УДК 535.218

КЛАССИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НАМАГНИЧЕНИЯ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ ЛИНЕЙНО ПОЛЯРИЗОВАННЫМ СВЕТОВЫМ ИМПУЛЬСОМ

С. С. Мармо

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 19.09.2014 г.

Аннотация: анализ пространственно-временной симметрии процесса намагничения показывает, что линейно поляризованная немонохроматичная волна наводит в анизотропной среде медленно меняющийся (не осциллирующий на частоте порядка несущей) магнитный момент — обратный эффект Фарадея в линейном поле. В рамках классической модели анизотропных гармонических осцилляторов проведен расчет магнитного момента, наводимого световыми импульсами с экспоненциальной, синусоидальной или гауссовой огибающими. Во всех трех случаях магнитный момент имеет медленную составляющую, скорость изменения которой не зависит от несущей частоты, а определяется крутизной огибающей импульса. Тем самым, модельный расчет подтверждает общий результат феноменологического анализа.

Ключевые слова: обратный эффект Фарадея, немонохроматичная световая волна, анизотропные среды.

A CLASSICAL MODEL FOR MAGNETIZATION OF AN ANISOTROPIC MEDIUM BY A LINEARLY POLARIZED LIGHT PULSE

S. S. Marmo

Abstract: a phenomenological analysis based on spatial-time symmetry of the magnetization process shows that a slowly varying (not oscillating with the carrier frequency) magnetic moment can be induced by a linearly polarized nonmonochromatic light wave in an anisotropic medium (inverse Faraday effect). The magnetic moment induced by light pulses with exponential, sinusoidal or Gaussian envelopes was calculated using a simple classical model of the medium as a set of anisotropic harmonic oscillators. In all three cases the induced magnetic moment includes a slow-varying component, whose variation rate is determined by the pulse front steepness and is independent of the pulse carrier frequency. Therefore the model calculations confirm the general result of the phenomenological analysis.

Keywords: inverse Faraday effect, nonmonochromatic light wave, anisotropic media.

Пространственно-временной анализ условий намагничения среды. Известный в магнитооптике обратный эффект Фарадея состоит в намагничении среды проходящей через нее световой волной [1]. Так, монохроматическая волна с электрическим вектором

$$\mathbf{F}(\mathbf{r},t) = F\mathrm{Re}\left\{\mathbf{e}e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}\right\} \tag{1}$$

(F — амплитуда, ω — частота, $\mathbf{k}$ — волновой вектор, $\mathbf{e}$ — единичный комплексный вектор поляризации волны) наводит в единице объема среды магнитный момент

$$\boldsymbol{\mu} = \xi\chi(\omega)F^2\widehat{\mathbf{k}}, \tag{2}$$

где $\widehat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$ — единичный вектор в направлении распространения волны, $\xi = i(\widehat{\mathbf{k}}[\mathbf{ee}^*])$ — степень циркулярной поляризации волны, $\chi(\omega)$ — восприимчивость, описывающая эффект Фарадея (постоянная Верде). Как видно из (2), эффект намагничения исчезает в линейно поляризованном поле: при $\xi = 0$ вектор намагничения $\boldsymbol{\mu} = 0$. С точки зрения пространственно-временной симметрии, анализ которой впервые проведен в [2], обращение ξ в нуль в линейном поле означает, что в задаче исчезает псевдоскалярный параметр, а из оставшихся параметров невозможно скомбинировать T-нечетный аксиальный вектор, каким является вектор намагничения $\boldsymbol{\mu}$ (хотя в задаче имеется T-нечетный вектор $\mathbf{k}$). Однако, как показано в [2], намагничение в линейном поле становится возможным, если рассматриваются анизотропные среды и учитывается немонохроматичность световой волны. Например, если среда, через которую распространяется линейно поляризованный световой импульс с огибающей $F = F(t)$, помещена в постоянное электрическое поле с напряженностью $\mathbf{F}_0$ (задающей направление оси анизотропии), то в среде наводится магнитный момент

$$\boldsymbol{\mu} = \lambda\widetilde{\eta}F^2(\mathbf{F}_0\mathbf{e})[\mathbf{F}_0\mathbf{e}], \tag{3}$$

где крутизна огибающей светового импульса $\lambda = \frac{1}{F}\frac{dF}{dt}$ является T-нечетным параметром (точнее, выражение (3) определяет медленно — как $\lambda(t)$ — меняющуюся компоненту наводимого магнитного момента). Действительно, выражение (3) для намагничения удовлетворяет всем требованиям пространственно-временной симметрии, так как его правая часть является аксиальным вектором, который меняет знак при обращении времени. Таким образом, при наличии импульсного светового поля анизотропная среда намагничивается и при линейной поляризации волны.

Механизм, приводящий к наведению медленно меняющегося магнитного момента при прохождении светового импульса через среду, по своей природе классичен и может быть выяснен на простейшей модели анизотропного осциллятора. В представленной заметке рассмотрены три примера световых импульсов: с экспоненциальной, синусоидальной и гауссовой огибающими. Во всех случаях расчет подтверждает общий результат (3) феноменологического анализа.

Классическая модель среды. Рассмотрим среду из осцилляторов, подверженную воздействию светового импульса $\mathbf{F}\sin\omega t$ с огибающей $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t)$. Учитывая только электрическую составляющую в силе Лоренца и ограничиваясь дипольным приближением (т.е. пренебрегая пространственной неоднородностью волны), запишем уравнение движения для осциллятора:

$$m\ddot{\mathbf{r}} + \varkappa\mathbf{r} = e\mathbf{F}\sin\omega t.$$

Для эффективного учета анизотропии, наводимой в среде постоянным полем $\mathbf{F}_0$, будем считать $\varkappa$ тензором. В силу осевой симметрии два главных значения этого тензора совпадают. Обозначим их $\varkappa_\perp$, третье значение обозначим $\varkappa_\parallel$. Эти значения определяют собственные частоты $\omega_\parallel$ и $\omega_\perp$ колебаний осциллятора вдоль оси анизотропии ($\varkappa_\parallel = m\omega_\parallel^2$) и в перпендикулярной к ней плоскости ($\varkappa_\perp = m\omega_\perp^2$). Направив ось z по направлению $\mathbf{F}_0$ и считая, что $\mathbf{F}$ лежит в плоскости xz, запишем уравнение движения в проекциях:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_\perp^2 x &= \frac{eF_x}{m}\sin\omega t, \\ \ddot{z} + \omega_\parallel^2 z &= \frac{eF_z}{m}\sin\omega t. \end{aligned} \tag{4}$$

Очевидно, что зависимость координат от времени, которая определяется этими уравнениями, отвечает значительно более сложному движению, чем простое колебание частицы вдоль отрезка прямой в случае воздействия линейно поляризованного монохроматического поля на изотропный осциллятор[1)]. Такое движение, как оказывается, приводит к появлению магнитного момента, направленного перпендикулярно плоскости движения и имеющего неосциллирующую составляющую.

Рассмотрим здесь три примера возникновения намагниченности, обусловленной эффектами немонохроматичности светового импульса.

Намагничение импульсом с экспоненциальной огибающей. В качестве первого примера рассмотрим импульс, в котором амплитуда колебаний электрического вектора изменяется по закону

$$\mathbf{F} = \boldsymbol{\mathcal{F}} e^{-\lambda|t|}, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ — постоянный вектор. Ответственные за намагничение частные решения уравнений (4) с экспоненциальной неоднородностью могут быть записаны в виде

$$x = \frac{e\mathcal{F}_x}{m}\mathrm{Im}\left[\frac{e^{i\omega t - s\lambda t}}{\omega_\perp^2 - (\omega + is\lambda)^2}\right], \quad z = \frac{e\mathcal{F}_z}{m}\mathrm{Im}\left[\frac{e^{i\omega t - is\lambda}}{\omega_\parallel^2 - (\omega + is\lambda)^2}\right], \tag{6}$$

где $s = \mathrm{sign}\, t$. Из этих выражений очевидно, что наведенный в среде магнитный момент

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{2c}[\mathbf{r}\mathbf{v}] \tag{7}$$

содержит два типа слагаемых — медленно изменяющееся (неосциллирующее) и осциллирующие с частотой 2ω:

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^{sl} + \boldsymbol{\mu}^{osc}.$$

Считая изменение амплитуды плавным,

$$\lambda \ll \omega, |\omega - \omega_{\parallel,\perp}|,$$

получаем простое выражение для неосциллирующей составляющей магнитного момента:

$$\begin{aligned} \mu_y^{sl} &= -\frac{e^3\mathcal{F}_x\mathcal{F}_z}{m^2c}\frac{s\lambda\omega^2}{(\omega_\parallel^2 - \omega^2)(\omega_\perp^2 - \omega^2)}\left[\frac{1}{\omega_\perp^2 - \omega^2} - \frac{1}{\omega_\parallel^2 - \omega^2}\right]e^{-2\lambda|t|}, \\ \mu_x^{sl} &= \mu_z^{sl} = 0. \end{aligned}$$

Последние выражения могут быть записаны в векторном виде:

$$\boldsymbol{\mu}^{sl} = s\lambda\eta(\boldsymbol{\nu}\mathbf{F})[\boldsymbol{\nu}\mathbf{F}], \tag{8}$$

где

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\mathbf{F}_0}{F_0}$$

— единичный вектор вдоль направления постоянного поля, а восприимчивость

$$\eta = -\frac{m\omega^2}{2e^3c}\alpha_\parallel\alpha_\perp(\alpha_\perp - \alpha_\parallel),$$

выражается через продольную и поперечную поляризуемости осциллятора (главные значения тензора поляризуемости):

$$\alpha_{\parallel,\perp} = \frac{e^2}{m(\omega_{\parallel,\perp}^2 - \omega^2)}. \tag{9}$$

[1)] Модель (4) используется в [2] также для оценки намагниченности монохроматическим полем (в этом случае эффект возникает при учете диссипации световой энергии).

Поскольку для огибающей (5) $\frac{1}{F}\frac{dF}{dt} = s\lambda$, магнитный момент (8) в точности соответствует общему выражению (3). В частности, магнитный момент при $t = 0$ меняет знак вместе с dF/dt.

Намагничение синусоидально модулированной волной. Рассмотрим теперь воздействие на среду амплитудно-модулированной волны с плавной синусоидальной огибающей:

$$\mathbf{F}\sin\omega t = 2\boldsymbol{\mathcal{F}}\sin\Omega t\sin\omega t, \quad \Omega \ll \omega. \tag{10}$$

Представим волну (10) как наложение двух монохроматических волн:

$$2\boldsymbol{\mathcal{F}}\sin\Omega t\sin\omega t = \boldsymbol{\mathcal{F}}\cos\omega_1 t - \boldsymbol{\mathcal{F}}\cos\omega_2 t,$$

где

$$\omega_1 = \omega - \Omega, \qquad \omega_2 = \omega + \Omega,$$

что приводит к следующим уравнениям движения осциллятора в поле (10):

$$\begin{aligned}
\ddot{x} + \omega_\perp^2 x &= \frac{e\mathcal{F}_x}{m}\cos\omega_1 t - \frac{e\mathcal{F}_x}{m}\cos\omega_2 t,\\
\ddot{z} + \omega_\parallel^2 z &= \frac{e\mathcal{F}_z}{m}\cos\omega_1 t - \frac{e\mathcal{F}_z}{m}\cos\omega_2 t.
\end{aligned}$$

Частные решения этих уравнений

$$\begin{aligned}
x &= \frac{e\mathcal{F}_x}{m(\omega_\perp^2 - \omega_1^2)}\cos\omega_1 t - \frac{e\mathcal{F}_x}{m(\omega_\perp^2 - \omega_2^2)}\cos\omega_2 t,\\
z &= \frac{e\mathcal{F}_z}{m(\omega_\parallel^2 - \omega_1^2)}\cos\omega_1 t - \frac{e\mathcal{F}_z}{m(\omega_\parallel^2 - \omega_2^2)}\cos\omega_2 t
\end{aligned}$$

позволяют вычислить магнитный момент (7):

$$\begin{aligned}
\mu_y = \frac{e^3\mathcal{F}_x\mathcal{F}_z}{2m^2c}&\left[\frac{1}{(\omega_\parallel^2 - \omega_1^2)(\omega_\perp^2 - \omega_2^2)} - \frac{1}{(\omega_\perp^2 - \omega_1^2)(\omega_\parallel^2 - \omega_2^2)}\right]\times\\
&\times\left[\omega\sin(\omega_2 - \omega_1)t + \Omega\sin(\omega_2 + \omega_1)t\right].
\end{aligned} \tag{11}$$

Учтем в нем только медленную компоненту, осциллирующую на удвоенной частоте модуляции:

$$\mu_y^{sl} = \frac{e^3\mathcal{F}_x\mathcal{F}_z\omega}{2m^2c}\left[\frac{1}{(\omega_\perp^2 - \omega_1^2)(\omega_\parallel^2 - \omega_2^2)} - \frac{1}{(\omega_\parallel^2 - \omega_1^2)(\omega_\perp^2 - \omega_2^2)}\right]\sin(\omega_2 - \omega_1)t.$$

Последнее выражение запишем в виде, соответствующем формуле (3):

$$\boldsymbol{\mu}^{sl} = \lambda\eta(\boldsymbol{\nu}\mathbf{F})[\boldsymbol{\nu}\mathbf{F}], \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lambda(t) = F^{-1}\frac{dF}{dt} = \Omega\operatorname{ctg}\Omega t,\\
\eta &= \frac{e^3\omega}{4m^2c\Omega}\left[\frac{1}{(\omega_\perp^2 - \omega_1^2)(\omega_\parallel^2 - \omega_2^2)} - \frac{1}{(\omega_\parallel^2 - \omega_1^2)(\omega_\perp^2 - \omega_2^2)}\right].
\end{aligned} \tag{13}$$

Восприимчивость η здесь выражается через поляризуемости осцилляторов на частотах ω_1 и ω_2:

$$\eta = \frac{\omega}{4ec\Omega}\left[\frac{1}{\alpha_\perp(\omega_1)\alpha_\parallel(\omega_2)} - \frac{1}{\alpha_\parallel(\omega_1)\alpha_\perp(\omega_2)}\right]. \tag{14}$$

Намагничение импульсом с гауссовой огибающей. Наконец, рассмотрим импульс с гауссовой огибающей:

$$\mathbf{F} = \boldsymbol{\mathcal{F}}e^{-\beta t^2}.$$

В отличие от двух предыдущих случаев, частные решения уравнений движения для осциллятора, на который действует сила $\mathbf{F} = \boldsymbol{\mathcal{F}}e^{-\beta t^2}\sin\omega t$, не могут быть выражены в замкнутом аналитическом виде, но представляются в квадратурах [3]:

$$\begin{aligned} x &= \frac{e\mathcal{F}_x}{m\omega_\perp}\int\limits_{-\infty}^{t}\sin\omega_\perp(t-\tau)e^{-\beta\tau^2}\sin\omega\tau d\tau, \\ z &= \frac{e\mathcal{F}_z}{m\omega_\parallel}\int\limits_{-\infty}^{t}\sin\omega_\parallel(t-\tau)e^{-\beta\tau^2}\sin\omega\tau d\tau. \end{aligned} \tag{15}$$

Этого достаточно, чтобы найти плавную компоненту магнитного момента. Считая β малым,

$$\sqrt{\beta} \ll \omega, |\omega - \omega_{\parallel,\perp}|,$$

найдем приближенное выражение для интеграла

$$I \equiv \int\limits_{-\infty}^{t}\sin\widetilde{\omega}(\tau - t)e^{-\beta\tau^2}\sin\omega\tau d\tau, \tag{16}$$

через который выражаются координаты в (15), дважды интегрируя по частям:

$$\begin{aligned} I \approx e^{-\beta t^2}&\left[\frac{\widetilde{\omega}}{\omega^2-\widetilde{\omega}^2}\sin\omega t + \beta t\left(\frac{1}{(\widetilde{\omega}+\omega)^2} - \frac{1}{(\widetilde{\omega}-\omega)^2}\right)\cos\omega t - \right. \\ &\left. -\beta\left(\frac{1}{(\widetilde{\omega}+\omega)^3} + \frac{1}{(\widetilde{\omega}-\omega)^3}\right)\sin\omega t\right]. \end{aligned} \tag{17}$$

Вычисляя с помощью этого выражения $x, \dot{x}, z, \dot{z}$ и затем магнитный момент (7), получаем для его медленной компоненты

$$\mu_y^{sl} = \frac{2e^3\mathcal{F}_x\mathcal{F}_z}{m^2c}\beta\omega^2 te^{-2\beta t^2}\frac{\omega_\perp^2 - \omega_\parallel^2}{(\omega_\parallel^2-\omega^2)^2(\omega_\perp^2-\omega^2)^2}. \tag{18}$$

Представим последнее выражение в векторной форме:

$$\boldsymbol{\mu}^{sl} = \lambda\eta(\boldsymbol{\nu}\mathbf{F})[\boldsymbol{\nu}\mathbf{F}] \tag{19}$$

где

$$\lambda = F^{-1}dF/dt = -2\beta t$$

и

$$\eta = -\frac{e^3 \mathcal{F}_x \mathcal{F}_z}{m^2 c} \omega^2 \frac{\omega_\perp^2 - \omega_\parallel^2}{(\omega_\parallel^2 - \omega^2)^2 (\omega_\perp^2 - \omega^2)^2}.$$

Таким образом, все рассмотренные примеры подтверждают результат феноменологического анализа (3) о наведении линейно поляризованной модулированной волной в анизотропной среде медленно изменяющегося магнитного момента. Заметим также, что во всех трех случаях восприимчивость η выражается через продольную и поперечную поляризуемости осциллятора (9).

Полученный результат показывает, что намагничение среды в нестационарном поле дает принципиальную возможность генерировать излучение в диапазоне частот порядка частоты модуляции.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект № 1019).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ландау Л.Д. Электродинамика сплошных сред / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. — М.: Физматлит, 2003. — 620 с.

[2] Манаков Н.Л. Нелинейно-оптические явления, обусловленные диссипативными или нестационарными процессами / Н.Л. Манаков, А.Г. Файнштейн // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 1984. — Т. 87. — С. 1552-1564.

[3] Ландау Л.Д. Механика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. — М.: Физматлит, 1973. — 208 с.

REFERENCES

[1] Landau L.D., Lifshitz E.M. Electrodynamics of continuous media. [Landau L.D., Lifshitz E.M. Electrodinamika sploshnykh sred]. Moscow: Fizmatlit, 1982, 620 p.

[2] Manakov N.L., Fainshtein A.G. Nonlinear-optics phenomena due to dissipative or nonstationary processes. [Manakov N.L., Fainshtein A.G. Nelineyno-opticheskie yavleniya, obuslovlennye dissipativnymi ili nestacionarnymi processami]. *Zhurnal e'ksperimental'noj i teoreticheskoj fiziki — Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1984, Vol. 87, pp. 1552–1564.

[3] Landau L.D., Lifshitz E.M. Mechanics. [Landau L.D., Lifshitz E.M. Mechanika]. Moscow: Fizmatlit, 1973, 208 p.

Мармо С.С., аспирант кафедры теоретической физики Воронежского государственного университета, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: sergey.marmo@gmail.com

Marmo S.S., graduate student, Department of theoretical physics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: sergey.marmo@gmail.com