УДК 517.911

О СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В БЕСКОНЕЧНОМЕРНОМ ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Хамид Кадим Аль Зухаири

Воронежский государственный педагогический университет

Поступила в редакцию 03.02.2014 г.

Аннотация: целью настоящей работы является доказательство теорем существования и единственности решения начальной задачи для стохастического дифференциального уравнения следующего вида

$$dx = (A\,X(t) + a(t, (S_{h_1,\ldots,h_m}\,X(t)))dt + b(t, (S_{h_1,\ldots,h_m}\,X(t)))dW_t,$$

с начальным условием $x(0) = x_0$, где A — производящий оператор сильно непрерывной полугруппы, $S_{h_1,\ldots,h_m}$ — оператор, характеризующий наличие отклонений аргумента, $0 \leqslant h_i(t) \leqslant t$, $i = 1, \ldots, m$ и $t \in [0, T]$.

Предполагается, что операторы a, b удовлетворяют обобщенному условию Осгуда и имеют подлинейный рост на бесконечности. Для доказательства используется метод эквивалентных интегральных операторов, которые при перечисленных условиях уплотняют относительно специальной меры некомпактности.

Ключевые слова: стохастическое дифференциальное уравнение, полугруппа линейных операторов, уплотняющий оператор.

ON STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DELAY IN INFINITE-DIMENSIONAL HILBERT SPACE

Hameed Kadhim Al Zuhairi

Abstract: the purpose of this paper is to prove the existence and the uniqness of solutions to the initial value problem for the following stochastic differential equation of the form

$$dx = (A\,X(t) + a(t, (S_{h_1,\ldots,h_m}X(t)))dt + b(t, (S_{h_1,\ldots,h_m}\,X(t)))dW_t,$$

with the initial condition $x(0) = x_0$, where A is a generator of a strongly continuous semigroup, $S_{h_1,\ldots,h_m}$ is an operator characterizing the presence of the deviations of the arguments, $0 \leqslant h_i(t) \leqslant t$ for all $i = 1, \ldots, m$ and $t \in [0, T]$.

It is assumed that the operators a and b satisfy the generalized Osgood condition, and have a sublinear growth at infinity. The proof uses the method of equivalent integral operators, which in the above conditions are condensing with respect to a special measure noncompactness.

Keywords: stochastic differential equations, semigroup, condensing operator.

ВВЕДЕНИЕ

Обыкновенные и стохастические дифференциальные уравнения (СДУ) в бесконечномерных пространствах имеют много важных приложений , на которых мы не останавливаемся, подробнее см., например, [1]–[3]. СДУ с запаздыванием рассматривались в [4]–[8].

Для обыкновенных дифференциальных уравнений, после знаменитого примера Дьедонне, см. [9], и основополагающих результатов А. Годунова [10], [11], становится ясно, что, в случае бесконечномерных банаховых пространств, нужно предположить дополнительное условие на правую часть уравнения

$$x' = f(t, x), \tag{1}$$

для того, чтобы получить теорему существования для начальной задачи с начальным условием

$$x(0) = x_0. \tag{2}$$

Как хорошо известно, оценка

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leqslant L(t, \|x - y\|), \tag{3}$$

где L — вещественная функция такая, что интегральное неравенство

$$u(t) \leqslant \int_0^t L(s, u(s))ds,$$

имеет только нулевое решение.

В [12] была показана, возможность добавить к f удовлетворяющим неравенству (3) непрерывный компактный оператор. Различные обобщения это по факта,связаны с условием вида

$$\varphi(f(t, \Lambda)) \leqslant L(s, \varphi(\Lambda)), \tag{4}$$

где φ — мера некомпактности (см., например, [13]–[16]). Абстрактная теорема о неподвижной точке для уплотняющих операторов (см. [13]) была успешно применена для уравнений с правой частью удовлетворяющей условию (4).

В конце XX века, во многих работах (см., например, [14]–[16]), было показано,что из условия (4) следует существование решений задачи Коши для квазилинейного уравнения

$$x' = Ax + f(t, x)$$

с начальным условием (2) и с линейным оператором, A — порождающим C_0–полугруппу.

В тот же период 1970-х годов было отмечено (см. [17]), что существование слабого решения и условии единственности для траекторий влечет существование сильного решения стохастического дифференциального уравнения

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t))dW_t, \tag{5}$$

где W_t — стандартный винеровский процесс (здесь, "слабый" и "сильный" взяты в вероятностный смысле, существование слабого решения с только непрерывными a и b известен из работы Скорохода [17]). Прямое доказательство существования сильного решения для (5), использования подходящей меры некомпактности, для a и b удовлетворяющих условию, подобному (3) был предложен в [18], см. также [13].

Переход от конечномерного случая к бесконечномерному случаю с a и b удовлетворяющие условию Липшица представлен в [2], [3]. Обобщение на случай полулинейного стохастического дифференциального уравнения

$$dX(t) = AX(t)dt + f(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW_t$$

связанное с оценками для стохастического оператора свертки

$$\int_0^t e^{A(t-s)}\upsilon(s)dW_s$$

(см. [2], [19]–[22]) и условием Липшица для f и σ представлено в [2].

Целью настоящей работы является доказательство существования решения у начальной задачи для СДУ следующую вида

$$dx = (A\,X(t) + a(t, (S_{h_1,\ldots,h_m}X(t))dt + b(t, (S_{h_1,\ldots,h_m}\,X(t)))dW_t, \tag{6}$$

где A — производящий оператор сильно непрерывной полугруппы e^{At}, действующей банаховом пространстве E операторы a и b определены на $R^1 \times E^k$ и действуют соответственно в E и в $L_2(U_0, H)$ (см., например, [2], стр. 181), $h_1, \ldots, h_m$ — отклонения аргумента, удовлетворяющие неравенствам $0 \leqslant h_i(t) \leqslant t$ для всех $i = 1, \ldots, m$ и $t \in [0, \infty)$. Оператор $S_{h_1,\ldots,h_m}$ сопоставляет функции X со значениями в E функцию $S_{h_1,\ldots,h_m}X$ со значениями в E^m по следующему правилу $(S_{h_1,\ldots,h_m}X(t)) = (X(h_1(t)), \ldots, X_t(h_m(t)))$. Процесс W_t — стандартный винеровский процесс со значениями в U_0. В конечномерном случае СДУ с отклоняющимся аргументом рассматривались в [13], [18].

ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПОНЯТИЯ И ФАКТЫ

Напомним, что стандартный винеровский процесс W_t со значениями в U_0 порождает семейство σ-алгебр $\mathcal{F}_t$, $t \in [0, T]$, см. [17]. Процесс $X(t)$ называется $\mathcal{F}_t$–адаптированным, если при любом $t \in [0, T]$ случайная величина $X(t)$ измерима по σ-алгебре $\mathcal{F}_t$.

На протяжении этой работе, для любого $t \in [0, T]$, обозначим через $N_c^p(\mathcal{F}, [0, t]; H)$ пространство непрерывных $(\mathcal{F}_t)$-адаптированных H-значных процессов X таких, что

$$\|X\|_{N_c^p(\mathcal{F},[0,t];H)} = E\left(\sup_{0\leqslant s\leqslant t} \|X(s)\|_H^p\right) < +\infty.$$

Неравенство конволюции для $p \geqslant 2$ имеет см., например, [2], стр. 182, а также [21], [22], следующий вид

$$E\left[\sup_{s\leqslant t}\left\|\int\limits_0^s e^{A(s-\sigma)}\Phi(\sigma)\,dw(\sigma)\right\|^p\right] \leqslant c_p \sup_{s\leqslant t} E\left(\left|\int\limits_0^s \Phi(\sigma)\,dw(\sigma)\right|^p\right) \leqslant$$

$$\leqslant C_p E\left(\int\limits_0^t \|\Phi(s)\|_L^2\,ds\right)^{\frac{p}{2}}, \tag{7}$$

где Φ — L_2^0–значный предсказуемый процесс, $t \in [0, T]$, $c_p = \left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ и $C_p = (p/2(p-1))^{\frac{p}{2}}\left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{p^2}{2}}$, $E(U)$ обозначает математическое ожидание случайной величины U.

Пусть $\mathcal{E}$ — банахово пространство и $B(\mathcal{E})$ множеств всех его ограниченных подмножеств. Пусть M — частично упорядоченное множество.

Отображение $\psi : B(\mathcal{E}) \to M$ называется мерой некомпактности (см. [13]) если $\psi(\overline{co}\Omega) = \psi(\Omega)$ для любого $\Omega \in B(\mathcal{E})$. Здесь $\overline{co}\Omega$ обозначает замыкание выпуклой оболочки множества Ω.

Пусть G непрерывный оператор, действующий из $\mathcal{E}$ в $\mathcal{E}$. Оператор G называется уплотняющим, (см. [13]), относительно меры некомпактности ψ, если из неравенства $\psi(G(\Omega))\overline{\leqslant}\psi(\Omega)$ следует относительная компактность множества Ω, здесь $\overline{\leqslant}$ означает отрицание отношения $\leqslant$ частичного порядка в множестве M.

Мера некомпактности ψ называется (см. [13]) несингулярной, если для любых $x \in \mathcal{E}$ и $\Omega \in B(\mathcal{E})$ мера некомпактности ψ удовлетворяет равенству

$$\psi(\{x\}\bigcup\Omega) = \psi(\Omega).$$

Мера некомпактности ψ называется монотонной, если для любых $\Omega_1, \Omega_2 \in B(\mathcal{E})$ из включения $\Omega_1 \leqslant \Omega_2$ следует неравенство $\psi(\Omega_1) \leqslant \psi(\Omega_2)$.

Для уплотняющих операторов справедливо (см. [13]) следующее обобщение принцип Шаудера.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{C} \in B(\mathcal{E})$, выпукло и замкнуто. Пусть уплотняющий относительно несингулярной монотонной меры некомпактности оператор $G : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Тогда G имеет в $\mathcal{C}$ хотя бы одну одну неподвижную точку.*

Под решением уравнения (6) на отрезке $[0, T]$, с начальным условием (2), будем понимать стохастический процесс $x \in N_c^p(\mathcal{F}, [0, T]; H)$ и удовлетворяющий интегральному уравнению

$$X(t) = e^{A(t-s)}x_0 + \int\limits_0^t e^{A(t-s)}a(s, (S_{h_1,\ldots,h_m} X(s)))ds + \int\limits_0^t e^{A(t-s)}b(s, (S_{h_1,\ldots,h_m} X(s)))dW_s. \quad (8)$$

Ниже мы будем предполагать, что выполнены следующие оценки

i) $\|a(t, x_1, \ldots, x_k)\| \leqslant A(1 + \sum\limits_{i=1}^k \|x_i\|)$, $\|b(t, x_1, \ldots, x_k)\| \leqslant B(1 + \sum\limits_{i=1}^k \|x_i\|)$,

ii) $\|a(t, x_1, \ldots, x_k) - a(t, y_1, \ldots, y_k\|^p \leqslant L(t, \sum\limits_{i=1}^k \|x_i - y_i\|^p)$, $\|b(t, x_1, \ldots, x_k) - b(t, y_1, \ldots, y_k\|^p \leqslant L(t, \sum\limits_{i=1}^k \|x_i - y_i\|^p)$, где функция L невозрастающая и выпуклая по второму аргументу функция такая, что

iii) для любой константы $C \geqslant 0$ интегральное неравенство $z(t) \leqslant C \int\limits_0^t L(s, (S_{h_1,\ldots,h_m} z(s)))ds$ имеет единственное решение $z(t) \equiv 0$.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* i), ii), iii). *Тогда уравнение* (6) *с начальным условием*

$$X(0) = x_0$$

имеет на отрезке $[0, T]$ *единственное решение.*

Доказательство. Теоремы проведем для случая $p = 2$. Для других $p \in (1, \infty)$ доказательство проводятся аналогично с заменой соответствующих констант C_2 на C_p из неравенств (7). Доказательству теоремы предпошлем три леммы об операторе, определенном интегральными членами в правой части уравнения (8).

Лемма 1. *Пусть выполняются условие i), тогда оператор G действует в пространстве $N_c^p(\mathcal{F}, [0, t]; H)$.*

Доказательство. Пусть $x \in N_c^p(\mathcal{F}, [0, T]; H)$ и $t \in [0, T]$, тогда

$$E \sup_{0 \leqslant s \leqslant \tau} |(GX(s))|^2 \leqslant C \left(\int\limits_0^\tau \left| e^{A(t-s)}\, a(\theta, (S_{h_1,\ldots,h_m} X(\theta))) \right|^2 d\theta \right) +$$

$$+ \sup_{0 \leqslant s \leqslant \tau} \left(\left| \int\limits_0^s e^{A(t-s)} b(\theta, (S_{h_1,\ldots,h_m} X(\theta)))dW_\theta \right| \right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant C \int\limits_0^\tau |a(\theta, (S_{h_1,\ldots,h_m} X(\theta)))|^2\, d\theta + \int\limits_0^\tau |b(\theta, (S_{h_1,\ldots,h_m} X(\theta)))|^2\, d\theta \leqslant$$

$$\leqslant C\left[\int\limits_0^\tau \left(|(S_{h_1,\dots,h_m}X(\theta))|^2+1\right)d\theta+\int\limits_0^\tau \left(|(S_{h_1,\dots,h_m}X(\theta))|^2+1\right)d\theta\right]\leqslant$$

$$\leqslant C\left[1+\int\limits_0^\tau\sum_{i=1}^k\|X\|^2_{N_c^p}d\theta+\int\limits_0^\tau\sum_{i=1}^k\|X\|^2_{N_c^p}d\theta\right]. \quad (9)$$

Таким образом

$$\|GX\|^2_{N_c^p}\leqslant C\left(1+\sum_{i=1}^k\|X\|^2_{N_c^p}\right).$$

Рассмотрим теперь в пространстве $N_c^p(\mathcal{F},[0,T];H)$ меру некомпактности, задаваемую формулой

$$[\psi(\Omega)](t)=\chi_t(\Omega_t), \quad (10)$$

где χ_t мера некомпактности Хаусдорфа в пространстве $N_c^p(\mathcal{F},[0,t];H)$, а

$$\Omega_t=\{X_t=(\theta)\left.\right|_{[0,t]}:X\in\Omega\}\subset N_c^p(\mathcal{F},[0,t];H),$$

здесь Ω — ограниченное множество из $N_c^p(\mathcal{F},[0,T];H)$.

Лемма 2. *Пусть выполняются условия i), ii), iii). Тогда оператор G уплотняет относительно меры некомпактности, задаваемой формулой* (10).

Доказательство. Заметим, что $\psi(\Omega)\in M[0,T]$, где $M[0,T]$ — линейное частично упорядоченное пространство всех скалярных функций, состоящее из всех неубывающих функций, и определяет меру некомпактности на $N_c^p(\mathcal{F},[0,T];H)$.

Покажем, что функция $t\mapsto[\psi(\Omega)](t)$ является неубывающей и ограниченной. Действительно, если $t_1\leqslant t_2$, то можно указать $\chi_{t_2}(\Omega_{t_2})+\varepsilon$–сеть множества Ω_{t_2}, центрами которой являются функций $y_1,\dots,y_m$. Но тогда $y_1\left.\right|_{[0,t_1]},\ \dots,y_m\left.\right|_{[0,t_1]}$ образуют $\chi_{t_2}(\Omega_{t_2})+\varepsilon$–сеть множества Ω_{t_1}, и следовательно, $\chi_{t_1}(\Omega_{t_1})\leqslant\chi_{t_2}(\Omega_{t_2})+\varepsilon$. Очевидно, $\chi_t(\Omega_t)\leqslant\sup\limits_{x\in\Omega}\|X_T\|_{N_c^p}\leqslant M$, т. е. $\psi(\Omega)$ ограничена. Поэтому для любого $\varepsilon>0$ эта функция может иметь лишь конечное число скачков величины больше или равной ε обозначим точки этих скачков через $t_1,\dots,t_n$.

Выберем $\delta_1>0$, такой что $i\neq j\Rightarrow[t_i-\delta_1,t_i+\delta_1]\cap[t_j-\delta_1,t_j+\delta_1]=\varnothing$, выбросим из отрезка $[0,T]$ точки, соответствующие этим скачкам вместе с непересекающиеся $[0,T]$ их δ_1–окрестностями. С помощью точек β_j, $j=1,\dots,m$ разделим оставшуюся часть отрезки, на участки на которых колебания $\omega(\psi(\Omega),\ [\beta_j,\beta_{j+1}])<\varepsilon$.

Напомним, $\omega(\psi(\Omega),[\beta_j,\beta_{j+1}])=\sup\limits_{t\in[\beta_j,\beta_{j+1}]}\psi(\Omega)(t)-\inf\limits_{t\in[\beta_j,\beta_{j+1}]}\psi(\Omega)(t)$.

Выберем $\delta_2>0$, что $j\neq k\Rightarrow[t_j-\delta_2,t_j+\delta_2]\cap[t_k-\delta_2,t_k+\delta_2]=\emptyset$, окружают точки β_j непересекающимися δ_2−окрестностями, пусть функций $z_1,\dots,z_m$ образуют $\chi_{\beta_j}(\Omega_j)+\varepsilon$-сеть множества Ω_{β_j}. Построим семейство $Z_k=\{z_k|_{[\beta_{j-1}+\delta_2,\beta_j-\delta_2]}:k=1,\dots,m\}$ путем взятия всех непрерывных процессов z_k, которые совпадают с произвольным элементом $[(\psi(\Omega))+\varepsilon]$–сети множества Ω_{β_j} из отрезке $\sigma_j=[\beta_{j-1}+\delta_2,\beta_j+\delta_2]$, $j=1,\dots,m$, и линейны на дополняющих сегментах.

Пусть $u\in(G\Omega)\,(t)$, тогда $u\in(G\Omega)(t)$ тогда для некоторого $z\in\Omega$ и,

$$[(\psi(\Omega))\,(\beta_j)+\varepsilon]^{\,p}\geqslant\left\|z-z_p^{\beta_j}\right\|^p_{N_c^p}$$

где некоторый элементом $z_p^{\beta_j}\in[(\psi(\Omega))+\varepsilon]$–сеть множества Ω_{β_j}. Затем $z_p^{\beta_j}|_{\sigma_j}=z_k|_{\sigma_j}$, где $z_k\in Z$, что для $s\in\sigma_j$ тогда

$$E\,|z(s)-z_k(s)|^p\leqslant E\sup_{\beta_{j-1}+\delta_2\leqslant s\leqslant\beta_j-\delta_2}|z(s)-z_k(s)|^p\leqslant$$

$$\leqslant \left\| z - z^{\beta_j} \right\|^p_{N^p_c} \leqslant [(\psi(\Omega))(\beta_j) + \varepsilon]^p \leqslant [(\psi(\Omega))(s) + 2\varepsilon]^p$$

Поэтому при $\sigma^t_j = \sigma_j \cap [0, \overline{h}(t)]$, где $\overline{h}(t) = \sup\limits_{0 \leqslant s \leqslant t} \{h_1(s), \ldots, h_m(s)\}$. Тогда

$$E \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} |(Gz)(s) - (Gz_k)(s)|^2 \leqslant$$
$$\leqslant C \sup_{\tau \in [0,t]} E \left\{ \left| \int\limits_0^\tau e^{A(t-s)} (a(s, (S_{h_1,\ldots,h_m} Z(s)))) - (a(s, (S_{h_1,\ldots,h_m} Z_k(s))))ds \right|^2 + \right.$$
$$\left. + \left| \left[\int\limits_0^\tau e^{A(t-s)} (b(s, (S_{h_1,\ldots,h_m} Z(s)))) - (b(s, (S_{h_1,\ldots,h_m} Z_k(s)))) \right] \right|^2 ds \right\}$$

в силу монотонности и выпуклости функций L по второму аргументу последнее ограниченности полугруппы на конечном отрезке неравенство можно продолжить следующим образом

$$\leqslant C \sup_{t \in [0,T]} E \int\limits_0^t L(s, |(S_{h_1,\ldots,h_m} Z(s)) - (S_{h_1,\ldots,h_m} Z_k(s))|^2)ds.$$

Таким образом

$$[(\psi(\Omega_t))]^2 \leqslant \varepsilon + C \int\limits_0^t L(S, S_{h_1,\ldots,h_m}(\psi(\Omega))^2(s) + 2\varepsilon)ds,$$

в силу условия (iii), $\psi(\Omega)(t) \equiv 0$, т. е. Ω относительно компактно.

В пространстве $N^p_c(\mathcal{F}, [0,T]; H)$ рассмотрим норму задаваемую равенством

$$\|X\|^\alpha_{N^p_c} = \left(E \sup_{0 \leqslant s \leqslant T} e^{-\alpha p s} \|X(s)\|^p_H \right)^{\frac{1}{2}},$$

где α — некоторый положительный параметр, который будет выбран ниже. Так введенная норма, очевидно, эквивалентна первоначальной, так как

$$e^{-\alpha T} \|X\|_{N^p_c} \leqslant \|X\|^\alpha_{N^p_c} \leqslant \|X\|_{N^p_c}.$$

Обозначим через $B^\alpha(0, r)$ шар, радиуса r с центром в нуле в пространстве N^p_c, снабженном нормой $\|\cdot\|^\alpha_{N^p_c}$.

Лемма 3. *Пусть выполняются условия i).*

Тогда существуют α и r такие, что оператор G переводит шар $B^\alpha(0, r)$ в себя.

Доказательство. В силу условия i)

$$e^{-\alpha p t} \|GX(t)\|^p_H \leqslant e^{-\alpha p t} \left(C + C \int\limits_0^t \|S_{h_1}, \ldots, S_{h_m} X(s)\|^p_H ds \right) \leqslant$$
$$\leqslant e^{-\alpha p t} \left(C + C \int\limits_0^t \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant s} \|X(\tau)\|^p_H ds \right) \leqslant e^{-\alpha p t} \left(C + C \int\limits_0^t e^{\alpha p s} \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant s} e^{-\alpha p \tau} \|X(\tau)\|^p_H ds \right) \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\alpha pt}\left(C + C\int\limits_0^t e^{\alpha p\tau}d\tau\left(\sup_{0\leqslant s\leqslant T} e^{-\alpha ps}\;\|X(\tau)\|_H^p\right)\right)\leqslant C+\frac{C}{\alpha p}\sup_{0\leqslant s\leqslant T} e^{-\alpha ps}\;\|X(s)\|_H^p.$$

Отсюда следует неравенство

$$E\sup_{0\leqslant t\leqslant T} e^{-\alpha pt}\,\|GX(t)\|^p\leqslant C+\frac{C}{\alpha p}E\sup_{0\leqslant s\leqslant T} e^{-\alpha ps}\;\|X(s)\|_H^p.$$

Таким образом

$$\left(\|GX\|_{N_c^p}^{\alpha}\right)^p\leqslant C+\frac{C}{\alpha p}\;\left(\|X\|_{N_c^p}^{\alpha}\right)^p.$$

Выбрав теперь α так, чтобы выполнено неравенство $\frac{C}{\alpha p}<1$, мы можем подобрать r такое, что

$$C+\frac{C}{\alpha p}r^p<r^p.$$

Таким образом $GB^{\alpha}(0,r)\subseteq B^{\alpha}(0,r)$.

Доказательство теоремы 2. Разрешимость задачи (8) в $N_c^p(\mathcal{F},[0,T];H)$ следует из теоремы 1. Действительно, нетрудно убедиться, что меры некомпактности ψ имеет все необходимые свойства и оператор G уплотняет. В качестве C достаточно в силу леммы 3 взять $B^{\alpha}(0,r)$. Единственность решения устанавим используя условия i) – iii). Действительно если X и Y два решения уравнения (6) с начальным условием (2). Тогда, обозначая через Z их разность, инеем

$$Z(t)=\int\limits_0^t e^{A(t-s)}\left(a(s,(S_{h_1,\ldots,h_m}X(s)))-a(s,(S_{h_1,\ldots,h_m}Y(s)))\right)+$$

$$+\int\limits_0^t e^{A(t-s)}\left(b(s,(S_{h_1,\ldots,h_m}X(s)))-b(s,(S_{h_1,\ldots,h_m}Y(s)))\right)dW_s.$$

Применяе оценки ii) и неравенство (7), получим

$$E\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|Z(s)|^p\leqslant C\int\limits_0^t L\left(s,E\left|S_{h_1,\ldots,h_m}\left|Z\right|^p(s)\right|\right)ds\leqslant C\int\limits_0^t L\left(s,E\sup_{0\leqslant\tau\leqslant s}\left|S_{h_1,\ldots,h_m}\left|Z(\tau)\right|^p\right|\right)ds$$

в силу iii) $E\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t}|Z(s)|^p\equiv 0$, $t\in[0,T]$, т. е. $X=Y$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Semigroup Theory with Applications to Systems and Control / N.U. Ahmed. — Pitman Research Notes in Math. Harlow: Longman, 1991. — 282 p.

[2] Da Prato G. Stochastic Equations in Infinite Dimensions / Da Prato G., Zabczyk J. // Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. — 1992. — № 44: Cambridge University Press. — 454 p.

[3] Bogachev V. I. Deterministic and stochastic differential equations in infinite–dimensional spaces / V. I. Bogachev, I. Vladimir // Acta Applicandae Mathematicae. — 1995. — № 40. — P. 25–93.

[4] Ito K. On stationary solutions of a stochastic differential equation / K. Ito, M. Nisio // J. Math. Kyoto Univ. — 1964. — № 4. — P. 1–75.

[5] Mohammed S. A. Lyapunov exponents and stationary solutions for acne stochastic delay equations / S. A. Mohammed, M. Scheutzov // Stochastics and Stochastic Reports. — 1990. — № 29. — P. 259–283.

[6] Scheutzov M. Qualitatives Verschatten der Losungen von eindimensionalen Keiserslantern nichtlinearen stochastischen Differentialgleichungen mit Geddchtnis / M. Scheutzov // Ph. D. thesis. — 1983.

[7] Scheutzov M. Qualitative behaviour of stochastic delay equations with a bounded memory / M. Scheutzov // Stochastics. — 1984. — № 12. — P. 41–80.

[8] Scheutzov M. Stationary and periodic stochastic differential systems / M. Scheutzov // Habilitationsschrift, Keiserslantern, 1988.

[9] Dieudonn'e J. Deux exemples singuliers d'equations differentials / J. Dieudonn'e // Acta Sci. Math. Szeged. — 1950. — № 12. — P. 38–40.

[10] Годунов А.Н. Контрпример к теореме Пеано в бесконечномерном гильбертовом пространстве / А. Н. Годунов // Вестник МГУ. Сер. Математика–Механика. — 1972. — № 5. — С. 31–34.

[11] Годунов А.Н. Теорема Пеано в бесконечномерном гильбертовом пространстве не верна даже в слабой формулировке / А. Н. Годунов // Математические заметки. — 1974. — № 15 (5). — С. 476–477.

[12] Кибенко А.В. Односторонняя оценки, в условиях существования решений дифференциальных уравнений в функциональных пространствах / А. В. Кибенко, М. А. Красносельский, Я. Д. Мамедов // Азербайджанский государственный Университет. Ученые Зап. Сер. Физ. Мат. и Хим. Науки. — 1961. — № 3. — С. 13–19.

[13] Меры некомпактности и уплотняющие операторы / Ахмеров Р.Р. и др. — Новосибирск: Наука, 1986. — 266 с.

[14] Ugowski H. An application of measures of noncompactness to evolution equations / H. Ugowski // In Differential equations and applications, I, II (Russian) (Ruse, 1985). Ruse: 'Angel Kanchev' Tech. Univ. — 1987. — P. 979–982.

[15] Szufla Stanis law. On the application of measure of noncompactness to existence theorems / Szufla Stanis law. // Sem. Mat. Univ. Padova. — 1986. — № 75. — С. 1–14.

[16] Bana's J'ozef Applications of measures of noncompactness to various problems / Bana's J'ozef // Zeszyty Nauk. Politech. — № 5: Rzeszowskiej Mat. Fiz. — 1987. — P. 115.

[17] Исследования по теории случайных процессов / А.В. Скороход. — Киев: издательство киевского госуниверситета, 1961. — 216 с.

[18] Rodkina A. E. On existence and uniqueness of solution of stochastic differentialequations with heredity / A. E. Rodkina // Stochastics. — 1984. — № 12. — P. 187–200.

[19] Азарина С. В. Механические системы со случайными возмущениями на нелинейных конфигурационных пространствах / С. В. Азарина, Ю. Е. Гликлих, А. В. Обуховский // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2008. — № 1. — С. 206–221.

[20] Гликлих Ю. Е. О соотношениях между инфинитезимальными генераторами и производными в среднем случайных процессов на многообразиях / Ю. Е. Гликлих // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2008. — № 2. — С. 97–102.

[21] Tubaro L. An estimate of Burkholder type for stochastic processes defined by the stochastic integral / L. Tubaro // Stochastic Anal. Appl. — 1984. — № 2. — P. 187–192.

[22] Kotelenez Peter. A stopped Doob inequality for stochastic convolution integrals and stochastic evolution equations / Peter Kotelenez // Stochastic Anal. Appl. — 1984. — № 2. — P. 245–265.

[23] Da Prato G. A note on stochastic convolution / G. Da Prato, J. Zabczyk // Stochastic Anal. Appl. — 1992. — № 10. — P. 143–153.

[24] Hausenblas E. A note on maximal inequality for stochastic evolutions / E. Hausenblas and

J. Seidler // Czechoslovak Math. J. — 2001. — № 51 (126) (4). — P. 785–790.

REFERENCES

[1] Ahmed N. U. Semigroup Theory with Applications to Systems and Control. Pitman Research Notes in Math. Harlow: Longman, 1991, 282 p.

[2] Da Prato G., Zabczyk J. Stochastic Equations in Infinite Dimensions. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, 1992, № 44: Cambridge University Press, 454 p.

[3] Bogachev V.I., Vladimir I. Deterministic and stochastic differential equations in infinite–dimensional spaces. Acta Applicandae Mathematicae, 1995, no. 40, pp. 25–93.

[4] Ito K., Nisio M. On stationary solutions of a stochastic differential equation. J. Math. Kyoto Univ., 1964, no. 4, pp. 1–75.

[5] Mohammed S.A., Scheutzov M. Lyapunov exponents and stationary solutions for acne stochastic delay equations. Stochastics and Stochastic Reports, 1990, no. 29, pp. 259–283.

[6] Scheutzov M. Qualitatives Verschatten der Losungen von eindimensionalen Keiserslantern nichtlinearen stochastischen Differentialgleichungen mit Geddchtnis. Ph. D. thesis, 1983.

[7] Scheutzov M. Qualitative behaviour of stochastic delay equations with a bounded memory. Stochastics, 1984, no. 12, pp. 41–80.

[8] Scheutzov M. Stationary and periodic stochastic differential systems. Habilitationsschrift, Keiserslantern, 1988.

[9] Dieudonn'e J. Deux exemples singuliers d'equations differentials. Acta Sci. Math. Szeged., 1950, no. 12, pp. 38–40.

[10] Godunov A.N. A counterexample to the theorem in infinite-dimensional Peano Hilbert space. [Godunov A.N. Kontrprimer k teoreme Peano v beskonechnomernom gil'bertovom prostranstve]. *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya. Matematika–Mexanika — Bulletin of the Moscow state University. Series. Mathematics–Mechanics*, 1972, no. 5, pp. 31–34.

[11] The Peano theorem in infinite-dimensional Hilbert space is not true even in the weak formulation. [Godunov A.N. Teorema Peano v beskonechnomernom gil'bertovom prostranstve ne verna dazhe v slaboj formulirovke]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 1974, no. 15 (5), pp. 476–477.

[12] Kibenko A.V., Krasnosel'skii M.A., Mammadov J.D. Unilateral assessment, in the conditions of existence of solutions of differential equations in function spaces. [Kibenko A.V., Krasnosel'skij M.A., Mamedov Ya.D. Odnostoronnyaya ocenki, v usloviyax sushhestvovaniya reshenij differencial'nyx uravnenij v funkcional'nyx prostranstvax]. *Azerbajdzhanskij gosudarstvennyj Universitet. Uchenye Zapada. Seriya. Fizicheskie, Matematicheskie i ximicheskie nauki — Azerbaijan state University. Scientists Of The West. Series. Physical, Mathematical and chemical Sciences*, 1961, no. 3, pp. 13–19.

[13] Akhmerov R.R. and others. Measures of Noncompactness and Condensing Operators. [Axmerov R.R. i dr. Mery nekompaktnosti i uplotnyayushhie operatory]. Novosibirsk: Nauka, 1986, 266 p.

[14] Ugowski H. An application of measures of noncompactness to evolution equations. In Differential equations and applications, I, II (Russian) (Ruse, 1985). Ruse: 'Angel Kanchev' Tech. Univ., 1987, pp. 979–982.

[15] Szufla Stanis law. On the application of measure of noncompactness to existence theorems. Sem. Mat. Univ. Padova, 1986, no. 75, pp. 1–14.

[16] Bana's J'ozef Applications of measures of noncompactness to various problems. Zeszyty Nauk. Politech., no. 5: Rzeszowskiej Mat. Fiz., 1987, p. 115.

[17] Skorokhod A.C. Studies on the theory of random processes. [Skoroxod A.V. Issledovaniya po teorii sluchajnyx processov]. Kiev: publishing house, Kiev state University, 1961, 216 p.

[18] Rodkina A. E. On existence and uniqueness of solution of stochastic differentialequations with heredity. Stochastics, 1984, no. 12, pp. 187–200.

[19] Azarina S.V., Gliklikh Yu.E., Obukhovski A.V. Mechanical systems with random perturbations on non-linear configuration spaces. [Azarina S.V., Gliklix Yu.E., Obuxovskij A.V. Mexanicheskie sistemy so sluchajnymi vozmushheniyami na nelinejnyx konfiguracionnyx prostranstvax]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2008, no. 1, pp. 206–221.

[20] Gliklikh Yu.E. On relations between infinitesimal generators and mean derivatives of stochastic processes on manifolds. [Gliklix Yu. E. O sootnosheniyax mezhdu infinitezimal'nymi generatorami i proizvodnymi v srednem sluchajnyx processov na mnogoobraziyax]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2008, no. 2, pp. 97–102.

[21] Tubaro L. An estimate of Burkholder type for stochastic processes defined by the stochastic integral. Stochastic Anal. Appl., 1984, no. 2, pp. 187–192.

[22] Kotelenez Peter. A stopped Doob inequality for stochastic convolution integrals and stochastic evolution equations. Stochastic Anal. Appl., 1984, no. 2, pp. 245–265.

[23] Da Prato G., Zabczyk J. A note on stochastic convolution. Stochastic Anal. Appl., 1992, no. 10, pp. 143–153.

[24] Hausenblas E., Seidler J. A note on maximal inequality for stochastic evolutions. Czechoslovak Math. J., 2001, Vol. 51 (126), no. 4, pp. 785–790.

Хамид Кадим Аль Зухаири, аспирант физико-математического факультета Воронежского государственного педагогического университета, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: hkd73@mail.ru

Hameed Kadhim Al Zuhairi, Post-graduate student, Faculty of Physics and Mathematics, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: hkd73@mail.ru