УДК 517.929.8

# О ПРИНЦИПЕ УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

**Хамид Кадим Аль Зухаири**

*Воронежский государственный педагогический университет*

Поступила в редакцию 03.06.2014 г.

**Аннотация**: целью настоящей работы является доказательство непрерывной зависимости от параметра $\alpha \in [0,1]$ решений начальной задачи для стохастического дифференциального уравнения

$$dX_\alpha = (AX_\alpha + a_\alpha(s, S_{h_1,\dots,h_m}X_\alpha(s)))ds + b_\alpha(s, S_{h_1,\dots,h_m}X_\alpha(s))dW_s,$$

с начальным условием $X_\alpha(0) = \varphi$, где $A$ — производящий оператор сильно непрерывной полугруппы, $S_{h_1,\dots,h_m}$ — оператор, характеризующий наличие отклонений аргумента, $0 \leqslant h_i(t) \leqslant t$, $i = 1,\dots,m$ и $t \in [0,T]$.

Предполагается, что операторы $a_\alpha, b_\alpha$ интегрально сходятся к $a_0, b_0$, удовлетворяют обобщенному условию Осгуда и условию подлинейного роста на бесконечности. Доказательство основано на оценке стохастических операторов типа свертки и теореме о непрерывной зависимости от параметра для интегральных уравнений с отклоняющимся аргументом.

**Ключевые слова**: стохастическое дифференциальное уравнение , полугруппа линейных операторов, уплотняющий оператор.

# ON THE AVERAGING PRINCIPLE FOR STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DEVIATING ARGUMENT

**Hameed Kadhim Al Zuhairi**

**Abstract**: the aim of this work is to study the dependence of the parameter in the initial value problem for a stochastic differential equation of the following form

$$dX_\alpha = (AX_\alpha + a_\alpha(s, S_{h_1,\dots,h_m}X_\alpha(s)))ds + b_\alpha(s, S_{h_1,\dots,h_m}X_\alpha(s))dW_s,$$

with the initial condition $X_\alpha(0) = \varphi$, where $A$ is a generator of a strongly continuous semigroup, $S_{h_1,\dots,h_m}$ is an operator characterizing the presence of the deviations of the arguments, $0 \leqslant h_i(t) \leqslant t$ for all $i = 1,\dots,m$ and $t \in [0,T]$.

It is assumed that the operators $a_\alpha, b_\alpha$ to converge integrally $a_0, b_0$, satisfy the generalized condition Osgood and sublinear growth at infinity. The proof of is based on an assessment of stochastic operators and svortki type theorem on the continuous dependence on the parameter of integral equations with deviating argument.

**Keywords**: stochastic differential equations, semigroup of linear operators, condensing operator.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Целью настоящей работы является исследование зависимости о параметра $\alpha \in [0,1]$ у начальной задачи для стохастического дифференциального уравнения (СДУ) следующего вида

$$dX_\alpha = (AX_\alpha + a_\alpha(s, S_{h_1,\ldots,h_m} X_\alpha(s)))ds + b_\alpha(s, S_{h_1,\ldots,h_m} X_\alpha(s))dW_s, \tag{1}$$

$$X_\alpha(0) = \varphi, \tag{2}$$

где $W_t$ — стандартный винеровский процесс со значениями в $U_0$. Здесь $A$ — производящий оператор сильно непрерывной полугруппы $e^{At}$, действующей гильбертовом пространстве $H$.

Пусть $a_\alpha : R^1 \times H^m \to H, b_\alpha : R^1 \times H^m \to L_2(U_0, H)$ (см,например, [1], стр. 181), отклонения аргумента $h_1, \ldots, h_m$, удовлетворяющие неравенствам $0 \leqslant h_i(t) \leqslant t$ для всех $i = 1, \ldots, m$ и $t \in [0,T]$. Оператор $S_{h_1,\ldots,h_m}$ сопоставляет функции$X$ со значениями в $H$ функцию $S_{h_1,\ldots,h_m}X$ со значениями в $H^m$ по следующему правилу $(S_{h_1,\ldots,h_m})X(t) = (X(h_1(t)), \ldots, X_t(h_m(t)))$. В конечномерном случае СДУ с отклоняющимся аргументом рассматривались в [2], [3].

Ниже мы будем предполагать, что для некоторого $p \geqslant 2$ выполнены следующие оценки

i) $\|a_\alpha(s,x)\|^p \leqslant C\left(1 + \|x\|^p\right), \|b_\alpha(s,x)\|^p \leqslant C\left(1 + \|x\|^p\right)$

и

ii) $\|a_\alpha(s,x) - a_\alpha(s,y)\|^p \leqslant L\left(\|x-y\|^p\right), \|b_\alpha(s,x) - b_\alpha(s,y)\|^p \leqslant L\left(\|x-y\|^p\right)$,

где функция $L$ невозрастающая и выпуклая по второму аргументу функция такая, что

iii) для любой константы $C \geqslant 0$ интегральное неравенство $z(t) \leqslant C \int\limits_0^t L(S_{h_1,\ldots,h_m} z(s))ds$ имеет единственное нулевое решение.

В силу результатов из [4] начальная задача (1) (2) при каждом $\alpha$ имеет единственное решение $X_\alpha$, определенное на отрезке $[0,T]$.

## 2. ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПОНЯТИЯ И ФАКТЫ

Напомним, что стандартный винеровский процесс $W_t$ со значениями в $U_0$ порождает семейство $\sigma$-алгебр $\mathcal{F}_t$ , $t \in [0,T]$, см. [5]. Процесс $X(t)$ со значениями в $H$ называется $\mathcal{F}_t$–адаптированным, если при любом $t \in [0,T]$ случайная величина $X(t)$ измерима по $\sigma$-алгебре $\mathcal{F}_t$.

Для любого $t \in [0,T]$, обозначим через $N_c^p(F,[0,t];H)$ пространство непрерывных $(\mathcal{F}_t)$-адаптированных $H$-значных процессов $X$ таких, что

$$\|X\|^p_{N_c^p(\mathcal{F}[0,t];H)} = E\left(\sup_{0\leqslant s\leqslant t} \|X(s)\|_H^p\right) < +\infty.$$

Неравенство потребуется следующее неравенство конволюции $p \geqslant 2$, см, например, [2], стр. 182.

$$E\left[\sup_{s\leqslant t}\left\|\int\limits_0^s e^{A(s-\sigma)}\Phi(\sigma)dw(\sigma)\right\|^p\right] \leqslant C_p \sup_{s\leqslant t} E\left(\left|\int\limits_0^s \Phi(\sigma)dw(\sigma)\right|^p\right) \leqslant C_p E\left(\int\limits_0^t \|\Phi(s)\|_L^2\, ds\right)^{\frac{p}{2}}, \tag{3}$$

где $\Phi$ — $L_2^0$-значный предсказуемый процесс, $t \in [0,T]$, $C_p = \left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ и $C_p = (p/2(p-1))^{\frac{p}{2}}\left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{p^2}{2}}$, а $E(Y)$ обозначает математическое ожидание случайной величины $Y$.

Пусть $\mathcal{E}$ — банахово пространство и $B(\mathcal{E})$ множеств всех его ограниченных подмножеств. Пусть $M$ — частично упорядоченное множество.

Отображение $\psi : B(\mathcal{E}) \to M$ называется мерой некомпактности (см. [2]) если $\psi(\overline{co}\Gamma) = \psi(\Gamma)$ для любого $\Gamma \in B(\mathcal{E})$. Здесь $\overline{co}\Gamma$ обозначает замыкание выпуклой оболочки множества $\Gamma$.

Пусть $G$ непрерывный оператор, действующий из $\mathcal{E}$ в $\mathcal{E}$. Оператор $G$ называется уплотняющим, (см. [2]), относительно меры некомпактности $\psi$, если из неравенства $\psi(G(\Gamma))\bar{\leqslant}\psi(\Gamma)$ следует относительная компактность множества $\Gamma$, здесь $\bar{\leqslant}$ означает отрицание отношения $\leqslant$ частичного порядка в множестве $M$.

Мера некомпактности $\psi$ называется (см. [2]) несингулярной, если для любых $x \in \mathcal{E}$ и $\Gamma \in B(\mathcal{E})$ мера некомпактности $\psi$ удовлетворяет равенству

$$\psi(\{x\} \bigcup \Gamma) = \psi(\Gamma).$$

Мера некомпактности $\psi$ называется монотонной, если для любых $\Gamma_1, \Gamma_2 \in B(\mathcal{E})$ из включения $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$ следует неравенство $\psi(\Gamma_1) \leqslant \psi(\Gamma_2)$.

Рассмотрим теперь в пространстве $N_c^p(\mathcal{F}, [0,T]; H)$ меру некомпактности, задаваемую формулой

$$[\psi(\Gamma)](t) = \chi_t(\Gamma_t), \tag{4}$$

где $\chi_t$ мера некомпактности Хаусдорфа в пространстве $N_c^p(\mathcal{F}, [0,t]; H)$, а

$$\Gamma_t = \{X\big|_{[0,t]} : X \in \Gamma\} \subset N_c^p(\mathcal{F}, [0,t]; H).$$

Под решением уравнения (1) на отрезке $[0,T]$, с начальным условием (2), будем понимать стохастический процесс $X_\alpha \in N_c^p(\mathcal{F}, [0,T]; H)$ и удовлетворяющий интегральному уравнению

$$X_\alpha(t) = e^{At}\varphi + \int\limits_0^t e^{A(t-s)} a_\alpha(s, (S_{h_1,\ldots,h_m} X(s)))ds + \int\limits_0^t e^{At} b_\alpha(s, (S_{h_1,\ldots,h_m} X(s)))dW_s.$$

Такие решения при выполнены условий i) – iii) определены на отрезке $[0,T]$ (см. [4]).

iv) Пусть $\varphi \in L^P(\Omega; H)$.

Как показано в [4] при выполнены условий i) – iv) множество $\Gamma = \{X_\alpha : \alpha \in [0,1]\}$ ограниченное в $N_c^p(\mathcal{F}, [0,T]; H)$.

v) Предположим, что существует $\Delta_0 > 0$ такое, что для всех $x \in H$ и $t_1, t_2 \in [0,T]$такая, что $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_1 + \Delta_0$, полугруппа о $e^{At}$ непрерывна по норме операторов при $t > 0$ кроме пусть выполнены соотношения:

$$\underset{\alpha\to 0^+}{Lim} \int\limits_{t_1}^{t_2} [a_\alpha(s,x) - a_0(s,x)]ds = 0 \tag{5}$$

$$\underset{\alpha\to 0^+}{Lim} \int\limits_{t_1}^{t_2} (tr\{[b_\alpha(s,x) - b_0(s,x)] \cdot [b_\alpha(s,x) - b_0(s,x)]^*\})^{p/2} ds = 0 \tag{6}$$

для любых $t_1, t_2 \in [0,T]$. Все константы ниже обозначются одной буквой $C$.

**Теорема 1.** *Пусть выполняются условия i) – v). Тогда* $\psi(\{X_\alpha : \alpha \in [0,1]\}) = 0$, *т.е. решения* $\{X_\alpha\}$ *образуют компактное множество в пространстве* $N_c^p(\mathcal{F}, [0,T]; H)$.

Доказательство этой теоремы проводится также как и доказательство того факта, что оператор $G$ уплотняет относительно меры некомпактности $\psi$ в теореме 1 из [4].

**Теорема 2.** *Пусть выполняются предположения i) – v). Тогда для любого* $T > 0$

$$\underset{\alpha\to 0^+}{Lim}\ \underset{t\in[0,T]}{Sup} \|X_\alpha(t) - X_0(t)\|_p = 0$$

**Доказательство**. Зафиксируем $T > 0$, $\eta > 0$.

Пусть $\{\tau_i\}_{i=0}^N$ обозначает разбиение отрезки $[0,T]$ такое, что для $i = 1, \ldots, N$ и $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$ имеем

$$\|X_0(t) - X_0(\tau_{i-1})\|_p^< \eta. \tag{7}$$

Можем дополнительно считать, что $\max\{\tau_i - \tau_{i-1}, i = 1, \ldots, N\} \leqslant \min(\eta, \Delta_0)$. Набор $\tau(t) = \max\{i, \tau_i \in [0,t]\}, q(t) = \tau_{\tau(t)}$ имеем

$$X_\alpha(t) - X_0(t) = \int_0^t \Big\{ e^{A(t-s)} a_\alpha(s, S_{h_1,\ldots,h_m} X_\alpha(s)) - e^{A(t-s)} a_0(s, S_{h_1,\ldots,h_m} X_0(s)) \Big\} ds +$$

$$+ \int_0^t \Big\{ e^{A(t-s)} b_\alpha(s, S_{h_1,\ldots,h_m} X_\alpha(s)) - e^{A(t-s)} b_0(s, S_{h_1,\ldots,h_m} X_0(s)) \Big\} dW_s \equiv R_1 + R_2.$$

$$R_1 = \int_0^{q(t)} e^{A_(t-s)} \left[ a_\alpha(s, S_{h_1,\ldots,h_m} X_\alpha(s)) - a_\alpha(s, S_{h_1,\ldots,h_m} X_0(s)) \right] ds +$$

$$+ \int_{q(t)}^{t_i} e^{A(t-s)} \left[ a_\alpha(s, S_{h_1,\ldots,h_m} X_0(s)) - a_0(s, S_{h_1,\ldots,h_m} X_0(s)) \right] ds +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\tau(t)} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} e^{A(t-s)} \left[ a_\alpha(s, S_{h_1,\ldots,h_m} X_0(s)) - a_\alpha(s, S_{h_1,\ldots,h_m} X_0(\tau_{i-1})) \right] ds +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\tau(t)} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} e^{A(t-s)} \left[ a_\alpha(s, S_{h_1,\ldots,h_m} X_0(\tau_{i-1})) - a_0(s, S_{h_1,\ldots,h_m} X_0(\tau_{i-1})) \right] ds +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\tau(t)} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} e^{A(t-s)} \left[ a_0(s, S_{h_1,\ldots,h_m} X_0(\tau_{i-1})) - a_0(s, S_{h_1,\ldots,h_m} X_0(s)) \right] ds \equiv$$

$$\equiv I_1(t) + \ldots + I_5(t)$$

Теперь, используя (ii) , получаем

$$\|I_1(t)\|_p \leqslant C \left( \int_0^t \left\| e^{A(t-s)} \left[ a_\alpha(s, S_{h_1,\ldots,h_m} X_\alpha(s)) - a_\alpha(s, S_{h_1,\ldots,h_m} X_0(s)) \right] \right\|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant C \int_0^t L \left\| S_{h_1,\ldots,h_m} X_\alpha(s) - S_{h_1,\ldots,h_m} X_0(s) \right\|^p ds;$$

$$\|I_2(t)\|_p \leqslant C \int_{q(t)}^t \|(a_\alpha(s, S_{h_1,\ldots,h_m} X_\alpha(s)) - a_0(s, S_{h_1,\ldots,h_m} X_0(s)))\|^p ds \leqslant$$

$$\leqslant C\int\limits_{q(t)}^{t}\left(1+\|S_{h_1,\dots,h_m}X_\alpha(s)\|+\|S_{h_1,\dots,h_m}X_0(s)\|\right)^{\frac{p}{2}}ds\leqslant C\eta.$$

Соответствии с (7) можем оценить

$$\|I_3(t)\|_p\leqslant\sum_{i=1}^{\tau(t)}\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\left\|e^{A(t-s)}\left[a_\alpha(s,S_{h_1,\dots,h_m}X_0(s))-a_\alpha(s,S_{h_1,\dots,h_m}X_0(\tau_{i-1}))\right]\right\|^p ds\leqslant$$

$$\leqslant C\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\|S_{h_1,\dots,h_m}X_0(s)-S_{h_1,\dots,h_m}X_0(\tau_{i-1})\|^p ds\leqslant C\eta;$$

по аналогии $\|I_5(t)\|\leqslant C\eta$.

Окончательно,

$$\|I_4\|_p\leqslant C\sum_{i=1}^{\tau(t)}\left\|\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}e^{A(\tau_i-s)}\left[a_\alpha(s,S_{h_1,\dots,h_m}X_0(\tau_{i-1}))-a_0(s,S_{h_1,\dots,h_m}X_0(\tau_{i-1}))\right]ds\right\|_p,$$

следовательно, исходя из предположения (10) и теоремы Лебега о сходимости, можем найти $\alpha_1>0$, такое, что $\|I_4\|_p<\eta$ для $\alpha\in(0,\alpha_1]$. Теперь нам нужно оценить

$$R_2=\int\limits_0^{q(t)}e^{A(t-s)}\left[b_\alpha(s,S_{h_1,\dots,h_m}X_\alpha(s))-b_\alpha(s,S_{h_1,\dots,h_m}X_0(s))\right]dW_s+$$

$$+\int\limits_0^{q(t)}\left\{e^{A(t-s)}b_\alpha(s,S_{h_1,\dots,h_m}X_0(s))-e^{A(t-s)}b_0(s,S_{h_1,\dots,h_m}X_0(s))\right\}dW_s+$$

$$+\int\limits_{q(t)}^{t}\left\{e^{A(t-s)}b_\alpha(s,S_{h_1,\dots,h_m}X_0(s))-e^{A(t-s)}b_0(s,S_{h_1,\dots,h_m}X_0(s))\right\}dW_s\equiv K_1+K_2+K_3.$$

Используя лемму 1 из [4], легко вывести

$$\|K_1\|_p\leqslant C\left(\int\limits_0^t L\left(\|S_{h_1,\dots,h_m}X_\alpha(s)-S_{h_1,\dots,h_m}X_0(s)\|^p\right)ds\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Пусть $\Psi(s)=e^{A(t-s)}b_\alpha(s,S_{h_1,\dots,h_m}X_0(s))-e^{A(t-s)}b_0(s,S_{h_1,\dots,h_m}X_0(s))$, используя оценку (i), можно показать, что $\sup\{\|\Psi(s)\|^p,0\leqslant s\leqslant t\leqslant T\}\leqslant C$, где константа $C$ не зависит от $\alpha$. Имеем, по лемме 1 из [4],

$$\|K_2\|_p\leqslant C\left(\int\limits_0^{q(t)}\left|\{\Psi(s)\cdot\Psi(s)^*\}\right|^{\frac{p}{2}}ds\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant C\sum_{i=1}^{\tau(t)}\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\left|tr\left\{e^{A(t-s)}\left[b_\alpha(s,S_{h_1,\dots,h_m}X_0(s))-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-b_\alpha(s,S_{h_1,\dots,h_m}X_0(\tau_{i-1}))\right]\ \Psi(s)^*\right\}\right|^{\frac{p}{2}}ds+$$

$$+\sum_{i=1}^{\tau(t)}\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\left|tr\left\{e^{A(t-s)}\left[b_\alpha(s,S_{h_1,\ldots,h_m}X_0(\tau_{i-1}))-\ b_0(s,S_{h_1,\ldots,h_m}X_0(\tau_{i-1}))\right]\ \Psi(s)^*\right\}\right|^{\frac{p}{2}}ds\Big)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\sum_{i=1}^{\tau(t)}\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\left|tr\left\{e^{A(t-s)}\left[b_0(s,S_{h_1,\ldots,h_m}X_0(\tau_{i-1}))-\ b_0(s,S_{h_1,\ldots,h_m}X_0(s))\right]\ \Psi(s)^*\right\}\right|^{\frac{p}{2}}ds\Big)^{\frac{1}{2}}\equiv$$

$$\equiv C(J_1+J_2+J_3)^{\frac{1}{2}}.$$

Перейдем теперь к оценке слагаемых $J_1, J_2, J_3$.

$$J_1\leqslant tr\sum_{i=1}^{\tau(t)}\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\left|\left\|e^{A(t-s)}\left[b_\alpha(s,S_{h_1,\ldots,h_m}X_0(s))-\ b_\alpha(s,S_{h_1,\ldots,h_m}X_0(\tau_{i-1}))\right]\right\|\,\|\Psi(s)\|\right|^{\frac{p}{2}}ds\leqslant$$

$$\leqslant tr\sum_{i=1}^{\tau(t)}\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\left\|e^{A(t-s)}\left[b_\alpha(s,S_{h_1,\ldots,h_m}X_0(s))-b_\alpha(s,S_{h_1,\ldots,h_m}X_0(\tau_{i-1}))\right]\right\|^p\|\Psi(s)\|^p\leqslant$$

$$\leqslant tr\sum_{i=1}^{\tau(t)}\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\|S_{h_1,\ldots,h_m}X_0(s)-S_{h_1,\ldots,h_m}X_0(\tau_{i-1})\|^p\leqslant C\eta,$$

по аналогии $J_3\leqslant C\eta$; пусть $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ортонормированный базис из $C$.

Пусть $Q_i(s) = e^{A(t-s)}[b_\alpha(s,S_{h_1,\ldots,h_m}X_0(\tau_{i-1}))-b_0(s,S_{h_1,\ldots,h_m}X_0(\tau_{i-1}))]$, тогда $\sup\{\|Q_i(s)\|, i=1,\ldots,N; s\in[\tau_{i-1},\tau_i]\}\leqslant C$ могут быть легко проверены. Теперь

$$J_2=\sum_{i=1}^{\tau(t)}\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\left|tr\left\{Q_i(s)\left[e^{A(t-s)}b_\alpha(s,S_{h_1,\ldots,h_m}X_0(s))-e^{A(t-s)}b_0(s,S_{h_1,\ldots,h_m}X_0(s))\right]^*\right\}\right|^{\frac{p}{2}}ds\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{\tau(t)}\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\left|tr\left\{Q_i(s)\left[e^{A(t-s)}\left[b_\alpha(s,S_{h_1,\ldots,h_m}X_0(s))-b_\alpha(s,S_{h_1,\ldots,h_m}X_0(\tau_{i-1}))\right]\right]^*\right\}\right|^{\frac{p}{2}}ds+$$

$$+\sum_{i=1}^{\tau(t)}\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\left|tr\left\{Q_i(s)\cdot Q_i(s)^*\right\}\right|^{\frac{p}{2}}ds+$$

$$+\sum_{i=1}^{\tau(t)}\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\left|tr\left\{Q_i(s)\left[e^{A(t-s)}\left[b_0(s,S_{h_1,\ldots,h_m}X_0(\tau_{i-1}))-b_0(s,S_{h_1,\ldots,h_m}X_0(s))\right]\right]^*\right\}\right|^{\frac{p}{2}}ds\equiv$$

$$\equiv J_4+J_5+J_6.$$

Как и выше, мы можем получить $J_4+J_6\leqslant C\eta$.

Далее, полагая $\Lambda_i(s)=b_\alpha(s,S_{h_1,\ldots,h_m}X_0(\tau_{i-1}))-b_0(s,S_{h_1,\ldots,h_m}X_0(\tau_{i-1}))$

$$J_5\leqslant C\sum_{i=1}^{\tau(t)}\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\left|tr\left\{\Lambda_i(s)\cdot\Lambda_i(s)^*\right\}\right|^{\frac{p}{2}}ds\leqslant$$

$$\leqslant C\sum_{i=1}^{N}(\tau_i-\tau_{i-1})^{\frac{(p-2)}{p}}\left(E\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\left(tr\left\{\Lambda_i(s)\cdot\Lambda_i(s)^*\right\}\right)^{\frac{p}{2}}ds\right)^{\frac{2}{p}}\leqslant$$

$$\leqslant C\sum_{i=1}^{N}\left(E\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\left(tr\left\{\Lambda_i(s)\cdot\Lambda_i(s)^*\right\}\right)^{\frac{p}{2}}ds\right)^{\frac{2}{p}}.$$

Из (11) для $i=1,\ldots,N$ и почти $\omega\in\Gamma$

$$\underset{\alpha\to 0+}{Lim}\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\left(tr\left\{\Lambda_i(s)(\omega)\cdot\Lambda_i(s)(\omega)^*\right\}\right)^{\frac{p}{2}}ds=0,$$

следовательно, применяя теорему Лебега о сходимости получаем существование $\alpha_2>0$ такого, что $J_5\leqslant\eta$ для каждого $\alpha\in(0,\alpha_2]$.

$$\|K_3\|_p\leqslant C\int\limits_{q(t)}^{t}\left(\left\|e^{A(t-s)}b_\alpha\left(s,S_{h_1,\ldots,h_m}X_\alpha(s)\right)-e^{A(t-s)}b_0\left(s,S_{h_1,\ldots,h_m}X_0(s)\right)\right\|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant C\eta$$

Объединяя все выведенные оценки имеем для $\alpha$ достаточно небольшой

$$\|R_2\|_p\leqslant C\left(\eta^{\frac{p}{2}}+\int\limits_0^t L\left\|S_{h_1,\ldots,h_m}X_\alpha(s)-S_{h_1,\ldots,h_m}X_0(s)\right\|^p ds\right)\quad.$$

Доказательство завершено, потому что мы нашли постоянная $C$, для любого $\eta>0$ существует $\alpha_0>0$ такое, что $\alpha\in(0,\alpha_0]$.

$$\|X_\alpha(t)-X_0(t)\|^p\leqslant C\left(\eta^{\frac{p}{2}}+\int\limits_0^t L\left(\left\|S_{h_1,\ldots,h_m}X_\alpha(s)-S_{h_1,\ldots,h_m}X_0(s)\right\|^p\right)ds\right).$$

Итак установлено, что

$$\|X_\alpha(t)-X_0(t)\|^p\leqslant C\eta^{\frac{p}{2}}+C\int\limits_0^t L\left\|S_{h_1,\ldots,h_m}X_\alpha(s)-S_{h_1,\ldots,h_m}X_0(s)\right\|^p ds$$

Обозначим $\|X_\alpha(t)-X_0(t)\|^p$ через $\mu_\alpha(t)$, тогда

$$\mu_\alpha(t)\leqslant C\eta^{\frac{p}{2}}+C\int\limits_0^t L\left(S_{h_1,\ldots,h_m}X_\alpha(s)-S_{h_1,\ldots,h_m}\mu_\alpha(s)\right)ds.$$

Положив теперь $C\eta^{\frac{p}{2}}+C\int\limits_0^t L\left(S_{h_1,\ldots,h_m}X_\alpha(s)-S_{h_1,\ldots,h_m}\mu_\alpha(s)\right)ds=z_\alpha(t)$, имеем

$$\mu_\alpha(t)\leqslant z_\alpha(t)$$

функция $z_\alpha(t)$ дифференцируема и удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$z'_\alpha(t)\leqslant CL\left(S_{h_1,\ldots,h_m}z_\alpha(t)\right),$$

$$z_\alpha(0)=C\eta^{\frac{p}{2}}.$$

Поэтому, $z_\alpha(0)=z_\alpha^B\left(t,\eta\right)$ где $z_\alpha^B\left(t,\eta\right)$ — верхнее решение задачи

$$z'_(t)\leqslant CL\left(S_{h_1,\ldots,h_m}z(t)\right),\tag{8}$$

$$z(0) = C\eta^{\frac{p}{2}}.$$

Но в силу теоремы о непрерывной зависимости от начальных данных для задачи (8) (см. [2]), $z_\alpha(t,\eta) \underset{\eta\to 0}{\Longrightarrow} 0$ на отрезке $[0,T]$, что и завершает доказательство теоремы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Da Prato G. Stochastic Equations in Infinite Dimensions / Da Prato G., Zabczyk J // Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. — 1992. — № 44: Cambridge University Press. — 454 p.

[2] Меры некомпактности и уплотняющие операторы / Ахмеров Р.Р. и др. — Новосибирск: Наука, 1986. — 266 с.

[3] Rodkina A.E. On existence and uniqueness of solution of stochastic differential equations with heredity / A.E. Rodkina // Stochastics. — 1984. — № 12. — P. 187–200.

[4] Аль Зухаири Х. К. О стохастических дифференциальных уравнениях с запаздыванием в бесконечномерном гильбертовом пространстве / Аль Зухаири Х. К. // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 3. — С. 190–199.

[5] Исследования по теории случайных процессов / А.В. Скороход. — Киев: издательство киевского госуниверситета, 1961. — 216 с.

## REFERENCES

[1] Da Prato G., Zabczyk J. Stochastic Equations in Infinite Dimensions. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, 1992, no. 44: Cambridge University Press, 454 p.

[2] Akhmerov R.R. and others. Measures of Noncompactness and Condensing Operators. [Axmerov R.R. i dr. Mery nekompaktnosti i uplotnyayushhie operatory]. Novosibirsk: Nauka, 1986, 266 p.

[3] Rodkina A.E. On existence and uniqueness of solution of stochastic differential equations with heredity. Stochastics, 1984, no. 12, pp. 187–200.

[4] Al Zuhairi HK. On stochastic differential equations with delay in infinite-dimensional Hilbert space. [Al' Zuxairi X. K. O stoxasticheskix differencial'nyx uravneniyax s zapazdyvaniem v beskonechnomernom gil'bertovom prostranstve]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 3, pp. 190–199.

[5] Skorokhod A.C. Studies on the theory of random processes. [Skoroxod A.V. Issledovaniya po teorii sluchajnyx processov]. Kiev: publishing house, Kiev state University, 1961, 216 p.

*Хамид Кадим Аль Зухаири, аспирант физико-математического факультета Воронежского государственного педагогического университета, Воронеж, Российская Федерация*
*E-mail: hkd73@mail.ru*

*Hameed Kadhim Al Zuhairi, Post-graduate student, Faculty of Physics and Mathematics, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russian Federation*
*E-mail: hkd73@mail.ru*