавилова-Черенкова [1], [2] до настоящего времени сохраняет свою актуальность в связи с различными направлениями применения данного эффекта, о чем свидетельствует обширный список литературы по данной тематике (см. [2]–[5] и сопутствующие ссылки).

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-08-00532-а)

Спонтанный эффект Вавилова-Черенкова получил теоретическое обоснование в работах И.Е. Тамма и И.М. Франка. Выражение для интенсивности излучения было получено путем решения уравнений классической электродинамики в среде. При этом интенсивность излучения определялась как поток вектора Пойнтинга через цилиндрическую поверхность, окружающую траекторию заряженной частицы. В настоящее время данная задача имеет важное методическое значение, поскольку многие ее выводы, по крайней мере, качественно, могут быть обобщены на более сложные виды движения заряда.

Задача об излучении диполя движущегося прямолинейно и равномерно со сверхсветовой скоростью была решена в 1942 г. И.М. Франком. Кроме того, им был разобран случай, когда электрический диполь, величина которого гармонически зависит от времени, движется в среде со скоростью, превышающей фазовую скорость света в этой среде. Им впервые было введено понятие аномального эффекта Доплера. Большое количество работ было посвящено и другим аспектам эффекта Вавилова-Черенкова. Они касаются обобщения на случай магнитных сред, детального анализа излучения в кристаллах, роли границ и т.д.

Классическая теория спонтанного эффекта Вавилова-Черенкова достаточно точна, и квантовое рассмотрение, впервые проведенное В.Л. Гинзбургом [2], может быть полезным лишь с методической точки зрения. Иная ситуация возникает при описании эффекта Доплера. Квантовое описание, в отличие от классического, дает более полное понимание явление, а именно, при движении частицы (которая имеет внутренние степени свободы) с некоторой собственной частотой излучения в области нормального эффекта Доплера осуществляется за счет перехода с более высокого энергетического уровня на более низкий. В области же аномального эффекта Доплера, напротив, при излучении фотона происходит возбуждение частицы за счёт кинетической энергии поступательного движения. Квантовый подход оказывается наиболее полезным при рассмотрении движения заряженной частицы в диэлектрической среде в поле внешней электромагнитной волны. При этом излучение в данном случае носит вынужденный характер Преимущество квантового подхода перед классическим в данных задачах очевидно, поскольку квантовый подход дает более глубокое понимание физической сущности явлений.

Создание мощных источников электромагнитного излучения положило начало широким исследованиям, основной целью которых являлось изучение электродинамических эффектов в интенсивном поле. Важное место среди них занимают исследования в области сжатых состояний света [6]–[8]. Эти состояния обобщают хорошо известный класс когерентных состояний и характеризуются тем, что неопределенность одной из канонических переменных электромагнитного поля меньше, чем в обычном когерентном состоянии.

Сжатые состояния впервые обсуждались Столером [9], [10], предложившим для их изучения изящный математический аппарат. Теоретические работы в области сжатых состояний света показывают, что сжатие должно проявляться в большом числе ситуаций, в которых свет взаимодействует с нелинейной средой. Примерами являются резонансная флуоресценция, генерация гармоник, четырехволновое смешивание, параметрическое усиление и т.д. [6]. Экспериментальные исследования сжатых состояний были инициированы в 1977 г. наблюдением антигруппировки фотонов при резонансной флуоресценции одиночных атомов. Использование сжатых состояний предоставляет возможность получать более точные результаты измерений некоторых величин, чем обычно ожидается из принципа неопределенностей Гейзенберга. На сегодняшний день применение сжатых состояний является важным в таких областях, как оптическая передача информации, интерферометрия, нелинейная оптика, детектирование гравитационных волн и т.д. (см. [6]–[8] и сопутствующие ссылки). Следует отметить также, что сжатые состояния являются объектами чисто квантовой природы. В связи с этим для описания движения заряженной частицы на фоне сжатого вакуума классическая теория не подходит, поскольку сжатый вакуум является особым состоянием электромагнитного поля, и понимание физической природы явлений, происходящих в нем возможно лишь с позиции квантовой теории поля.

Следует отметить, что наряду с академической стороной вопроса, рассматриваемые задачи имеют важное прикладное значение, а именно создание новых источников электромагнитного излучения (лазеров на свободных электронах). Сюда же может быть отнесена задача об излучении, возникающем при движении заряженной частицы в области с топологической особенностью (частица в условиях эффекта Ааронова-Бома) [11].

2. ЭФФЕКТ ВАВИЛОВА-ЧЕРЕНКОВА

При движении заряженной частицы в среде со скоростью, превышающей фазовую скорость света в этой среде, возникает электромагнитное излучение с непрерывным спектром и со специфическим угловым распределением. Данное явление получило название спонтанного излучения Вавилова-Черенкова, которое впервые было экспериментально обнаружено П. А. Черенковым в 1934 г. при исследовании люминесценции растворов солей урана, возбуждаемых гамма-лучами [1].

С теоретической точки зрения, существует несколько способов описания данного эффекта:

- Метод Тамма-Франка [2], основанный на решении уравнений классической электродинамики в среде. Интенсивность при этом определяется как поток вектора Пойнтинга через цилиндрическую поверхность, окружающую траекторию заряда.
- Метод Ферми [12], состоящий в определении силы, тормозящей заряд при его движении. Работа этой силы в прозрачной среде определяет излучаемую энергию.
- Квантово-механическое рассмотрение, заключающееся в том, что излучаемая энергия вычисляется на основе теории возмущений в непрерывном спектре.

В случае спонтанного эффекта Вавилова-Черенкова излучение на частоте ω имеет место только в том случае, когда скорость заряженной частицы v превышает фазовую скорость света в рассматриваемой среде, т.е.

$$v > \frac{c}{n(\omega)},$$

где $n(\omega)$ — показатель преломления света в среде на частоте ω. Специфичность углового распределения излучения состоит в том, что волновой вектор излучаемых волн $\vec{k}$ образует со скоростью $\vec{v}$ угол θ_0, причем

$$\cos(\theta_0) = \frac{c}{v \cdot n(\omega)}. \tag{1}$$

Остановимся вкратце на указанных подходах.

2.1 Метод Тамма-Франка

Поскольку интерес представляет видимое излучение, то среду можно рассматривать макроскопически и применять для описания уравнения классической электродинамики.

Уравнения поля имеют стандартный вид:

$$\nabla^2 \vec{A}_\omega + \frac{\omega^2 n^2}{c^2} \vec{A}_\omega = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}(\omega), \tag{2}$$

где $\vec{A}_\omega$ определяется из

$$\vec{A} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \vec{A}_\omega e^{i\omega t} d\omega.$$

При этом компоненты поля $\vec{H}_\omega$ и $\vec{E}_\omega$определяются стандартным образом:

$$\vec{H}_\omega = \left[\vec{\nabla} \times \vec{A}_\omega\right], \quad \vec{E}_\omega = -\frac{ic}{\omega n^2(\omega)}\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_\omega\right) - \frac{i\omega}{c}\vec{A}_\omega.$$

Рассмотрим электрон, движущийся в среде, характеризуемой показателем преломления $n(\omega)$, с постоянной скоростью $\vec{v}_0$, направленной по оси z. Такому электрону отвечает плотность тока $\vec{j}$, определяемая компонентами

$$j_x = j_y = 0, \quad j_z = qv_0\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z - v_0 t).$$

Раскладывая j_z на Фурье-компоненты, вводя цилиндрические координаты r, φ, z, подставляя полученные выражения в (1) и полагая

$$A_r = A_\varphi = 0, \quad A_z = \frac{q}{2c}a(r)\exp\left(-i\frac{\omega\, z}{v_0}\right),$$

получаем уравнение на $a(r)$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial a}{\partial r} + s^2 a = -\frac{2}{\pi\, r}\delta(r), \tag{3}$$

где

$$s^2 = \frac{\omega^2}{v_0^2}\left(\beta^2 n^2 - 1\right) = -\sigma^2, \quad \beta = \frac{v_0}{c}.$$

Таким образом, функция a должна удовлетворять уравнению Бесселя

$$\frac{\partial^2 a}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial a}{\partial r} + s^2 a = 0 \tag{4}$$

всюду за исключением $r = 0$.

Необходимо различать два возможных случая. Первый отвечает малым скоростям движения электрона, для которого $\beta n < 1$, $s^2 < 0$, и, следовательно, $\sigma^2 = -s^2 > 0$, т.е. σ является действительной величиной. В этом случае решение (4) представляет собой функцию Ханкеля первого рода:

$$a(r) = iH_0^{(1)}(i\sigma\, r).$$

В этом случае имеется экспоненциальное затухание поля с расстоянием. Следовательно, излучение отсутствует.

Если скорость электрона настолько велика, что $\beta\, n$ становится больше единицы, то общее решение (3) и (4) дает на бесконечности цилиндрическую волну. В случае расходящейся волны от оси z, получаем следующее решение:

$$a(r) = -iH_0^{(2)}(s\, r),\ \omega > 0.$$

Пользуясь асимптотическим поведением $H_0^{(2)}$, получаем:

$$A_z(\omega) = -\frac{q}{c\sqrt{2\pi\, s\, r}}\exp\left[i\omega\left(t - \frac{z\cos\theta + r\sin\theta}{u}\right) + i\frac{3\pi}{4}\right],$$

где угол θ определяется выражением (1), а $u = \frac{c}{n(\omega)}$.

Исходя из общей формулы для энергии, излучаемой электроном через поверхность цилиндра длины l (ось совпадает с линией движения электрона),

$$W = 2\pi\, r\, l\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}\times\vec{H}\right]_r dt,$$

получаем для рассматриваемого случая:

$$W = \frac{q^2 l}{c^2} \int\limits_{\beta\, n(\omega)>1} \omega \left[1 - \frac{1}{\beta^2 n^2(\omega)}\right] d\omega. \tag{5}$$

Это и есть "классическая" формула Тамма-Франка для мощности спонтанного излучения Вавилова-Черенкова.

2.2 Метод Ферми

Излучение электромагнитных волн связано с определенной потерей энергии движущейся частицей. Эта потеря составляет часть полного торможения. Для вывода выражения, определяющего торможение частицы собственным полем, будем исходить из полных уравнений Максвелла [13]:

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{H}) = 0, \quad \left[\vec{\nabla} \times \vec{E}\right] = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \left(\vec{\nabla} \cdot \widehat{\varepsilon}\,\vec{E}\right) = 4\pi\rho, \quad \left[\vec{\nabla} \times \vec{H}\right] = \frac{1}{c}\frac{\partial \widehat{\varepsilon}\,\vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}. \tag{6}$$

В данном случае распределение сторонних зарядов и токов дается выражениями

$$\rho = q\delta\left(\vec{r} - \vec{v}t\right), \quad \vec{j} = q\vec{v}\delta\left(\vec{r} - \vec{v}t\right).$$

Введение скалярного φ и векторного $\vec{A}$ потенциалов, а также использование калибровки Лоренца, приводят к системе уравнений на φ и $\vec{A}$:

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{\widehat{\varepsilon}}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} q\vec{v}\delta\left(\vec{r} - \vec{v}t\right),$$

$$\widehat{\varepsilon}\left(\nabla^2 \varphi - \frac{\widehat{\varepsilon}}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right) = -4\pi\, q\delta\left(\vec{r} - \vec{v}t\right).$$

Разложим φ и $\vec{A}$ в интегралы Фурье по координатам. После подстановки разложений в уравнения для φ и $\vec{A}$, а также введения обозначения $\omega = \vec{k}\vec{v} = k_x v$ (ось x направлена вдоль скорости частицы), получим следующие выражения для скалярного и векторного потенциалов:

$$\varphi_{\vec{k}} = \frac{4\pi q}{\varepsilon(\omega)} \frac{1}{k^2 - \omega^2 \varepsilon(\omega)/c^2} e^{-i\omega t},$$

$$\vec{A}_{\vec{k}} = \frac{4\pi q}{c} \frac{1}{k^2 - \omega^2 \varepsilon(\omega)/c^2} e^{-i\omega t}.$$

При этом

$$\vec{E}_{\vec{k}} = \frac{i\omega}{c}\vec{A}_{\vec{k}} - i\vec{k}\varphi_{\vec{k}}, \quad \vec{E} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \vec{E}_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{r}} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}.$$

Потеря энергии движущейся частицей есть не что иное, как работа, производимая обратной силой торможения $q\vec{E}$, действующей на частицу со стороны создаваемого ею поля.

Волновой вектор и частота электромагнитной волны, распространяющейся в прозрачной среде, связаны соотношением $k = n\omega/c$, где $n = \sqrt{\varepsilon}$ – вещественный показатель преломления. С другой стороны, частота Фурье-компоненты поля равномерно движущейся в среде частицы связана с x-компонентой волнового вектора соотношением $\omega = k_x v$. Для того, чтобы такая компонента представляла собой свободно распространяющуюся волну, соотношения $k = n\omega/c$ и $k_x = \omega/v$ не должны противоречить друг другу. Поскольку должно выполняться неравенство $k > k_x$, то необходимым является выполнение условия $v > c/n(\omega)$. Таким образом, излучение с частотой ω происходит, если скорость частицы превосходит фазовую скорость волн данной частоты в этой среде.

Потеря энергии с единицы пути в интервале частот $d\omega$ дается выражением:

$$dF = -d\omega \frac{iq^2}{\pi} \sum \omega \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{v^2 \varepsilon} \right) \int \frac{sds}{s^2 - \omega^2 \left(\frac{\varepsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2} \right)},$$

где знак Σ означает, что необходимо взять сумму выражений с $\omega = \pm |\omega|$, $s = \sqrt{k_y^2 + k_z^2}$. Введем новую переменную

$$\xi = s^2 - \omega^2 \left(\frac{\varepsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2} \right),$$

тогда

$$dF = -d\omega \frac{iq^2}{2\pi} \sum \omega \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{v^2 \varepsilon} \right) \int \frac{d\xi}{\xi}.$$

При интегрировании вдоль вещественной оси ξ особая точка $\xi = 0$ должна быть обойдена определенным образом. Направление обхода определяется тем, что, хотя мы и считаем $\varepsilon(\omega)$ вещественной величиной (прозрачная среда), но в действительности она обладает некоторой малой мнимой частью, положительной при $\omega > 0$ и отрицательной при $\omega < 0$. Таким образом, ξ обладает малой отрицательной (положительной) мнимой частью и интегрирование должно производиться по пути, проходящему под (над) вещественной осью. Именно эти обходы полюсной особенности и дают вклад в dF, а вещественные части обнуляются при взятии суммы. Произведя обходы указанным образом, получим

$$\sum \omega \int \frac{d\xi}{\xi} = \omega \left(\int\limits_{\cup} \frac{d\xi}{\xi} - \int\limits_{\cap} \frac{d\xi}{\xi} \right) = 2\pi\, i\omega.$$

Таким образом, приходим к окончательному выражению:

$$dF = \frac{q^2}{c^2} \left(1 - \frac{c^2}{v^2 n^2(\omega)} \right) \omega\, d\omega, \tag{7}$$

которое определяет интенсивность излучения в частотном интервале $d\omega$.

2.3 Квантово-механический подход

Процесс излучения может быть представлен в виде диаграммы первого порядка по взаимодействию с электромагнитным полем. В нерелятивистском приближении гамильтониан заряженной частицы в электромагнитном поле имеет стандартный вид [14]:

$$\widehat{H} = \frac{1}{2m} \left(\widehat{\vec{p}} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 - q\varphi. \tag{8}$$

Накладывая условия калибровки $\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) = 0$, $\varphi = 0$, получаем

$$\widehat{H} = \widehat{H}_0 + \widehat{V}_{int}, \quad \widehat{H}_0 = \frac{\widehat{\vec{p}}^{\,2}}{2m}, \quad \widehat{V}_{int} = -\frac{q}{mc} \widehat{\vec{p}} \vec{A} + \frac{q^2}{2mc^2} \vec{A}^2.$$

Как известно, эффекты, связанные с взаимодействием электромагнитного поля с заряженной частицей, пропорциональны постоянной тонкой структуры и, следовательно, могут быть описаны в рамках теории возмущений. Взаимодействие электрона с электромагнитным полем дается следующим выражением:

$$\widehat{V}_{int} = -\frac{q}{mc}\widehat{\vec{p}}\vec{A}. \tag{9}$$

В связи с тем, что при квантовом рассмотрении приходится оперировать понятиями "вакуум", "излучение фотона" и т.п., которые, как известно, являются объектами квантовой теории поля, необходимо векторный потенциал $\vec{A}$ заменить на вторично квантованный оператор $\widehat{\vec{A}}$, который имеет вид:

$$\widehat{\vec{A}} = \sqrt{\frac{2\pi\,\hbar c^2}{V\omega_{\vec{k}}n^2}}\left(\vec{e}^{\,*}_{\vec{k}\sigma}e^{-i\vec{k}\vec{r}}\widehat{a}^{+}_{\vec{k}\sigma} + \vec{e}_{\vec{k}\sigma}e^{i\vec{k}\vec{r}}\widehat{a}_{\vec{k}\sigma}\right), \tag{10}$$

где V — объем, занимаемый полем, $\omega_{\vec{k}}$ и $\vec{e}_{\vec{k}\sigma}$ — соответственно частота и поляризация фотона с волновым вектором $\vec{k}$, $\widehat{a}^{+}_{\vec{k}\sigma}$ и $\widehat{a}_{\vec{k}\sigma}$ — операторы рождения и уничтожения фотона с волновым вектором $\vec{k}$ и поляризацией σ соответственно.

Отметим, что оператор $\widehat{\vec{A}}$ имеет ненулевые матричные элементы лишь для переходов с изменением числа фотонов на единицу. Таким образом, в первом порядке теории возмущений будут иметь место только однофотонные процессы.

Вероятность перехода в единицу времени может быть записана с помощью "золотого" правила Ферми [14]:

$$dW_{i\to f} = \frac{2\pi}{\hbar}\left|\langle f|\,\widehat{V}_{int}\,|i\rangle\right|^2\rho_f,$$

где ρ_f — плотность конечных состояний электрона и фотона, которая имеет вид:

$$\rho_f = \delta\left(\hbar\omega + \frac{\hbar^2k_f^2}{2m} - \frac{\hbar^2k_i^2}{2m}\right)\frac{d\vec{k}_f}{(2\pi)^3}\frac{V d\vec{k}}{(2\pi)^3};$$

$\hbar\vec{k}_i$ и $\hbar\vec{k}_f$ — импульсы электрона в начальном и конечном состояниях соответственно; $\hbar\vec{k}$ — импульс испущенного фотона; $|i\rangle = |0\rangle\left|e^{i\vec{k}_i\vec{r}}\right\rangle$ — начальное состояние системы (плоская волна, отвечающая электрону в начальном состоянии, и состояние электромагнитного вакуума с числом фотонов равным нулю); $|f\rangle = |1\rangle\left|e^{i\vec{k}_f\vec{r}}\right\rangle$ — конечное состояние системы (плоская волна, отвечающая электрону в конечном состоянии, и состояние электромагнитного вакуума с числом фотонов равным единице).

Вычисляя матричный элемент $\langle f|\,\widehat{V}_{int}\,|i\rangle$, а также, суммируя по поляризациям фотона, легко может быть получено следующее выражение для вероятности перехода в единицу времени:

$$dW_{i\to f} = \frac{q^2}{2\pi\,m^2\omega\,n^2}\left|[\vec{p}_i\times\vec{n}]\right|^2\delta\left(\hbar\omega + \frac{\hbar^2\left(\vec{k}_i-\vec{k}\right)^2}{2m} - \frac{\hbar^2k_i^2}{2m}\right)d\vec{k}. \tag{11}$$

Здесь $\vec{n} = \vec{k}\big/k$, кроме того, в данном выражении учтен закон сохранения импульса, именно, $\vec{k} = \vec{k}_i - \vec{k}_f$. Пусть θ – угол между направлением импульса электрона $\vec{p}_i$ и направлением волнового вектора $\vec{k}$ излученного фотона, тогда, пренебрегая процессом отдачи (пренебрегаем слагаемым $\hbar^2k^2/2m$) и учитывая, что $k = \omega\,n/c$, можно записать:

$$dW_{i\to f} = \frac{1}{\hbar}\frac{q^2}{c^2}\frac{p_i}{m}\delta\left(\cos\theta - \frac{mc}{p_i n(\omega)}\right)\left(1-\cos^2\theta\right)\,d\left(\cos\theta\right)d\omega.$$

Производя интегрирование по угловой переменной и учитывая, что $p_i/m = v_i$, т.е. начальной скорости электрона, окончательно для $dW_{i\to f}$ получим следующее выражение:

$$dW_{i\to f} = \frac{1}{\hbar}\frac{q^2 v_i}{c^2}\left[1 - \left(\frac{c}{v_i n(\omega)}\right)^2\right] d\omega.$$

Умножая $dW_{i\to f}$ на энергию излученного кванта $\hbar\omega$, получим спектральную плотность мощности излучения, возникающего при движении заряженной частицы в среде с показателем преломления $n(\omega)$, в интервале частот $d\omega$:

$$dP_{rad} = \frac{q^2 v_i}{c^2}\left[1 - \left(\frac{c}{v_i n(\omega)}\right)^2\right] d\omega. \tag{12}$$

Это и есть формула для мощности спонтанного излучения Вавилова-Черенкова.

Таким образом, в рамках квантово-механического подхода можно дать следующую интерпретацию эффекта Вавилова-Черенкова: спонтанное излучение Вавилова-Черенкова является следствием взаимодействия заряженной частицы с электромагнитным вакуумом, измененным средой, а не с самой средой. Присутствие среды отражается только на виде волнового уравнения для векторного потенциала

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{n^2(\omega)}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = 0.$$

Это, в свою очередь, означает, что присутствие среды на фоне электромагнитного вакуума изменяет саму структуру вакуума.

В следующем разделе будет рассмотрено излучение Вавилова-Черенкова на фоне сжатого электромагнитного вакуума. В данном случае применение квантово-механического подхода является единственно возможной техникой, поскольку сжатые состояния электромагнитного вакуума являются объектами сугубо квантовой природы. Кроме того, следует отметить, что эффект Вавилова-Черенкова в случае сжатых состояний вакуума уже не носит спонтанного характера, а является вынужденным.

3. ЭФФЕКТ ВАВИЛОВА-ЧЕРЕНКОВА НА ФОНЕ СЖАТОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ВАКУУМА

Для описания излучения Вавилова-Черенкова в случае движения заряженной частицы на фоне сжатого электромагнитного вакуума целесообразно будет напомнить основные моменты теории сжатых состояний электромагнитного поля [6].

3.1 Сжатые состояния электромагнитного вакуума

Рассмотрим монохроматическую световую волну, задаваемую выражением

$$\widehat{\vec{E}}(\vec{r},t) = L(\omega)\left(\widehat{a}^{+}e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}} + \widehat{a}e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}}\right)\vec{e}.$$

Определим два новых оператора

$$\widehat{Q} = \widehat{a}^{+} + \widehat{a}, \quad \widehat{P} = i\left(\widehat{a}^{+} - \widehat{a}\right).$$

Из известных коммутационных соотношений для операторов $\widehat{a}$ и $\widehat{a}^{+}$ следует, что

$$\left[\widehat{Q},\widehat{P}\right] = 2i.$$

Тогда электрическое поле может быть представлено в виде:

$$\widehat{\vec{E}}\left(\vec{r},t\right)=L\left(\omega\right)\left(\widehat{Q}\cos\left(\vec{k}\vec{r}-\omega\, t\right)-\widehat{P}\sin\left(\vec{k}\vec{r}-\omega\, t\right)\right)\,\vec{e}.$$

Следовательно, $\widehat{Q}$ и $\widehat{P}$ являются также амплитудами квадратур, на которые может быть разложено электрическое поле.

Напомним, что характерная особенность когерентного состояния, включая вакуумное состояние, состоит в том, что дисперсия квадратурных амплитуд $\widehat{Q}$ и $\widehat{P}$ равны между собой,

$$\Delta Q=1,\quad \Delta P=1,$$

так что произведение неопределенностей имеет минимальное значение. Для такого состояния распределение Q и P в фазовом пространстве обладает круговой симметрией, а элементарная ячейка является кругом. Если существует состояние, для которого Q или P имеет дисперсию ниже единицы ценой увеличения дисперсии другой величины, тогда соответствующее распределение в фазовом пространстве приобретает форму эллипса, вытянутого вдоль одной из осей, а соответствующее состояние называется квадратурно-сжатым состоянием.

Другой тип сжатия – сжатие по флуктуациям числа фотонов. Этот тип сжатия реализуется в тех состояниях, в которых неопределенность числа фотонов ниже, чем в когерентных состояниях $\sqrt{\langle n\rangle}$. Неопределенность Δn может быть меньше $\sqrt{\langle n\rangle}$, но только за счет увеличения фазовой неопределенности. Свет, сжатый по флуктуациям числа фотонов, имеет ряд других наименований, таких как субпуассоновский свет, "бесшумный" свет и т.д.

Согласно Столеру [9], [10] сжатое состояние определяется как собственное состояние некоторого оператора $\widehat{b}$, связанного с операторами рождения и уничтожения $\widehat{a}^{+}$ и $\widehat{a}$ посредством соотношений

$$\widehat{b}=\mu\widehat{a}+\nu\widehat{a}^{+},\quad \widehat{b}^{+}=\nu^{*}\widehat{a}+\mu^{*}\widehat{a}^{+}, \tag{13}$$

где

$$|\mu|^{2}-|\nu|^{2}=1,\quad \mu\equiv chr,\quad \nu\equiv e^{i\vartheta}shr. \tag{14}$$

Выражая операторы $\widehat{a}^{+}$ и $\widehat{a}$ через $\widehat{b}^{+}$ и $\widehat{b}$, получим

$$\widehat{a}=\mu^{*}\widehat{b}-\nu\widehat{b}^{+},\quad \widehat{a}^{+}=\mu\widehat{b}^{+}-\nu^{*}\widehat{b}.$$

Подобно операторам $\widehat{a}^{+}$ и $\widehat{a}$ операторы $\widehat{b}^{+}$ и $\widehat{a}$ удовлетворяют коммутационному соотношению

$$\left[\widehat{b},\widehat{b}^{+}\right]=1.$$

При вычислениях со сжатыми состояниями важную роль играет оператор унитарного преобразования когерентного состояния в сжатое, введенный Столером:

$$\widehat{D}\left(\eta\right)=\exp\left(\frac{1}{2}\eta^{*}\left(\widehat{a}\right)^{2}-\frac{1}{2}\eta\left(\widehat{a}^{+}\right)^{2}\right), \tag{15}$$

где $\eta=re^{i\vartheta}$ – произвольное комплексное число.

Состояние, полученное в результате действия оператора сжатия $\widehat{D}\left(\eta\right)$ на когерентное состояние $|\alpha\rangle$, было изучено Йеном, который назвал его двухфотонным когерентным состоянием [6]. Для него используется обозначение

$$\left|[\eta,\alpha]\right\rangle\equiv\widehat{D}\left(\eta\right)\left|\alpha\right\rangle.$$

Когерентное состояние $|\alpha\rangle$ может быть получено при действии оператора сдвига $\widehat{T}\left(\alpha\right)$ на вакуумное состояние, поэтому

$$\left|[\eta,\alpha]\right\rangle\equiv\widehat{D}\left(\eta\right)\widehat{T}\left(\alpha\right)\left|0\right\rangle. \tag{16}$$

С другой стороны, сжатое состояние можно создать, действуя двумя операторами $\widehat{D}(\eta)$ и $\widehat{T}(\alpha)$ в обратном порядке. Результирующее состояние

$$|(\alpha,\eta)\rangle \equiv \widehat{T}(\alpha)\,\widehat{D}(\eta)\,|0\rangle\,, \tag{17}$$

было названо идеальным сжатым состоянием из-за своих простых свойств. Поскольку $\widehat{D}(\eta)$ и $\widehat{T}(\alpha)$ не коммутируют, то два состояния $|(\alpha,\eta)\rangle$ и $|[\eta,\alpha]\rangle$ различны. Однако связь между ними может быть получена из ряда операторных тождеств, которые в рамках данной работы нас не интересуют. В дальнейшем будем рассматривать только идеальное сжатое состояние.

Рассмотрим теперь развитие во времени идеального сжатого состояния. Оказывается, что состояние $|(\alpha,\eta)(t)\rangle$сохраняет свой смысл как сжатого состояния, изменяются лишь коэффициенты μ и ν

$$\mu(t) = \mu\, e^{i\omega\, t}, \quad \nu(t) = \nu\, e^{i\omega\, t}$$

при сохранении соотношения (14).

Среднее число фотонов в идеальном сжатом состоянии $|(\alpha,\eta)\rangle$ определяется следующим образом

$$\langle(\alpha,\eta)|\,\widehat{a}^{+}\widehat{a}\,|(\alpha,\eta)\rangle = |\alpha|^2 + |\nu|^2\,.$$

Квадрат дисперсии сжатого состояния равен

$$D^2(t) = \frac{\hbar}{2\omega}\left[|\mu|^2 + |\nu|^2 - 2\,|\mu|\,|\nu|\cos(\vartheta + 2\omega\, t)\right].$$

Таким образом, дисперсия принимает минимальные значения

$$D^2_{\min} = \frac{\hbar}{2\omega}\,(|\mu| - |\nu|)^2$$

два раза за период в моменты времени, определяемые соотношением $\vartheta + 2\omega\, t = 2n\pi$ и максимальные значения

$$D^2_{\max} = \frac{\hbar}{2\omega}\,(|\mu| + |\nu|)^2$$

также два раза за период при $\vartheta + 2\omega\, t = (2n+1)\,\pi$.

Обычно сжатое состояние характеризуется коэффициентом сжатия

$$K = \sqrt{\frac{D_{\max}}{D_{\min}}} = |\mu| + |\nu|\,.$$

Этот коэффициент меняется от единицы для когерентного состояния ($|\nu| = 0$) до больших значений для сильно сжатых состояний ($|\nu| \to \infty$). Однако имеются энергетические ограничения на этот коэффициент. При заданном числе фотонов N величина $|\nu|$ будет максимальной при $|\alpha|^2 = 0$, т.е. в состоянии сжатого вакуума. Тогда

$$|\nu|^2 = N, \quad K_{\max} = \sqrt{N+1} + \sqrt{N}.$$

Это и есть максимально достижимое значение коэффициента сжатия. При больших значениях числа фотонов $N >> 1$ приближенно имеем

$$K_{\max} \approx 2\sqrt{N}.$$

Следует иметь в виду, что сжатый вакуум имеет мало общего с вакуумным (наинизшим) состоянием. Именно, сжатый вакуум может быть высоковозбужденным, высокоэнергетическим состоянием. При этом, для описания состояния сжатого вакуума необходимо использовать только аппарат квантовой теории поля.

3.2 Эффект Вавилова-Черенкова на фоне сжатого электромагнитного вакуума

Рассмотрим теперь эффект Вавилова-Черенкова возникающий при движении заряженной частицы в среде с показателем преломления $n\left(\omega\right)$ на фоне сжатого электромагнитного вакуума. В качестве основной техники будем использовать нестационарную теорию возмущений, а также теорию представления Гейзенберга [14].

Напомним, что в случае свободного движения частицы операторы импульса и координаты в представлении Гейзенберга связаны с соответствующими операторами в представлении Шредингера с помощью соотношений

$$\widehat{\vec{p}}^{H}=\widehat{\vec{p}}^{S},\quad \widehat{\vec{r}}^{H}\equiv\widehat{\vec{r}}^{H}\left(t\right)=\widehat{\vec{r}}^{S}+\frac{\widehat{\vec{p}}^{S}}{m}t.$$

При движении заряженной частицы на фоне сжатого электромагнитного вакуума будем искать не только мощность излучения, но и мощность поглощения. Иными словами, будем искать аналитические выражения для вероятностей в единицу времени любых переходов (в энергетически более высокое и в более низкое) из начального состояния заряженной частицы при ее движении в среде на фоне сжатого вакуума.

Аналогично предыдущему разделу, пусть $\left|i_q\right\rangle$ и $\left|f_q\right\rangle$ c – начальное и конечное состояния заряженной частицы соответственно. Сжатые состояния будем обозначать следующим образом:

начальное состояние электромагнитного поля моды $\vec{k}$ и поляризации σ (сжатый вакуум)

$$\left|0_{\vec{k}\sigma}\right\rangle\equiv\left|(0,\eta)_{\vec{k}\sigma}\right\rangle;$$

конечное состояние электромагнитного поля моды $\vec{k}$ и поляризации σ

$$\left|\zeta_{\vec{k}\sigma}\right\rangle\equiv\left|(\alpha,\eta')_{\vec{k}\sigma}\right\rangle.$$

С учетом указанных обозначений, амплитуда перехода в первом порядке теории возмущений (рассматриваем однофотонные процессы) записывается следующим образом

$$a_{fi}\left(t\right)=-\frac{i}{\hbar}\int\limits_0^t\left\langle f_q\right|\left\langle\zeta_{\vec{k}\sigma}\right|\widehat{V}_{int}\left(t'\right)\left|0_{\vec{k}\sigma}\right\rangle\left|i_q\right\rangle dt'=-\frac{i}{\hbar}\int\limits_0^t\left\langle f_q\right|\widehat{V}_{\vec{k}\sigma}\left(t'\right)\left|i_q\right\rangle dt',\tag{18}$$

где $\widehat{V}_{\vec{k}\sigma}\left(t'\right)=\left\langle\zeta_{\vec{k}\sigma}\right|\widehat{V}_{int}\left(t'\right)\left|0_{\vec{k}\sigma}\right\rangle$. Подразумеваем также, что время t устремлено к бесконечности.

Возведем в квадрат модуль амплитуды (18) и просуммируем по всем возможным состояниям $\left|\zeta_{\vec{k}\sigma}\right\rangle$ и $\left|f_q\right\rangle$

$$\sum_{f_q,\,\zeta_{\vec{k}\sigma}}a^*_{fi}\left(t\right)a_{fi}\left(t\right)=\sum_{f_q,\,\zeta_{\vec{k}\sigma}}\frac{1}{\hbar^2}\int\limits_0^t\int\limits_0^t\left\langle i_q\right|\widehat{V}^+_{\vec{k}\sigma}\left(t_1\right)\left|f_q\right\rangle\left\langle f_q\right|\widehat{V}_{\vec{k}\sigma}\left(t_2\right)\left|i_q\right\rangle dt_1dt_2=$$

$$=\sum_{\zeta_{\vec{k}\sigma}}\frac{1}{\hbar^2}\int\limits_0^t\int\limits_0^t\left\langle i_q\right|\widehat{V}^+_{\vec{k}\sigma}\left(t_1\right)\widehat{V}_{\vec{k}\sigma}\left(t_2\right)\left|i_q\right\rangle dt_1dt_2.$$

Здесь использовано условие полноты:

$$\sum_f\left|f\right\rangle\left\langle f\right|=1.$$

Оператор электромагнитного поля $\widehat{\vec{A}}$ имеет вид (10), а тот факт, что данный оператор описывает сжатое состояние электромагнитного вакуума, будет учтено при вычислении матричных элементов. Напомним также, что оператор $\widehat{V}_{int}$ имеет вид (9). В итоге получим

$$\sum_{f_q,\,\zeta_{\vec{k}\sigma}} a^*_{fi}(t)a_{fi}(t) = \left(\frac{q}{mc\hbar}\right)^2 \int_0^t \int_0^t \langle i_q| \langle 0_{\vec{k}\sigma}| \left(\widehat{\vec{p}}\widehat{\vec{A}}_{\vec{k}\sigma}\right)\left(\widehat{\vec{A}}_{\vec{k}\sigma}\widehat{\vec{p}}\right) |0_{\vec{k}\sigma}\rangle |i_q\rangle \, dt_1 dt_2. \qquad (19)$$

Упрощение матричного элемента $\langle 0_{\vec{k}\sigma}| \left(\widehat{\vec{p}}\widehat{\vec{A}}_{\vec{k}\sigma}\right)\left(\widehat{\vec{A}}_{\vec{k}\sigma}\widehat{\vec{p}}\right) |0_{\vec{k}\sigma}\rangle$может быть произведено с помощью соотношений:

$$\langle 0_{\vec{k}\sigma}| \left(\widehat{a}_{\vec{k}\sigma}\right)^2 |0_{\vec{k}\sigma}\rangle = -\mu^*\nu, \quad \langle 0_{\vec{k}\sigma}| \left(\widehat{a}^+_{\vec{k}\sigma}\right)^2 |0_{\vec{k}\sigma}\rangle = -\mu\nu^*, \quad \langle 0_{\vec{k}\sigma}| \widehat{a}^+_{\vec{k}\sigma}\widehat{a}_{\vec{k}\sigma} |0_{\vec{k}\sigma}\rangle = |\nu|^2.$$

Далее, используя хорошо известное тождество Бейкера-Кэмпбела-Хаусдорфа

$$\exp\left\{\widehat{a}+\widehat{b}\right\} = \exp\{\widehat{a}\}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\widehat{a},\widehat{b}\right]\right\}\exp\left\{\widehat{b}\right\},$$

явный вид оператора $\widehat{\vec{r}}$ в представлении Гейзенберга, производя суммирование по поляризациям фотона, производя суммирование по конечным состояниям фотона, переходя к пределу $t \to \infty$, а также умножая полученное выражение на энергию одного фотона $\hbar\omega$, получим следующее выражение для спектральной плотности мощности

$$P_{rad} = \left(1+|\nu|^2\right)\frac{q^2 v_i}{c^2}\int_0^\infty \omega\left[1-\left(\frac{\hbar\omega\, n(\omega)}{2mcv_i}+\frac{c}{n(\omega)\,v_i}\right)^2\right]\Theta\left(1-\frac{\hbar\omega\, n(\omega)}{2mcv_i}-\frac{c}{n(\omega)\,v_i}\right)d\omega +$$
$$+|\nu|^2\frac{q^2 v_i}{c^2}\int_0^\infty \omega\left[1-\left(\frac{\hbar\omega\, n(\omega)}{2mcv_i}-\frac{c}{n(\omega)\,v_i}\right)^2\right]\Theta\left(1+\frac{\hbar\omega\, n(\omega)}{2mcv_i}-\frac{c}{n(\omega)\,v_i}\right)d\omega, \qquad (20)$$

где $\Theta(x)$ – тэта-функция Хевисайда. Здесь первое слагаемое отвечает мощности излучения, а второе – мощности поглощения. Угол излучения определяется выражением:

$$\cos\theta_0 = \frac{\hbar\omega\, n(\omega)}{2mcv_i}+\frac{c}{n(\omega)\,v_i}.$$

Очевидно, что в классическом пределе ($\hbar \to 0$) для мощности излучения получаем:

$$P_{rad} = \left(1+|\nu|^2\right)\frac{q^2 v_i}{c^2}\int_0^\infty \omega\left[1-\left(\frac{c}{n(\omega)\,v_i}\right)^2\right]\Theta\left(1-\frac{c}{n(\omega)\,v_i}\right)d\omega,$$

и угол излучения

$$\cos\theta_0 = \frac{c}{n(\omega)\,v_i}.$$

Для мощности поглощения получаем:

$$P_{abs} = |\nu|^2\frac{q^2 v_i}{c^2}\int_0^\infty \omega\left[1-\left(\frac{c}{n(\omega)\,v_i}\right)^2\right]\Theta\left(1-\frac{c}{n(\omega)\,v_i}\right)d\omega.$$

Однако следует отметить, что переход к классическому пределу носит формальный характер, поскольку сам сжатый вакуум, и процесс движения заряженной частицы на фоне такого вакуума носят чисто квантовый характер. Кроме того, видно, что помимо мощности излучения возникает ненулевое слагаемое, связанное с мощностью поглощения. Данный факт связан со сложной структурой сжатого вакуума, именно с тем, что сжатый вакуум коренным образом отличается от вакуума в обычном понимании наинизшего энергетического состояния. Окончательно можно резюмировать, что излучение, обусловленное присутствием сжатого вакуума, носит вынужденный характер, тогда как взаимодействие заряженной частицы с обычным электромагнитным вакуумом, измененным средой, приводит к спонтанному излучению.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Традиционная интерпретация спонтанного эффекта Вавилова-Черенкова насчитывает свою историю со времени открытия самого эффекта и его теоретического объяснения. Стандартная интерпретация состоит в том, что заряженная частица, двигаясь в веществе, взаимодействует с ее атомами и молекулами, поляризуя их. Если скорость частицы превышает значение фазовой скорости света в данной среде, то происходит формирование атомами, расположенными на траектории движения частицы и вблизи нее, когерентного излучения. Другими словами, излучение Вавилова-Черенкова является следствием взаимодействия заряженной частицы со средой (посредством ее поляризации), причем само излучение является результатом когерентного сложения отдельных актов излучений атомами данной среды. Большинство из способов получения выражений для интенсивности непосредственно подразумевают использование такой интерпретации эффекта.

В данной работе эффект Вавилова-Черенкова рассматривается с методической точки зрения в рамках трех подходов, именно подхода Тамма-Франка, подхода Ферми и квантово-механического подхода. Использование квантово-механического подхода основывается на использовании оператора электромагнитного взаимодействия. Одним из важных выводов, которые следуют из использования квантово-механического подхода, состоит в отличной от традиционной интерпретации эффекта Вавилова-Черенкова. Именно, спонтанное излучение Вавилова-Черенкова является следствием взаимодействия заряженной частицы с электромагнитным вакуумом, измененным средой, а не с самой средой. При этом присутствие среды отражается лишь на виде волнового уравнения, которому удовлетворяет векторный потенциал поля.

В рамках квантово-механического подхода рассмотрен процесс излучения, возникающего при движении заряженной частицы на фоне сжатого электромагнитного вакуума. Полученные выражения для спектральной плотности мощности, показывают, что к основному излучению, возникающему вследствие взаимодействия заряженной частицы с обычным электромагнитным вакуумом, добавляется излучение, отвечающее взаимодействию частицы со сжатым вакуумом. При этом, процесс излучения на фоне сжатого вакуума носит вынужденный характер. Данный факт связан со сложной энергетической структурой такого объекта, а также с тем, что сжатый электромагнитный вакуум является объектом чисто квантовой природы. Это показывает, что сжатый вакуум имеет мало общего с обычным электромагнитным вакуумом, взаимодействие с которым приводит к спонтанному излучению.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Cherenkov P.A. Visible radiation produced by electrons moving in a medium with velocities exceeding that of light / P.A. Cherenkov // Physical Review. — 1937. — Vol. 52, № 4. — P. 378–379.

[2] Гинзбург В. Л. О физике и астрофизике / В. Л. Гинзбург. — М.: Бюро Квантум, 1995. — 490 с.

[3] Altschul B. Cerenkov radiation in a Lorentz-violating and birefringent vacuum / B. Altschul // Physical Review D. — 2007. — Vol. 75, № 10. — P. 105003(1–9).

[4] Gal'tsov D.V. Cerenkov radiation from moving straight strings / D.V. Gal'tsov, E.Yu. Melkumova, K. Salehi // Physical Review D. — 2007. — Vol. 75, № 10. — P. 105013(1–22).

[5] Altschul B. Absence of long-wavelength Cerenkov radiation with isotropic Lorentz and CPT violation / B. Altschul // Physical Review D. — 2014. — Vol. 90, № 2. — P. 021701(1–5).

[6] Скалли М.О. Квантовая оптика / М.О. Скалли, М.С. Зубайри. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 512 с.

[7] Storage and retrieval of a squeezed vacuum / K. Honda et al. // Physical Review Letters. — 2008. — Vol. 100, № 9. — P. 093601(1–4).

[8] Rotation of the noise ellipse for squeezed vacuum light generated via four-wave mixing / N. V. Corzo et al. // Physical Review A. — 2013. — Vol. 88, № 4. — P. 043836(1–8).

[9] Stoler D. Equivalence Classes of Minimum Uncertainty Packets / D. Stoler // Physical Review D. — 1970. — Vol. 1, № 12. — P. 3217–3219.

[10] Stoler D. Equivalence Classes of Minimum-Uncertainty Packets. II / D. Stoler // Physical Review D. — 1971. — Vol. 4, № 6. — P. 1925–1926.

[11] Radiative attenuation of the electron in the Aharonov-Bohm effect / A.F. Klinskikh, P.A. Meleshenko, A.V. Dolgikh, H.T.T. Nguyen // Il Nuovo Cimento B. — 2010. — Vol. 125, № 10. — P. 1161–1171.

[12] Fermi E. The ionization loss of energy in gases and in condensed materials / E. Fermi // Physical Review. — 1940. — Vol. 57, № 6. — P. 485–493.

[13] Ландау Л.Д. Теоретическая физика: учебное пособие в 10 т. Т. VIII. Электродинамика сплошных сред / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 656 с.

[14] Ландау Л.Д. Теоретическая физика: учебное пособие в 10 т. Т. III. Квантовая механика. Нерелятивистская теория / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. — М.: Наука, 1989. — 768 с.

REFERENCES

[1] Cherenkov P.A. Visible radiation produced by electrons moving in a medium with velocities exceeding that of light. Physical Review, 1937, Vol. 52, no. 4, pp. 378–379.

[2] Ginzburg V.L. On the physics and astrophysics. [Ginzburg V.L. O fizike i astrofizike]. Moscow: Buro Kvantum, 1995, 490 p.

[3] Altschul B. Cerenkov radiation in a Lorentz-violating and birefringent vacuum. Physical Review D., 2007, Vol. 75, no. 10, pp. 105003(1–9).

[4] Gal'tsov D.V., Melkumova E.Yu., Salehi K. Cerenkov radiation from moving straight strings. Physical Review D., 2007, Vol. 75, no. 10, pp. 105013(1–22).

[5] Altschul B. Absence of long-wavelength Cerenkov radiation with isotropic Lorentz and CPT violation. Physical Review D., 2014, Vol. 90, no. 2, pp. 021701(1–5).

[6] Scully M.O., Zubairy M.S. Quantum Optics. [Skalli M.O., Zubajri M.S. Kvantovaya optika]. Moscow.: FIZMATLIT, 2003, 512 p.

[7] Honda K. et al. Storage and retrieval of a squeezed vacuum. Physical Review Letters, 2008, Vol. 100, № 9, pp. 093601(1–4).

[8] Corzo N. V. et al. Rotation of the noise ellipse for squeezed vacuum light generated via four-wave mixing. Physical Review A, 2013, Vol. 88, no. 4, pp. 043836(1–8).

[9] Stoler D. Equivalence Classes of Minimum Uncertainty Packets. Physical Review D., 1970, Vol. 1, no. 12, pp. 3217–3219.

[10] Stoler D. Equivalence Classes of Minimum-Uncertainty Packets. II. Physical Review D., 1971, Vol. 4, no. 6, pp. 1925–1926.

[11] Klinskikh A.F., Meleshenko P.A., Dolgikh A.V., Nguyen H.T.T. Radiative attenuation of the electron in the Aharonov-Bohm effect. Il Nuovo Cimento B., 2010, Vol. 125, no. 10, pp. 1161–1171.

[12] Fermi E. The ionization loss of energy in gases and in condensed materials. Physical Review, 1940, Vol. 57, no. 6. pp. 485–493.

[13] Landau L.D., Lifshitz E.M. Electrodynamics of Continuous Media. Vol. 8. [Landau L.D., Lifshic E.M. Teoreticheskaya fizika: uchebnoe posobie v 10 t. T. VIII. E'lektrodinamika sploshnyx sred]. Moscow: FIZMATLIT, 2005, 656 c.

[14] Landau L.D., Lifshitz E.M. Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory. Vol. 3. [Landau L.D., Lifshic E.M. Teoreticheskaya fizika: uchebnoe posobie v 10 t. T. III. Kvantovaya mexanika. Nerelyativistskaya teoriya]. Moscow: Nauka, 1989, 768 p.

Ханг Тхи Тхюи Нгуен, кандидат физико-математических наук, преподаватель кафедры физики, Институт технологий, Вьетнамский национальный университет, Хо Ши Мин, Вьетнам
E-mail: hangthuynguyen2001@yahoo.com

Hang Thi Thuy Nguyen, PhD, assistant professor, Physics Department, Institute of Technology, Vietnam National University, Ho Chi Minh City, Vietnam
E-mail: hangthuynguyen2001@yahoo.com

Мелешенко Петр Александрович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры 122 средств связи (и авиационных комплексов связи) ВУНЦ ВВС "ВВА им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина"; доцент кафедры цифровых технологий Воронежского государственного университета, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: melechp@yandex.ru

Meleshenko Peter A., PhD, docent, Communication Department, Zhukovsky-Gagarin Air Force Academy; Digital Technologies Department, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: melechp@yandex.ru

Горлов Владимир Александрович, кандидат физико-математических наук, преподаватель кафедры 206 математики ВУНЦ ВВС "ВВА им. проф. Н.Е.Жуковского и Ю.А. Гагарина", Воронеж, Российская Федерация
E-mail: gorlov_v_a@mail.ru

Gorlov Vladimir A., PhD, assistant professor, Mathematics Department, Zhukovsky-Gagarin Air Force Academy, Voronezh, Russian Federation
E-mail: gorlov_v_a@mail.ru

Семенов Михаил Евгеньевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры 11 теоретической гидрометеорологии ВУНЦ ВВС "ВВА им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина"; профессор кафедры цифровых технологий Воронежского государственного университета; профессор кафедры математики Воронежского государственного архитектурно-строительного университета, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: mkl150@mail.ru

Semenov Mikhail E., Theoretical Hydrometeorology Department, Zhukovsky-Gagarin Air Force Academy; Digital Technologies Department, Voronezh State University, Mathematics Department, Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering, Voronezh, Russian Federation
E-mail: mkl150@mail.ru

Клинских Александр Федотович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой общей физики Воронежского государственного университета
E-mail: 2000afk@gmail.com

Klinskikh Alexander F., General Physics Department, Voronezh State University, professor, Head of Department, Voronezh, Russian Federation
E-mail: 2000afk@gmail.com